

도식적 상·하계법을 이용한 비배수 점토지반에서 얕은 기초의 지지력계수

Bearing Capacity Factor of Shallow Foundation in Undrained Clay Using the Diagrammatic Upper and Lower Bound Methods

이 용 주¹ Lee, Yong-Joo

Abstract

This study introduces the diagrammatic Upper and Lower Bound (UB and LB) methods theoretically in order to derive the bearing capacity factor, N_c in undrained clay and to compare with Prandtl's exact solution (1921). As a result of the theoretical study, an exact solution comes out when the UB and LB solutions are the same. In addition, the finite element analyses show that the failure loads approach to the bearing capacity factor of 5.14. Results of the FEA significantly depend on the finite element type, a number of elements, and a number of increments. From this study the exact solution defines that solutions from UB and LB are the same. However, this situation is very difficult to process, so we can confirm the exact solution as a range between UB and LB solutions.

요 지

본 논문은 비배수 점토지반에서 얕은 기초의 지지력계수인 N_c 값을 도식적 상계법과 하계법을 이용해 이론적으로 유도하고 이를 Prandtl(1921)이 제안한 값과 비교하였다. 그 결과, 상계법과 하계법이 일치하는 값이 Prandtl(1921)이 제안한 N_c 값이 5.14임을 확인하였으며, 유한요소해석 결과도 얕은 기초가 파괴하중에 도달할 때의 N_c 가 5.14로 나타났다. 이러한 유한요소해석 결과는 유한요소 형태(finite element type)와 수, 그리고 증분수(increments)에 크게 의존한다. 본 연구를 통해 상계법에서 구한 값과 하계법에서 구한 값이 서로 일치할 때 비로소 이론적으로 정확한 값을 정의할 수 있으나, 일치하는 값을 유도하는 일은 매우 어려우며 일반적으로 상계법의 해와 하계법 해 사이에 존재한다고 볼 수 있다.

Keywords : Bearing capacity factor, Diagrammatic Upper and Lower Bound (UB and LB) methods, Exact solution, Finite element analysis, Shallow foundation, Undrained clay

1. 서 론

$$q_u = 5.14c_u \quad (1)$$

지반공학자에게 널리 알려진 점토지반에서의 이론적 극한지지력(q_u)는 Prandtl(1921)에 의해 다음의 식 (1)과 같이 구할 수 있다.

여기서, c_u 는 점토지반의 비배수 전단강도(단위: kN/m^2)이며, 점착력에 대한 지지력 계수인 N_c 값은 5.14이다.

¹ 정회원, 국립서울과학기술대학교 건설공학부 교수 (Member, Assistant Prof., School of Civil Eng., Seoul National Univ. of Science & Technology, ucesyj1@seoultech.ac.kr, 교신저자)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2011년 11월 30일까지 그 내용을 확회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

식 (1)은 Prandtl의 금속에 대한 소성파괴에 대한 응용으로 지표면에 위치한 얇은 기초가 $\phi=0$ 인 흙 속으로 관입되면서 회전되지 않는다는 가정하에 만들어진 공식이다. 그림 1은 얇은 기초의 지지력을 구하기 위해 적용되는 전형적인 Prandtl의 파괴메카니즘을 보여 준다(Chen, 1975).

식 (1)에서 점성토지반에서 극한지지력을 구하기 위한 중요한 지지력계수인 N_c 값이 5.14임을 쉽게 알 수 있다. 그러나, 지반공학을 배우는 학생을 비롯한 실무에 종사하는 많은 지반기술자들은 어떻게 지지력계수 5.14가 유도되어 나왔는지에 대해 많은 궁금증을 가지고 있다. 또한 기존의 문헌(Chen, 1975, Davis and Selvadurai, 2002)에서는 에너지이론을 적용해 얇은 기초의 지지력을 수학적으로 어렵게 유도하고 있어 이러한 과정을 이해하기가 쉽지 않다는 단점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 Atkinson(1981)의 문헌을 토대로 좀 더 쉽게 도식적으로 해석한 상계법(Upper Bound method: UB)과 하계법(Lower Bound method: LB)을 소개하여 위에서 언급한 지지력 계수를 이론적으로 유도하고, 이와 더불어 유한요소해석을 통해 검증하고자 한다. 앞으로 본 논문에서는 상계법은 UB로 하계법은 LB로 언급하기로 한다.

본 연구와 관련 한계해석법(limit analysis)인 UB와 LB는 다음 표 1과 같은 특징을 가지고 있다.

표 1에서 보는 바와 같이 유한요소법인 FEM인 경우, 평형(equilibrium), 변위에 대한 적합성(compatibility), 재료의 구성모델(constitutive behavior), 경계조건(boundary conditions)과 같은 모든 조건을 만족한다. 이에 비해 파괴메카니즘에 근거하는 UB의 경우, 평형조건과 경계조건에 있어 힘의 조건을 만족하지 못해 불안정한 해(unsafe

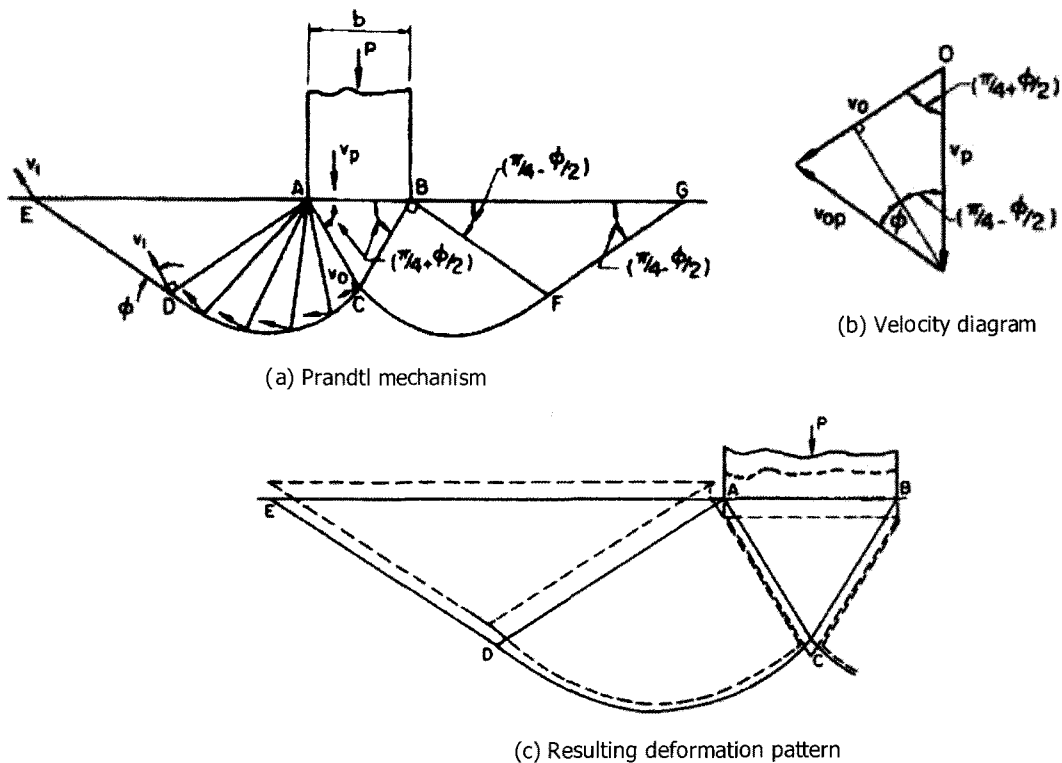
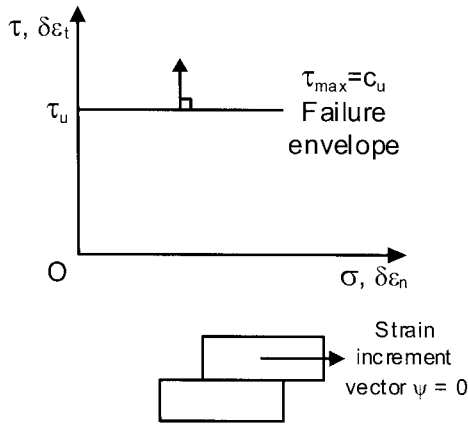


그림 1. 얇은 기초의 지지력을 구하기 위한 Prandtl 파괴메카니즘

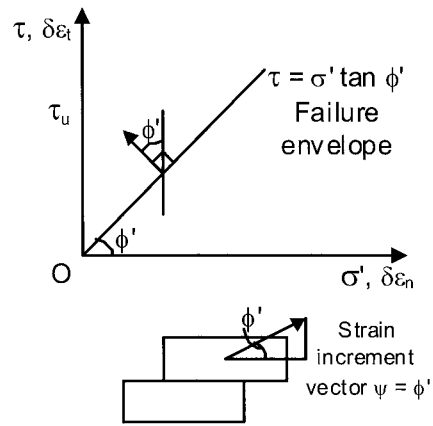
표 1. 한계해석법과 유한요소법(FEM)의 특징(Potts and Zdraković, 1999)

Solutions	Solution Requirements				
	Equilibrium	Compatibility	Constitutive behavior	Boundary conditions	
				Force	Displacement
LB	S	NS	Ideal plasticity with associated flow rule	S	NS
UB	NS	S		NS	S
FEM	S	S	Any	S	S

S - Satisfied; NS - Not Satisfied



(a) Normality for $\tau_{max} = c_u$ failure criterion



(b) Normality for $(\tau/\sigma')_{max} = \tan \phi'$ failure criterion

그림 2. 연관성 흐름법칙의 성립: (a) 순수 점성재료, (b) 순수 마찰재료

solution)에 가깝다고 볼 수 있으며, 불연속면을 경계로 한 점에서의 응력평형에 근거하는 LB는 변위에 대한 적합성과 경계조건에 있어 변위에 대한 조건을 만족하지 못해 안전한 해(safe solution)에 가깝다. 공통점으로는 재료의 구성모델에 있어 이상화된 소성조건(ideal plasticity: 응력은 일정하고 변형률은 계속해서 증가)과 그림 2에서 보는 바와 같이 연관성 흐름법칙(associated flow rule 또는 normality rule: 전단응력(τ)과 전단변형률($\delta\epsilon_t$)은 파괴포락선에 대해 접선방향이며 수직전응력(σ) 또는 수직유효응력(σ')과 수직변형률($\delta\epsilon_n$)은 파괴포락선에 대해 법선방향인 경우)이 적용된다는 점이다.

