한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제2호 (2011년 5월), 31–46

# 유클리드의 분할론(περί διαιρέσεων βιβλίον)에 대하여

## About the Euclid's book on divisions of figures

도종훈 Jonghoon Do

유클리드의 저작 중 원론을 제외한 다른 저작들은 상대적으로 널리 알려지지 않았고 이들 저작에 관한 연구 역시 충분히 이루어지지 않았다. 이 글에서는 유클리드의 저작 중 하나인 분할론을 그 역사와 함께 소개하고, 분할론이 어떤 내용으로 어떻게 구성되어 있는지 분석한 후, 분할론의 수학교육적인 의의와 활용 방안에 대하여 간략히 살펴본다.

《On divisions of figures(περί διαιρέσεων βιβλίον)》 is one of the works written by Euclid, but little known to us. In this paper, we introduce this Euclid's book on divisions of figures with its brief history, analyse its contents, and discuss how to use it in mathematics education.

*Keywords:* 유클리드(Euclid), 분할론(On divisions of figures)

## 1 들어가는 글

학교수학에서 다루는 기하 영역 내용의 상당 부분은 유클리드의 원론(the Elements)에 그 기반을 두고 있다. 많은 연구자들이 유클리드 원론의 수학교육적인 의미와 시사점을 연구해왔고 원론의 한글 번역본도 출판되어 있어, 중학교 이상 수준의 수학을 공부한 바 있는 사람이라면 유클리드와 원론을 거의 동일시하여 기억하고 있을 만큼 원론은 많은 사람들에게 널리 알려져 있다. 유클리드는 원론 이외에도 자료론(the Data), 분할론(on divisions of figures), 광학(the Optics), 천문현상론(the Phenomena), 오류론(the Pseudaria), 계론(the Porisms), 원추곡선론(the Conics), 곡면자취론(the Surface-Loci), 음악의 원리(the Elements of music) 등 적어도 9권 이상의 저술을 더 남긴 것으로 알려져 있다[10, 11, 13, 15].[1] 그러나 이 저작들은 원론에 비해 상대적으로 널리 알려지지 않았고 관련 연구 또한 풍부하지 않은데, 이러한 사정은 국내의 수학 및 수학교육

---

MSC: 9703 ZDM: G43, G49
제출일: 3월 21일 수정일: 5월 16일 게재확정일: 5월 19일

1) 이들 중 자료론, 분할론, 광학, 천문현상론은 원론과 마찬가지로 그 내용이 오늘날까지 거의 온전하게 전해 내려오고 있다. 그러나 오류론, 계론, 원추곡선론, 곡면자취론, 음악의 원리는 대부분 분실되었고 후세의 주석에 의해서만 그 존재 및 내용의 일부가 알려져 있을 뿐이다.

연구에서도 크게 다르지 않다. 실제로 원론에 관한 국내의 수학교육적 연구는 다수 있지만[1, 2, ?], 원론 이외의 다른 저작과 관련해서는 자료론의 수학적인 의미와 내용 구성, 형식 체계 등을 분석한 연구[5, p.25] 이외에 관련 연구를 극히 찾아보기 어려워 이에 관한 연구가 필요한 실정이다.

유클리드의 저작 중 분할론은 평면도형의 분할에 관한 36개의 명제를 담고 있는 작품으로서, 첫 번째 명제는 삼각형이 하나 주어져 있을 때 주어진 삼각형의 한 변과 평행하면서 그 삼각형을 이등분하는 직선을 작도하는 것이고 마지막 36번째 명제는 사각형이 하나 주어져 있을 때 이 사각형의 한 변 위에 놓인 임의의 점을 지나면서 주어진 사각형을 주어진 비율로 분할하는 직선을 작도하는 것이다. 분할론의 그리스어 원본은 남아 있지 않으며, 다만 1915년 영국 브라운 대학의 Raymond Clare Archibald 교수가 이전의 여러 기록들을 분석하여 복원한 원고를 통해 오늘날까지 전해지고 있다.[13, 14, 15, 17] 이 글에서는 분할론이 그리스어로 쓰인 원본 없이 오늘날까지 전해지게 된 역사적 과정을 간략하게 살펴보고, Archibald의 원고에 기초하여 분할론에 제시되어 있는 36개의 명제가 어떤 내용으로 어떻게 구성되어 있는지 분석한 후, 분할론이 수학교육적으로 어떤 의의와 가치를 지니는지 간략하게 살펴본다.

## 2 도형의 분할 문제와 분할론의 역사

### 2.1 분할론의 저술 동기에 대한 몇 가지 추측

분할론에는 원론과 달리 공리나 공준, 정의가 전혀 제시되어 있지 않으며 36개의 명제와 그 증명만으로 내용이 구성되어 있다. 더구나 이 명제들은 대부분 원론의 4권으로부터 유도될 수 있는 것들이고, 실제로 보조정리로 사용되는 몇몇 명제들은 원론 4권과 6권의 내용 중 일부이다. 이처럼 불과 36개의 명제로 구성된 이 소책자를 유클리드가 어떤 이유로 집필하였는지는 명확하게 알려져 있지 않으며, 다만 몇몇 학자들에 의해 그럴듯한 추측들이 제시한 바가 있다. 그 중 Aboav[7]는 유클리드가 분할론을 쓰게 된 동기를 당시에 사용되던 동전의 한 면에 그려진 그림과 관련지어 추측하였는데, 그는 유클리드가 분할론을 집필하게 된 동기를 마지막 명제인 명제 36에서 찾고 있다.

> 명제 36. 지금까지 제시된 문제들을 모두 해결했으므로 이제 다음 문제를 해결할 수 있다. 임의로 주어진 사각형에 대하여 이 사각형의 네 변 중 한 변위에 임의로 주어진 점을 지나는 하나의 직선 혹은 여러 개의 직선을 그려 주어진 사각형을 주어진 비 혹은 주어진 비들로 분할하라.

기원전 5세기경 그리스의 Aegina 지역에서 사용되던 동전의 한 쪽 면에 그려진 그림(diagram)은 분할론의 명제 36에 의해 쉽게 작도될 수 있는데, Aboav[7]에 의하면 유클리드는

의도적으로 분할론의 36개 명제를 명제 36이 맨 마지막에 오도록 구성하였고, 따라서 유클리드는 그 동전에 그려진 도안을 염두에 두고 있었을 가능성이 있다는 것이다. 어느 시대를 막론하고 화폐의 역할은 중요하고, 화폐를 정교하게 제작하는 것 또한 중요한 문제이다. 그러므로 화폐에 들어가는 도안을 정확하게 그리는 방법에 대한 논의는 반드시 필요하고, 이러한 점에서 Aboav[7]의 추측은 어느 정도의 개연성을 갖추고 있다고 할 수