위에서 언급한 바와 같이 UB 또는 LB 각각의 해 자체는 불완전하다는 것을 알 수 있다. 따라서 완전한 또는 정확한 해(exact solution)는 그림 3에서 보는 바와 같이 UB와 LB가 서로 일치하는 경우라고 할 수 있다. 그러나 이러한 완전한 해를 현실적으로 구하기는 매우 어려우며 일반적으로 완전한 해는 UB와 LB 사이에 존재한다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 이러한 정해를 찾기 위해 하계법에서 제시한 FAN 메커니즘과 다양한 파괴 메커니즘을 상계법에 도입해 하계법에서 나온 해와 일

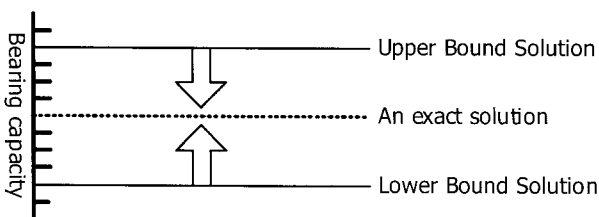


그림 3. 완전한 해의 존재(지지력 경우)

치되는 해를 찾고자 한다.

2. LB에 의한 지지력

2.1 개요

LB에 의한 해를 구하기 위해서는 먼저 응력불연속(stress discontinuity)의 개념을 이해하여야 한다. 두 개의 응력상태를 높은 응력에 해당하는 B와 낮은 응력에 해당하는 A를 그림 4에서 보는 바와 같이 불연속면(discontinuity)을 따라서 구분할 수 있다. 이 때 불연속면을 가로질러 평형조건을 만족한다.

평형조건에 따라 아래와 같은 식이 성립한다.

$$(\sigma_n)_B = (\sigma_n)_A, (\tau_n)_B = (\tau_n)_A \quad (2)$$

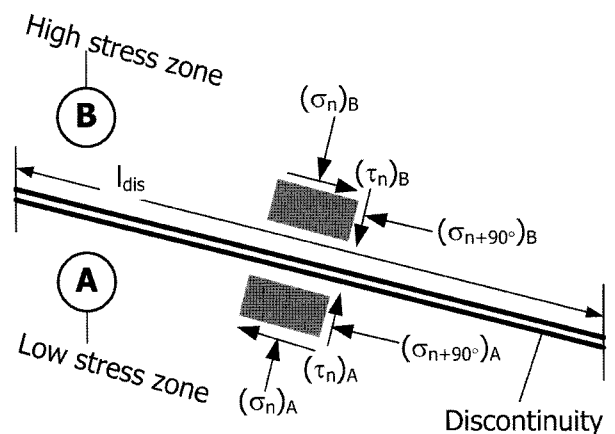


그림 4. 불연속면을 경계로 높은 응력과 낮은 응력 영역의 구분

낮은 응력 영역과 높은 응력 영역을 Mohr 응력원으로 각각 표시하면 그림 5와 같다.

그림 5에서 표시한 두 개의 Mohr 원을 함께 나타내면 그림 6과 같다.

그림 6을 작도하기 위해서는 다음과 같은 절차를 거친다.

- (1) C점을 통과하는 불연속면을 그린다. 이 때 두 개의 극점이 나타나며 PA와 PB를 표시한다.
- (2) 두 개의 극점에서부터 $(\sigma_1)_B$ 와 $(\sigma_1)_A$ 를 통과하는 선이 최대주응력이 작용하는 면이 된다(그림 6의 작은 그림 참조).

그림 6의 두 개의 Mohr 원에 대해 각도로 표시하면

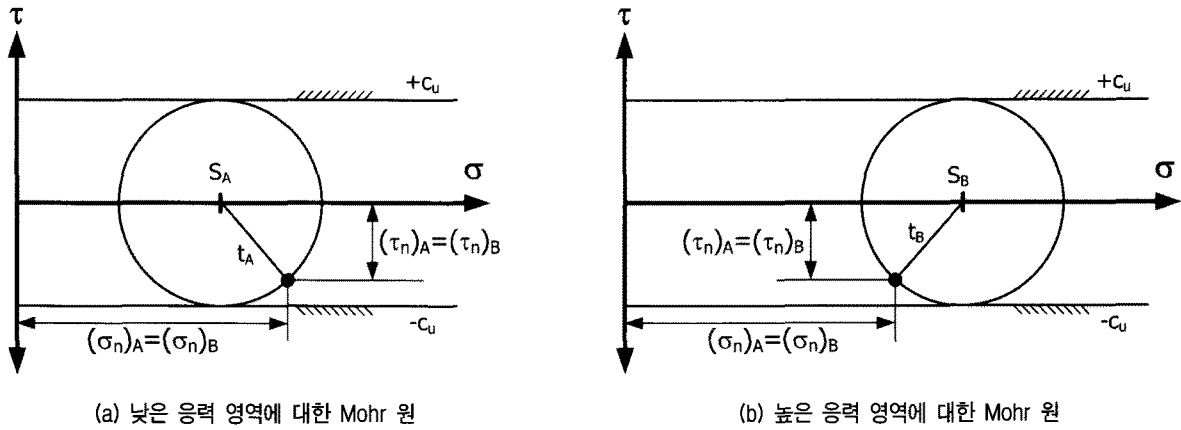


그림 5. 불연속면을 경계로 높은 응력과 낮은 응력 영역의 구분

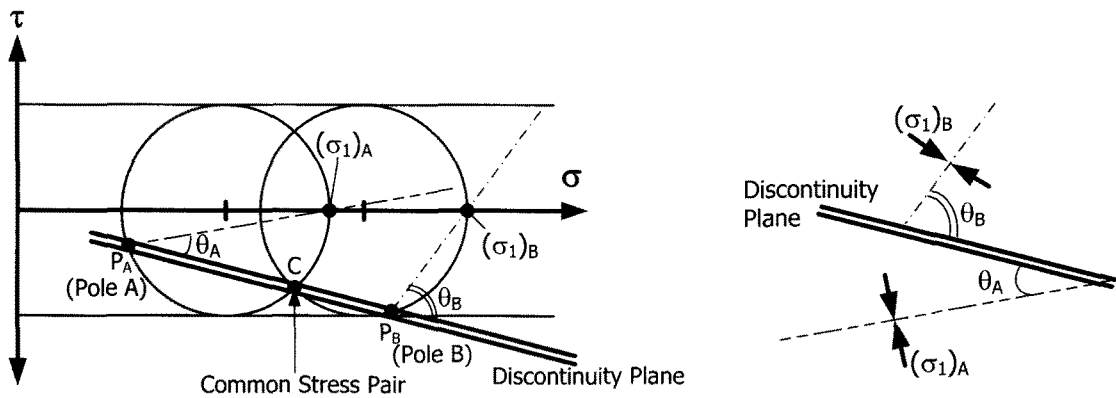


그림 6. 두 개의 응력 영역을 함께 표시한 Mohr 원

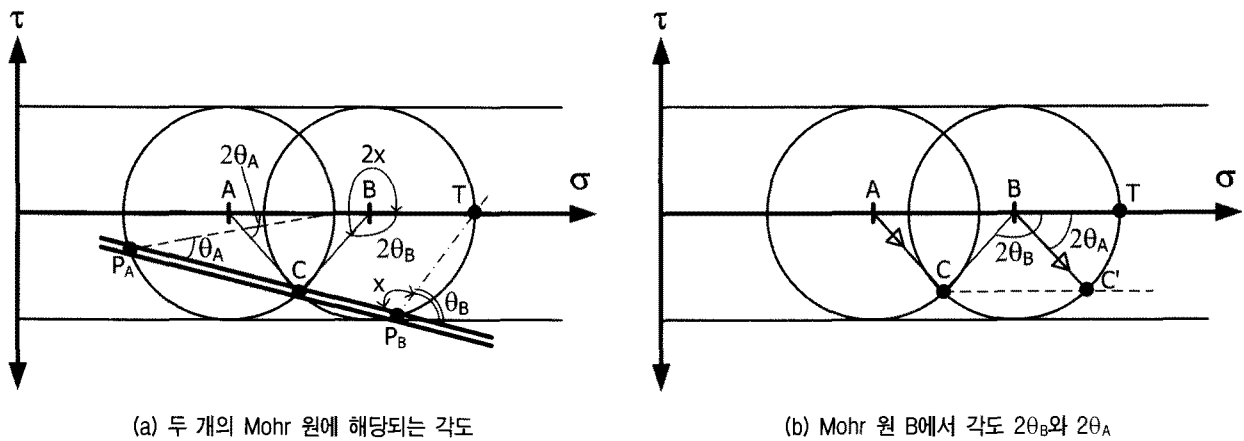
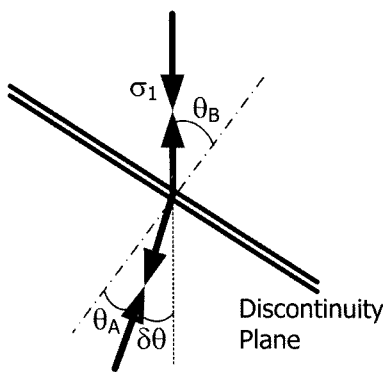


그림 7. 두 개의 응력 영역을 함께 표시한 Mohr 원

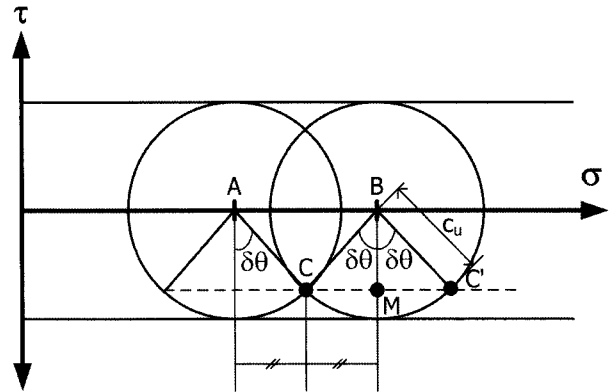
다음의 그림 7(a)와 같이 나타낼 수 있다. 그림 7(a)에서 각 $\angle BAC$ 는 각 $2\theta_A$ 가 되며 각 $\angle TP_B C$ 는 각 $180^\circ - \theta_A$ 가 된다. 따라서 각 $\angle TBC$ 는 각 $2\theta_B$ 가 됨을 알 수 있다. 다음으로 그림 7(b)에서 보는 바와 같이 선 BC' 에 평행한 선 AC 를 그을 수 있다. 따라서 각 $\angle TBC$ 는 $2\theta_A$ 가 되며 이 때 각 $\angle CBC'$ 은 $2\theta_B - 2\theta_A$ 가 된다.

이러한 변화된 각도($2\theta_B - 2\theta_A$)의 의미는 높은 응력 영역인 A에서 낮은 응력 영역인 B에 각각 해당되는 면에 작용하는 최대주응력인 σ_1 의 작용하는 방향이 변화됨을 의미한다. 이를 그림으로 나타내면 그림 8(a)와 같다. 여기서, $\delta\theta$ 는 최대주응력의 방향이 변화되는 값을 나타낸다. 즉, $2\delta\theta = 2\theta_B - 2\theta_A \rightarrow \delta\theta = \theta_B - \theta_A$ 임을 의미한다. 따라서, 이를 Mohr 원으로 나타내면 그림 8(b)와 같다. 그림 8(b)에서 선 AC , BC , BC' 의 길이는 모두 같으며 비배수 전단강도인 c_u 값을 가진다. 이 때 선 CM 의 길이는 다음의 식 (3)을 만족한다.

$$CM = \frac{CC'}{2} = c_u \sin \delta\theta, AB = 2CM \rightarrow CM = 2c_u \sin \delta\theta \quad (3)$$

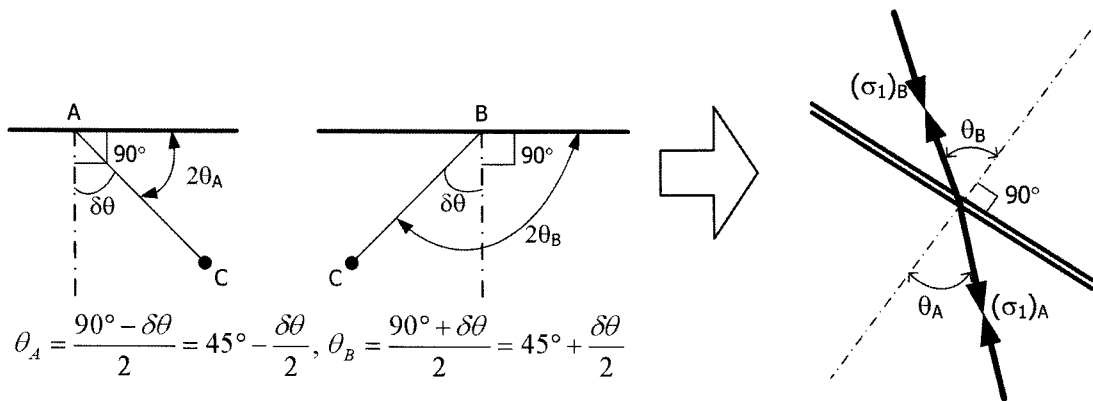


(a) 최대주응력(σ_1) 방향의 변화



(b) Mohr 원 A, B에서 $\delta\theta$ 와 c_u

그림 8. 최대주응력 방향의 변화와 Mohr 원



$$\theta_A = \frac{90^\circ - \delta\theta}{2} = 45^\circ - \frac{\delta\theta}{2}, \theta_B = \frac{90^\circ + \delta\theta}{2} = 45^\circ + \frac{\delta\theta}{2}$$

그림 9. 최대주응력 방향과 불연속면이 이루는 각도

위에서 언급한 내용을 다시 정리하면 다음과 같다.

- (1) 불연속면을 통과하는 Mohr 원의 중심점의 변화 위치는 $S_B - S_A = 2C_u \sin \delta\theta$ 로 나타낼 수 있다. 여기서, $S_B - S_A$ 는 응력 변화량을 의미한다($\Delta S = S_B - S_A$).
- (2) 최대주응력 방향과 불연속면이 이루는 각도는 다음의 그림 9와 같이 나타낼 수 있다.

2.2 LB를 적용한 얇은 기초의 지지력

LB를 이용해 점토지반에서의 지지력을 구하기 위해서는 다음의 그림 10과 같이 높은 응력 영역인 B와 낮은 응력 영역인 A를 x점을 수직으로 통과하는 불연속면을 기준으로 설정한다. 그림 10에서 보는 바와 같이 B영역에 있어 최대주응력, $(\sigma_1)_B$ 는 수직방향으로 작용하고 A영역에 있어 최대주응력, $(\sigma_1)_A$ 는 수평방향으로 작용한다. 참고로 불연속면을 기준으로 B영역에서의 최대주응력 방향이 A영역으로 90° 만큼 회전한다는 사실을 알 수 있다.

만약, 불연속면이 1개가 아닌 3개를 선택한 경우, 이때 $\delta\theta$ 가 30° 라고 가정하면 그림 9로부터 불연속면과 최대주응력이 이루는 각도는 $60^\circ(\theta_B=45^\circ+\delta\theta/2=45^\circ+15^\circ)$ 와 $30^\circ(\theta_A=45^\circ-\delta\theta/2=45^\circ-15^\circ)$ 가 된다. 이를 그림으로 나타내면 그림 11(a)와 같다. 한편, 응력 변화량인 ΔS 를 구하면 다음의 식 (4)와 같다.

$$\Delta S = 2c_u \sin 30^\circ = c_u \quad (4)$$

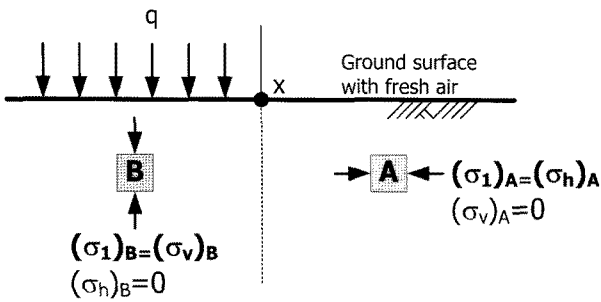


그림 10. LB를 적용하기 위한 응력 영역의 설정과 최대주응력 방향

따라서, 3개의 불연속면을 고려한 응력 변화량, $S_B - S_A = 3c_u$ 가 됨을 그림 11(b)를 통해 알 수 있다. 이러한 LB의 극한지지력은 그림 11(b)의 Q점에 해당되며, 그 값은 $q = (2+3)c_u = 5c_u$ 로 계산할 수 있다. 이러한 해는 완전한 해인 $q = 5.14c_u$ 에 매우 근접하는 결과로 볼 수 있다.

보다 더 근접하는 해를 얻기 위해 $\delta\theta$ 가 매우 작고 무수히 많은 불연속면을 가지는 FAN 불연속면을 도입하고자 한다. 이와 같은 FAN을 수식으로 표현하면 다음의 식 (5)와 같은 조건을 만족한다.

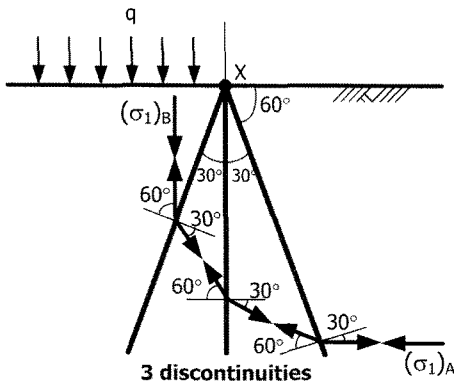
$$\delta\theta \rightarrow 0, \sin \delta\theta \rightarrow d\theta \quad (5)$$

응력 변화량, ΔS :

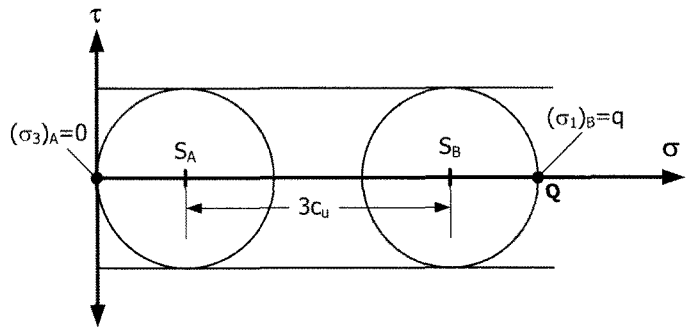
$$\Delta S \rightarrow ds = 2c_u \sin d\theta \quad (6)$$

따라서, 전체적인 응력 변화량은

$$S_B - S_A = \int_0^{\Delta\theta} 2c_u \sin d\theta = 2c_u \Delta\theta \quad (7)$$

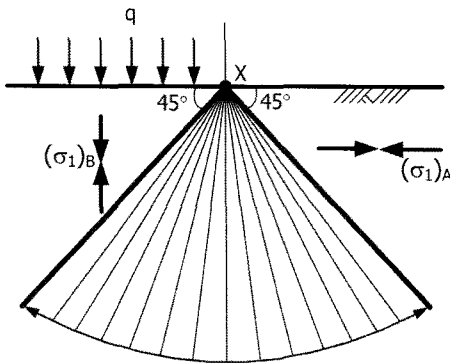


(a) 3개의 불연속면과 최대주응력(σ_1) 방향

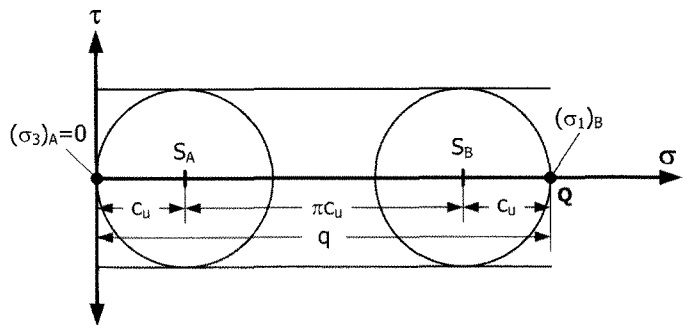


(b) 3개 불연속면에 대한 응력 변화량

그림 11. 3개의 불연속면을 적용한 LB



(a) FAN 불연속면
(Angle = $\Delta\theta = 90^\circ$)



(b) FAN 불연속면에 대한 응력 변화량

그림 12. FAN 불연속면을 적용한 LB

여기서, $\Delta\theta$ 는 FAN을 통과하는 전체적인 최대주응력 방향의 변화량을 나타낸다.

시작하는 FAN의 각도와 끝나는 FAN의 각도는 45° 임을 알 수 있다($45^\circ \pm 60/2 \rightarrow 45^\circ$). 이를 그림으로 나타내면 그림 12(a)와 같다. 그림 12(a)에서 $\Delta\theta=90^\circ$, 즉 $\pi/2$ (라디안)임을 알 수 있다. 따라서 응력 변화량은 다음의 식 (8)과 같이 계산할 수 있다.

$$S_B - S_A = 2c_u \Delta\theta = 2c_u \times \frac{\pi}{2} = \pi c_u \quad (8)$$

식 (8)을 Mohr 원으로 나타내면 그림 12(b)와 같다. 따라서, FAN 불연속면을 고려한 응력 변화량, $S_B - S_A = \pi c_u$ 가 됨을 그림 12(b)를 통해 알 수 있다. 이러한 LB의 극한지지력은 그림 12(b)의 Q점에 해당되며, 그 값은 $q = (2 + \pi)c_u = 5.14c_u$ 로 계산할 수 있다. 이러한 해는 완전한 해인 $q = 5.14c_u$ 에 일치한다.

위에서 보는 바와 같이 LB를 적용하는 경우, 그 값이 커질수록 정확한 지지력 해에 도달됨을 알 수 있다(그림 3 참조).

3. UB에 의한 지지력

3.1 개요

LB로 구한 해는 어느 한 점에서의 응력평형을 나타내며, 어떠한 경우라도 소성한계를 넘지 않아야 한다. 이러한 평형은 불연속면을 따라 수직 및 전단응력이 평형을 유지하고 있음을 의미한다. 따라서, LB에서는 파괴 메카니즘이 존재하지 않는다. 이와는 대조적으로 UB의 개념은 파괴면을 따르는 단순한 메카니즘에 파괴응력이 작용한다는 가정과 이러한 메카니즘에 작용하는 힘을 가상의 일을 적용하여 계산한다는 가정에 근간을

두고 있다. 한편, UB와 관련하여 단순한 메커니즘 생성이 가능하나, 종종 LB와 관련해서 UB 메커니즘을 설정하는 것이 유용하다.

UB에 있어 비배수 파괴면에 해당되는 변위는 그림 13과 같이 전단실험에 비유하여 설명할 수 있다.

그림 13에서 보는 바와 같이 비배수인 경우, 부피의 변화가 없으므로 δ_y 는 항상 0이다. A에 대한 B의 상대 변위(δ_x)는 파괴면에 평행하며 팽창(dilation)은 일어나지 않는다.

3.2 UB를 적용한 얇은 기초의 지지력

(1) 1개의 불연속면을 가지는 UB 메커니즘

LB로부터 메커니즘을 선정하기 위해서는 먼저, 아주 간단하게 그림 14(a)와 같이 1개의 불연속면을 고려한다. 이 때 해당되는 응력 변화량은 그림 14(b)와 같이 $2c_u$ 임을 알 수 있다. 따라서 지지력 $q = 4c_u$ 이다.

그림 14(b)의 각각의 Mohr 원에 해당되는 극점(pole)을 그림 15(a)에 표시할 수 있다. 이 때 파괴면은 최대전단응력이 작용하는 면과 일치한다. 즉, 그림 15(a)의 α (+ 전단)면과 β (- 전단)면으로 나타낼 수 있다. 이러한 두 개의 파괴면을 그림 14(a)에 투영하면 그림 15(b)와 같이 나타낼 수 있다.

그림 15(b)의 β (- 전단) 파괴면으로부터 가능한 메커니즘을 그림 16(a)와 같이 나타낼 수 있다. 다음으로는 이러한 메커니즘에 가상의 일을 적용하여야 한다. 이러한 가상의 일을 적용하기 위해서는 블록 A와 B에 해당되는 적합한(compatible) 변위도(displacement diagram)가 필요하다.

그림 17(a)에 해당되는 변위도를 나타내면 그림 17(b)와 같다. 여기서, B는 하중이 작용하는 기초의 폭이며 O점은 움직임이 없는 부동의 영역에 해당되는 점을 의미한다.

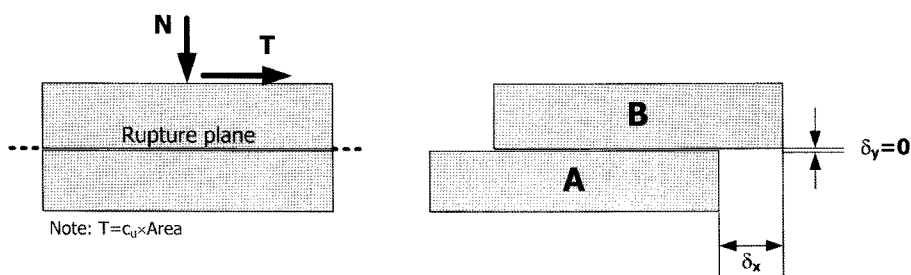
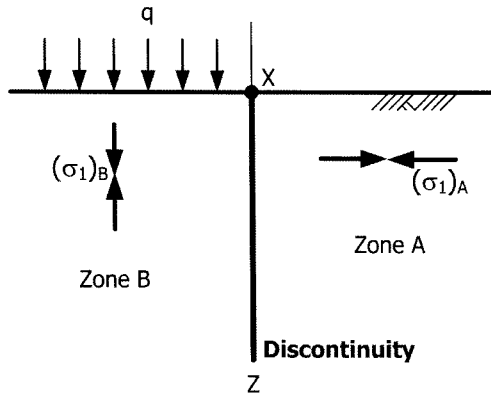
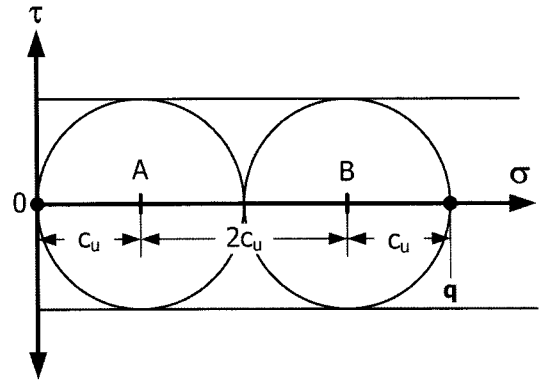


그림 13. 전단실험과 파괴면

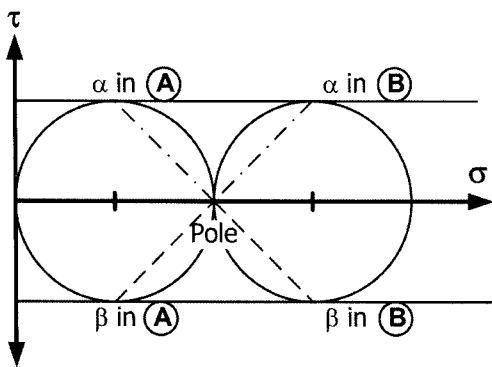


(a) 1개의 불연속면(선 XZ)

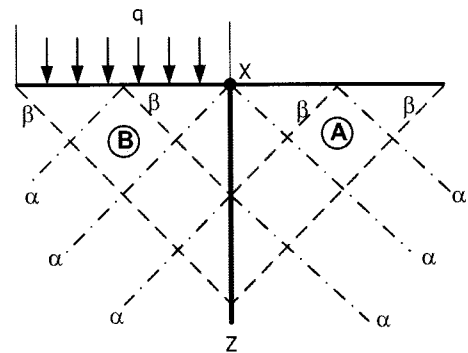


(b) 1개의 불연속면에 대한 응력 변화량

그림 14. 1개의 불연속면을 가지는 LB



(a) Mohr 원의 극점과 α, β 파괴면



(b) 1개의 불연속면에 대한 α, β 파괴면

그림 15. α, β 파괴면의 투영

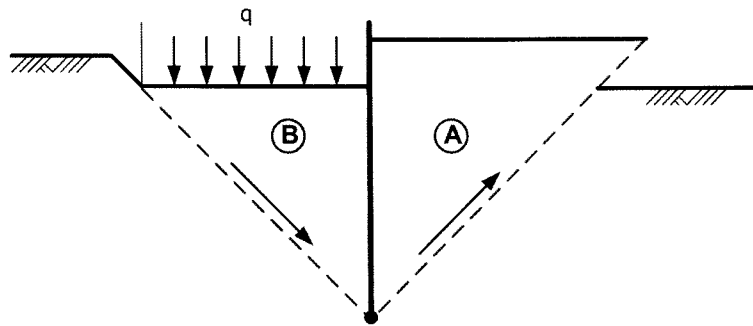
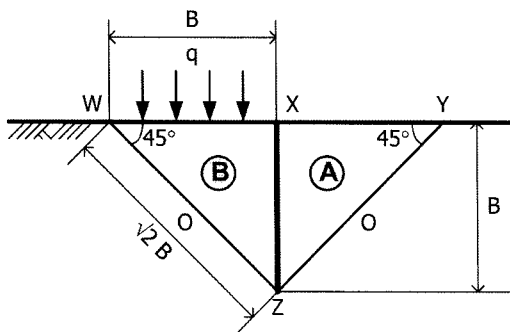
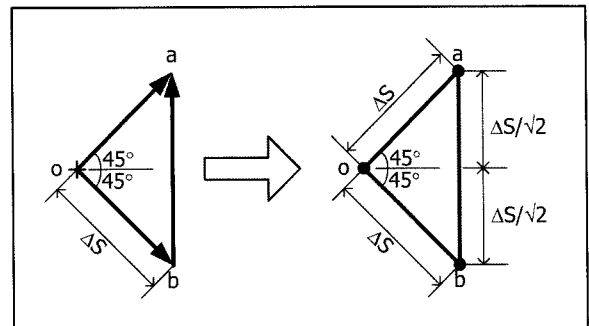


그림 16. 단순한 파괴 메커니즘



(a) 파괴 메커니즘의 제원(dimension)



(b) 변위도(displacement diagram)

그림 17. 1개 불연속면을 포함하는 메커니즘 제원과 변위도

그림 17(b)의 변위도에서 볼 수 있듯이 O점을 기준으로 블록 B는 아래로 움직이며(b점에 해당), 블록 A는 위로 움직인다(a점에 해당). 이 때의 변위량은 ΔS 로 정의한다.

가상의 일은 외부에서 작용하는 힘이 파괴면을 따라 소산된다는 가정하에 성립한다. 이를 식으로 표현하면

$$Work = force \times displacement = stress \times length \times displacement \quad (9)$$

*/ unit thickness

외부의 일은 기초 폭에 작용하는 하중으로 블록 B를 아래로 움직일 때를 의미하며 이를 식으로 나타내면

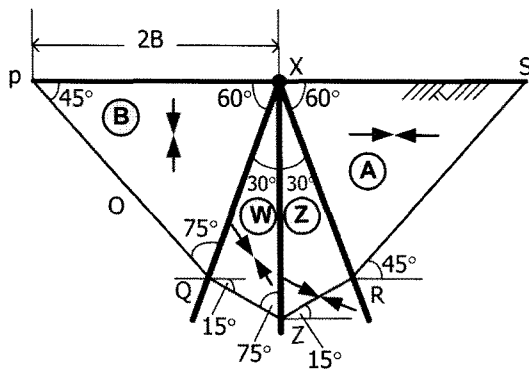
$$W_{ext} = qB \times \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

참고로 옆으로 움직이는 것에 대한 일의 효과는 없는 것으로 간주한다.

내부의 일은 c_u 가 작용되는 3개의 면인 WZ, XZ, ZY를 따라 소산된다(그림 17(a) 참조). 각각의 면에 대한 일을 계산하면 다음의 표 2와 같다.

표 2. 내부 일(Wint)의 계산

Line	Length	Displacement	Work Done
WZ	$\sqrt{2}B$	S	$\sqrt{2} \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$
XZ	B	$\frac{2\Delta S}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2} \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$
ZY	$\sqrt{2}B$	S	$\sqrt{2} \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$
SUM			$3 \cdot \sqrt{2} \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$



(a) 파괴 메커니즘의 제원(dimension)

따라서, 외부의 일과 내부의 일이 같다고 놓으면

$$W_{ext} = W_{int} \rightarrow q \cdot B \cdot \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$$

$$\therefore q = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot c_u = 6c_u \quad (11)$$

LB에서 얻은 정확한 해와 비교해 큰 값임을 알 수 있다. 참고로 LB의 응력장(stress field)에서는 XZ면에 작용하는 응력이 최대주응력으로 $(\sigma_1)_A = 2c_u = (\sigma_3)_B$ 이므로 전단응력은 0이다. 이러한 결과로부터 평형조건을 만족하는 응력장(stress field)은 메커니즘과 동적으로(kinematically) 적합(compatible)되지 않음을 알 수 있다.

(2) 3개의 불연속면을 가지는 UB 메커니즘

좀 더 정확한 해에 접근하기 위해 이번에는 3개의 불연속면을 가지는 메커니즘을 그림으로 나타내면 그림 18(a)와 같으며, 이와 관련된 변위도는 그림 18(b)와 같다.

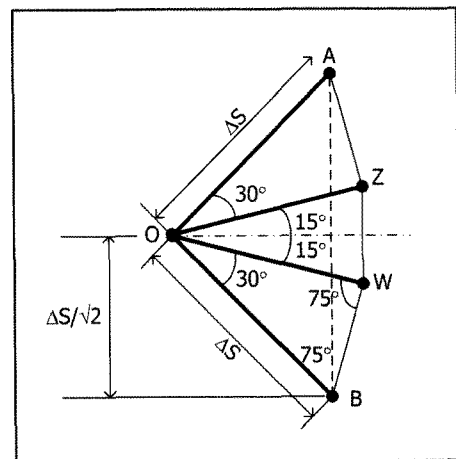
각각의 면에 대한 내부의 일을 계산하면 다음의 표 3과 같다.

따라서, 외부의 일과 내부의 일이 같다고 놓으면

$$W_{ext} = W_{int} \rightarrow q \cdot 2B \cdot \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} = 7.374 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$$

$$\therefore q = \frac{7.374}{\sqrt{2}} \cdot c_u = 5.21c_u \quad (12)$$

LB에서 얻은 정확한 해와 비교해 매우 근접됨을 알 수 있다.



(b) 변위도(displacement diagram)

그림 18. 3개 불연속면을 포함하는 메커니즘 제원과 변위도

표 3. 내부 일(Wint)의 계산

Line	Length	Displacement	Work Done
PQ & RS	0.8962B	S	$(1.792 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u) \times 2$
XQ & XR	0.7322B	0.518S	$(0.758 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u) \times 2$
QZ & ZR	0.3792B	S	$(0.758 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u) \times 2$
XZ	0.7322B	0.518S	$0.758 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$
SUM			$7.374 \cdot B \cdot \Delta S \cdot c_u$

(3) FAN 개념을 도입한 UB 메커니즘

FAN의 불연속면이 이루는 각도가 매우 작다면, 그림 19와 같이 FAN의 일부분과 이에 해당하는 변위장(displacement field)를 나타낼 수 있다. 이 때의 일은

$$(force \times \beta \text{ to } \alpha \text{ displacement}) + (force \times O \text{ to } \alpha \text{ displacement}):$$

$$(R \times c_u \times \Delta S \delta \theta) + (R \delta \theta \times c_u \times \Delta S) = 2 \times (R \cdot \Delta S \cdot \delta \theta \cdot c_u) \quad (13)$$

여기서, $\Delta S \delta \theta$: β 에서 α 까지 변위, ΔS : O에서 α 까지

변위를 의미한다.

만약, $\Delta \theta$ 가 FAN 전체의 각도(최대주응력 방향의 변화 각도)라고 하면 전체 일은

$$Total \ Work = 2 \cdot \Delta S \cdot R \cdot c_u \int_0^{\Delta \theta} d\theta = 2 \cdot \Delta S \cdot R \cdot c_u \cdot \Delta \theta \quad (14)$$

FAN을 이용한 UB 메커니즘은 다음의 그림 20(a)와 같이 나타낼 수 있다. 이 때 최대주응력 방향의 변화 각도, $\Delta \theta = 90^\circ$ 이다. 또한 이에 해당되는 변위도를 나타내면 그림 20(b)와 같다.

내부의 일을 계산하면 다음의 표 4와 같다.

따라서, 외부의 일과 내부의 일이 같다고 놓으면

$$W_{ext} = W_{int} \rightarrow q \cdot 2B \cdot \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} = \frac{c_u}{\sqrt{2}} (2 + \pi) \cdot 2B \cdot \Delta S$$

$$\therefore q = (2 + \pi) \cdot c_u = 5.14c_u \quad (15)$$

LB에서 얻은 정확한 해와 일치됨을 알 수 있다. 참고로

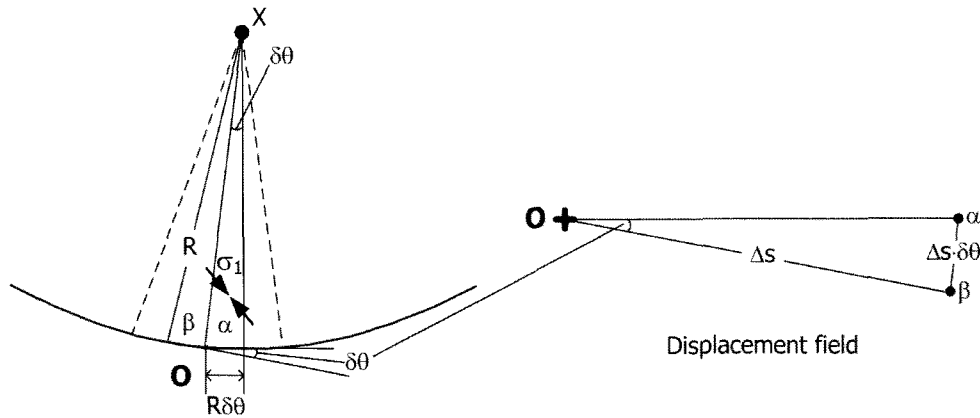
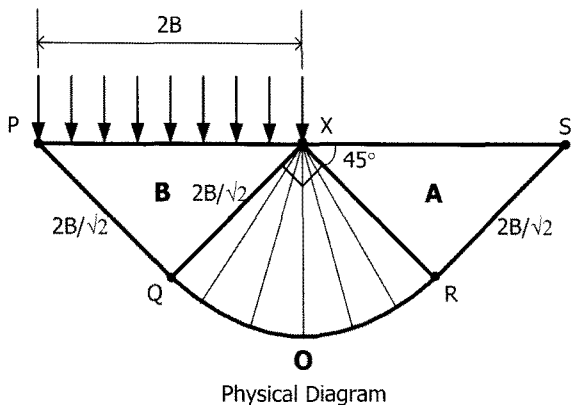
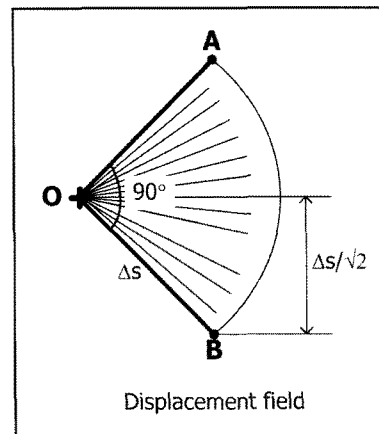


그림 19. FAN 메커니즘과 변위장(displacement field)



(a) FAN 메커니즘의 제원(dimension)



(b) 변위도(displacement diagram)

그림 20. FAN 메커니즘 제원과 변위도

표 4. 내부 일(Wint)의 계산

Line	Length	Displacement	Work Done
PQ	$\frac{2B}{\sqrt{2}}$	S	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c_u \cdot 2B \cdot \Delta S$
FAN	$\left(\frac{2B}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$	$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot c_u \cdot 2B \cdot \Delta S$
RS	$\frac{2B}{\sqrt{2}}$	S	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c_u \cdot 2B \cdot \Delta S$
SUM			$\frac{c_u}{\sqrt{2}} (1 + \pi + 1) \cdot 2B \cdot \Delta S$

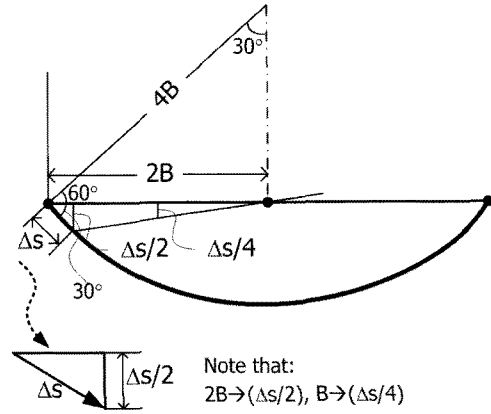


그림 22. 2차 시도 메커니즘과 변위도

LB의 응력 FAN은 최대전단응력인 c_u 가 작용하는 불연속면과 관련된다. UB의 FAN 메커니즘은 이러한 LB의 불연속면을 사용한다. 따라서, UB와 LB는 변위에 대해 상호 적합하다는 것을 해가 일치된다는 사실로부터 알 수 있다.

(4) 다양한 UB 메커니즘

UB 메커니즘은 위에서 언급한 내용 외에도 다양한 방법으로 결정할 수 있다. 그 예로 비배수 조건인 경우, 직선과 또는 원호로 메커니즘을 구성할 수 있다. 첫 번째의 시도로 그림 21(a)와 같이 FAN 메커니즘이 아닌 반지름이 기초 폭, B인 간단한 반원을 고려할 수 있다.

그림 21에 해당하는 외부의 일과 내부의 일은 다음과 같이 계산할 수 있다. 이 때 원호의 길이는 $\pi \cdot 2B$ 이다.

$$\begin{aligned}
 W_{int} &= \pi \cdot 2B \cdot c_u \cdot \Delta S \\
 W_{ext} &= 2B \cdot q \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta S \\
 W_{int} &= W_{ext} \\
 \therefore q &= 2\pi c_u \cong 6.28c_u
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

식 (16)에서 보는 바와 같이 정확한 해에 비해 높은 값이 얻어진 것을 알 수 있다. 다음으로 2차 시도는 반지름이 4B이며 원의 전체 각 360° 중에서 60°에 해당하는 원호의 길이를 고려하는 메커니즘에 대해서 계산한

다. 이 때 메커니즘과 변위도는 그림 22와 같다. 또한 그림 22에 대한 지지력은 다음의 식 (17)과 같다.

$$\begin{aligned}
 W_{int} &= 2\pi \cdot \frac{4B}{6} \cdot c_u \cdot \Delta S \\
 W_{ext} &= 2B \cdot q \cdot \frac{\Delta S}{4} \\
 W_{int} &= W_{ext} \\
 \therefore q &= 2.67\pi c_u \cong 8.4c_u
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

식 (17)에서 보듯이 매우 큰 값이 나타났다. 3차 시도는 그림 23과 같이 반지름이 $2\sqrt{2}B$ 이며 원의 전체 각 360° 중에서 90°에 해당하는 원호의 길이를 고려하는 메커니즘에 대해서 계산한다. 이 때의 지지력은 식 (18)과 같다. 놀랍게도 식 (18)은 1차 시도와 같은 결과임을 알 수 있다. 따라서 각의 변화(180°→60°→90°)에 따라 최적의 UB 메커니즘이 어떤 각 사이에 반드시 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 W_{int} &= 2\sqrt{2} \cdot B \cdot \frac{\pi}{2} \cdot c_u \cdot \Delta S \\
 W_{ext} &= 2B \cdot q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta S}{\sqrt{2}} \\
 W_{int} &= W_{ext} \\
 \therefore q &= 2\pi c_u \cong 6.28c_u
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

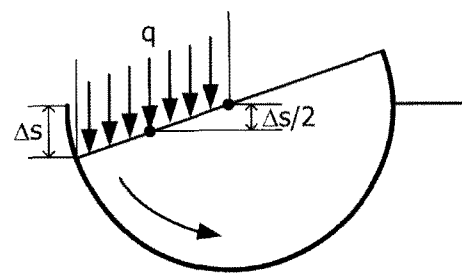
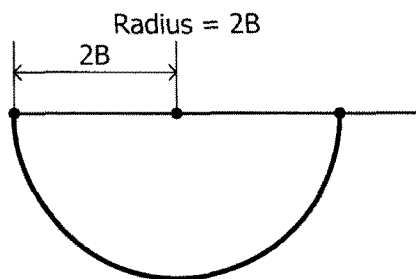


그림 21. 1차 시도 메커니즘(반원 메커니즘)과 변위도

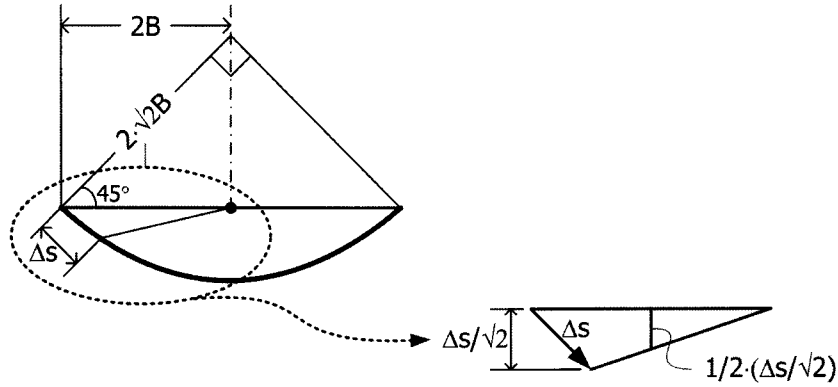


그림 23. 3차 시도 메커니즘과 변위도

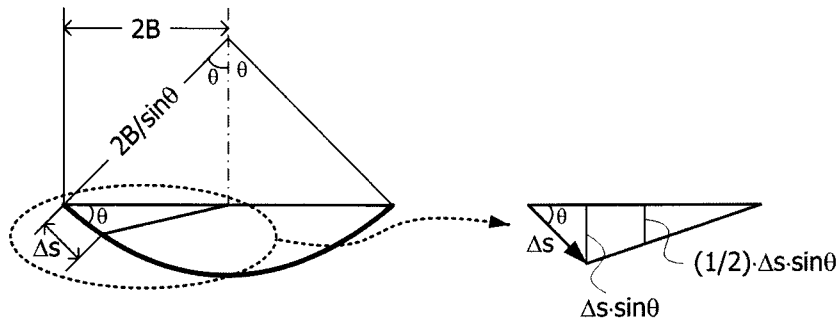


그림 24. theta에 의한 메커니즘과 변위도

최적의 UB 해를 얻기 위해 각도 θ 를 가지는 일반적인 UB 메커니즘과 이에 대한 변위도를 나타내면 그림 24와 같다.

그림 24에 대해 지지력을 계산하면 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned}
 W_{int} &= \frac{2B}{\sin \theta} \cdot 2\theta \cdot c_u \cdot \Delta S \\
 W_{ext} &= 2B \cdot q \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta S \cdot \sin \theta \\
 W_{int} &= W_{ext} \\
 \therefore q &= \frac{4\theta}{\sin^2 \theta} \cdot c_u = N_c \cdot c_u \quad (19)
 \end{aligned}$$

식 (19)를 그래프로 나타내면 그림 25와 같다. 그림 25에서 보는 바와 같이 최적의 UB 해는 θ 가 60° 와 70° 사이에 존재하며 이 때의 UB 값이 최소가 됨을 알 수 있다.

일반적인 토질역학에서는 평형조건을 고려한 원형 메커니즘을 선택하여 지지력을 구하나, 위에서 보는 바와 같이 UB 특성상 지지력을 과대하게 또는 불안정(unsafe)하게 계산하는 경향이 있다. 따라서 비배수 점토지반에서의 UB에 의한 얽은 기초의 정확한 해는 지지력계수 (N_c) 값이 최소가 되는 메커니즘을 항상 구해야 한다.

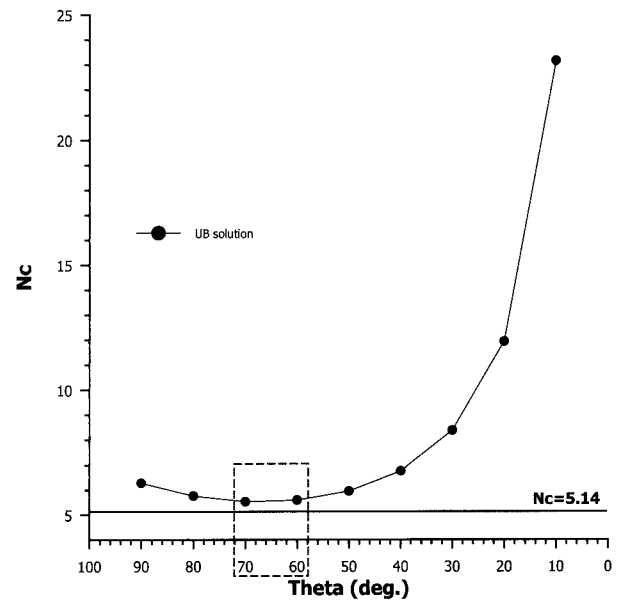


그림 25. theta에 의한 UB의 N_c 값

4. 수치해석

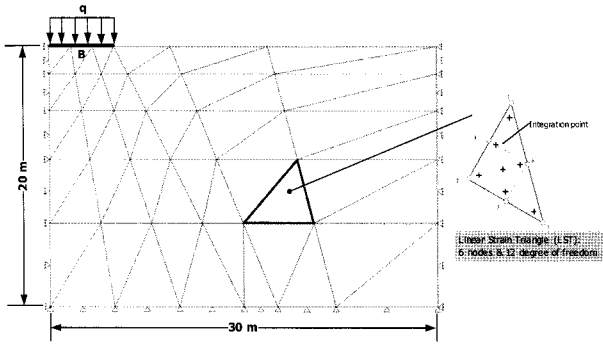
4.1 해석 조건

UB와 LB를 통한 이론적인 해를 CRISP(2007) 프로그램을 사용하는 수치해석과 비교하기 위해 각각 서로 다

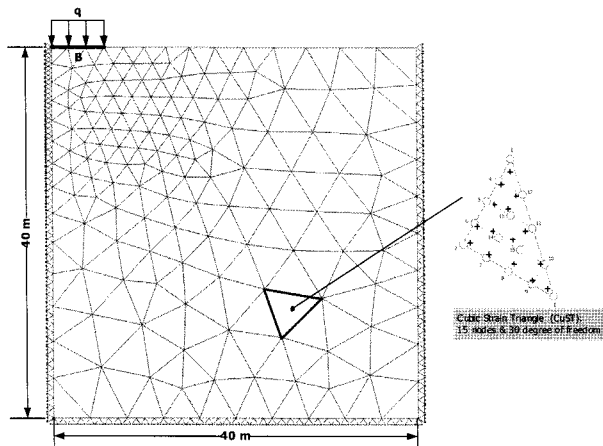
른 유한요소망에 의한 유한요소망을 그림 26에 나타내었다. 그림 26(a)에서는 절점이 6개, 내부 integration 점이 7개, 자유도(degree of freedom)가 12인 linear strain triangle (LST)로 이루어진 유한요소망을 나타내며 기초의 폭(B)은 5m이다. 한편, 그림 26(b)에서는 절점이 15개, 내부

integration 점이 15개, 자유도(degree of freedom)가 30인 cubic strain triangle(CuST)로 이루어진 유한요소망을 나타내며 기초의 폭(B)은 3.76m이다.

평면변형을 조건을 각각의 유한요소망에 공동으로 적용하였다. 또한, 선형탄성-완전소성(linear elastic and perfectly plastic)인 Tresca 모델과 Mohr-Coulomb 모델도 각각의 유한요소망에 적용하고 그 결과를 서로 비교하였다. 비배수 점토의 구성모델에 따른 물성치는 다음의 표 5와 같다.



(a) LST로 구성된 유한요소망(총 절점: 42, 총 요소 수: 60)



(b) CuST로 구성된 유한요소망(총 절점: 162, 총 요소 수: 274)

그림 26. 삼각형 요소에 따른 유한요소망

4.2 해석 결과

각각의 유한요소망에 대한 수치해석 결과를 비교하

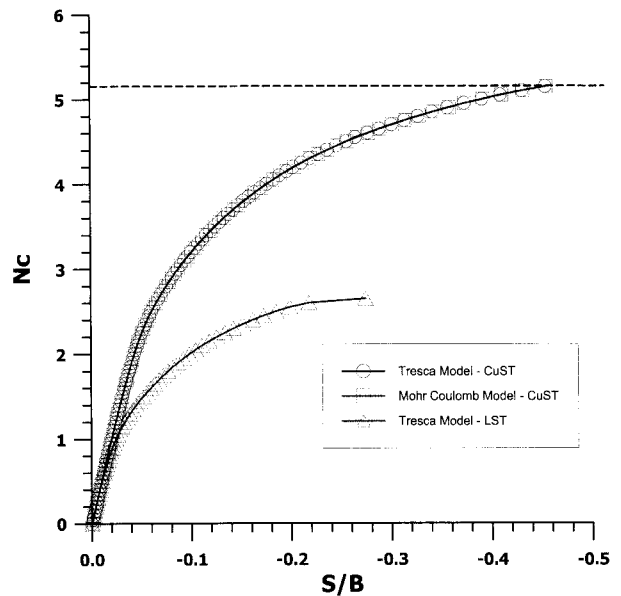
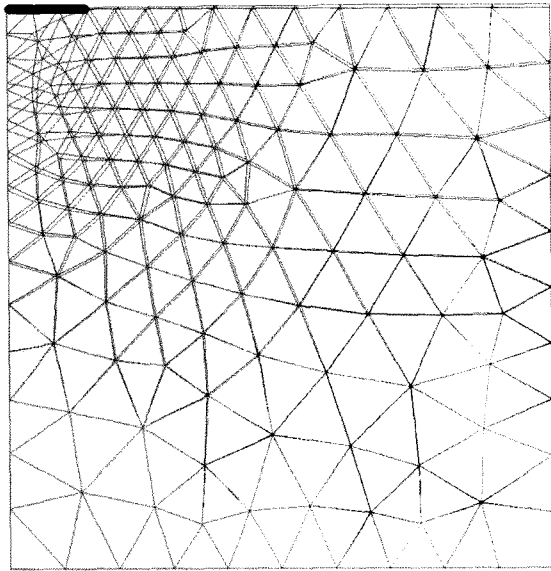


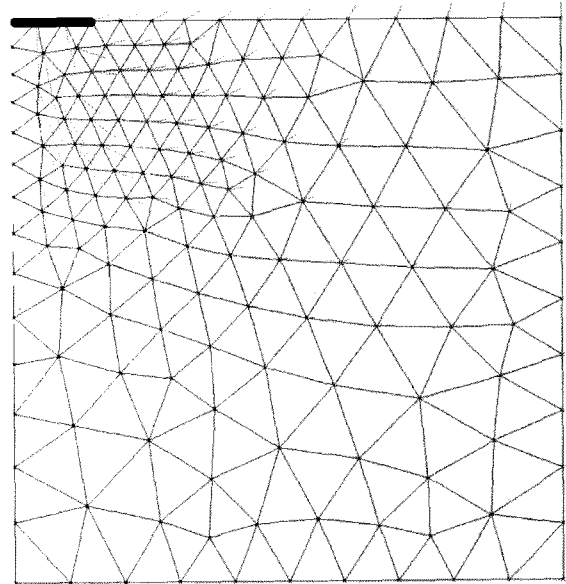
그림 27. 유한요소망에 따른 지지력 계수의 비교

표 5. 구성모델에 대한 물성치

구성모델	Parameters	Value	Unit
Tresca	Young's modulus at reference elevation	6,000	kN/m ²
	Poisson's ratio(ν)	0.3	
	Undrained shear strength(c_u)	50	kN/m ²
	Reference elevation	20	m
	Bulk modulus of water	2.15×10^6	kN/m ³
	Unit weight of soil	16	kN/m ³
Mohr-Coulomb	Poisson's ratio(ν)	0.3	
	Undrained shear strength(c_u)	50	kN/m ²
	Reference elevation	40	m
	Internal angle of friction	0	°
	Angle of dilation	0	°
	Unit weight of soil	16	kN/m ³



(a) 변위형태



(b) 변위벡터

그림 28. 파괴 시에 변위형태 및 변위벡터

면 그림 27과 같다. 그림 27에서 기초 폭을 기초의 침하량으로 나눈 무차원 값을 가로축으로 나타내고 지지력 계수인 N_c 값을 세로축에 나타내었다.

그림 27에서 보듯이 CuST 요소를 포함하는 유한요소망인 경우, Tresca 모델과 Mohr-Coulomb 모델 모두 지지력 계수 5.14에 도달하는 것을 확인하였다. 이와는 대조적으로 LST 요소를 포함하고 Tresca 모델을 적용한 유한요소망인 경우, 지지력 계수가 5.14에 훨씬 못 미치는 결과가 나타났다. 이는 CuST 요소가 high order 요소인데 비해 LST 요소는 절점과 자유도, integration point 수가 적은 low order 요소이기 때문이다. 그리고 기초 부근(모서리를 포함)에서 유한요소의 크기가 큰 요소가 적용되어 기초의 하중으로 인해 급격히 변화하는 응력

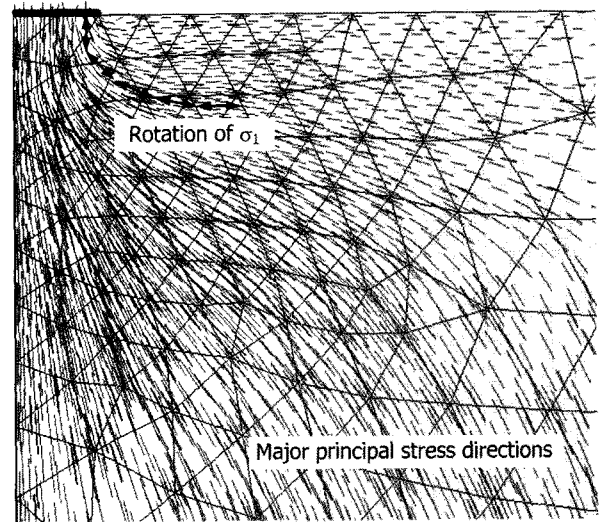
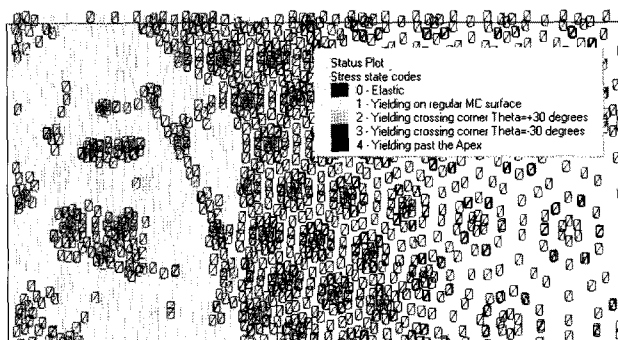
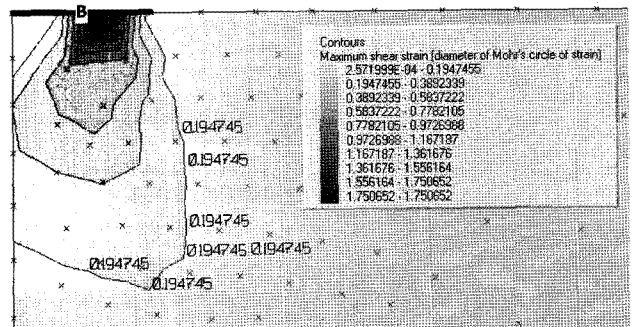


그림 29. 파괴 시 최대주응력 방향



(a) 파괴 시의 응력상태(stress state codes: 0은 탄성상태를 나타내며 1은 Mohr-Coulomb 파괴면에 도달)



(b) 파괴 시의 최대전단변형률

그림 30. 파괴 시 응력상태와 최대전단변형률

변화와 변위를 잘 수용하지 못하기 때문인 것으로 판단되며, 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 보다 작은 유한요소를 기초 부근에 집중적으로 적용시켜 유한요소의 전체 수도 증가시켜야 할 것으로 사료된다.

파괴하중에 도달한 CuST 요소를 포함하는 유한요소망에 대해 파괴 시의 변위형태와 변위벡터를 나타내면 그림 28과 같다. 기초 아래 부분에 침하가 크게 발생하고 따라서 지표면에서 융기가 일어나는 것을 알 수 있다.

LB에서 언급한 최대주응력의 방향을 유한요소해석결과와 비교하면 그림 29에서 보는 바와 같이 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

마지막으로 파괴 시의 응력상태와 최대전단변형률(maximum shear strain)을 그림으로 나타내면 그림 30(a), (b)와 같다. 그림 30(a)에서 보는 바와 같이 기초 바로 아래 부분의 흙은 대부분 파괴에 도달함을 알 수 있다. 한편, 최대전단변형률은 그림 30(b)에서 보듯이 기초의 모서리에 집중됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구를 통해 얻은 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

- (1) 정확한(완전한) 해는 UB와 LB가 서로 일치하는 경우라고 할 수 있다. 그러나 이러한 완전한 해를 현실적으로 구하기는 매우 어려우며 일반적으로 완전한 해는 UB와 LB 사이에 존재한다고 볼 수 있다.
- (2) 한 점에서 응력평형조건을 만족하는 LB의 경우, 응력불연속면을 기준으로 최대주응력 방향이 변화된다는 가정하에 성립된다.

- (3) LB의 응력장(stress field)에서 FAN을 도입하면 정확한 해를 구할 수 있다. 이러한 LB의 해는 안전한 해(safe solution)를 의미한다.
- (4) 메커니즘과 가상의 일에 근간을 두는 UB는 LB의 응력장과 관련해서 UB 메커니즘을 설정하는 것이 유용하다.
- (5) 일반적인 토질역학에서는 평형조건을 고려한 원형 메커니즘을 선택하여 비배수 점토지반의 지지력을 구하나, UB 특성상 지지력을 과대하게 또는 불안정(unsafe)하게 계산하는 경향이 있다. 따라서 UB에 의한 얇은 기초의 정확한 해는 지지력계수(N_c) 값이 최소가 되는 메커니즘을 항상 구해야 한다.
- (6) 복잡한 지층조건이나 흙-구조물 상호거동에 대해서는 유한요소해석을 통해 쉽게 접근할 수 있으나, 해석 결과의 신뢰성을 높이기 위해서는 사용하는 유한요소(finite element)의 특징과 수 그리고 증분수(number of increments)에 신중을 기해야 한다.

참 고 문 헌

1. Atkinson, J. H. (1981), *Foundations and Slopes*, McGraw-Hill, UK.
2. Chen, W. F. (1975), *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam.
3. Davis, R. O. and Selvadurai, A. P. S. (2002), *Plasticity and Geomechanics*, Cambridge Univ. Press.
4. Potts, D. M. and Zdrakovic, L. (1999), *Finite element analysis in geotechnical engineering - Theory*, Thomas Telford.
5. Prandtl, L. (1921), Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe Und die Festigkeit von Schneiden. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1(1), pp.15-20.
6. Woods, R. and Rahim, A. (2007), *CRISP 2D - Technical Reference Manual*, The CRISP Consortium Limited.

(접수일자 2011. 1. 6, 심사완료일 2011. 4. 28)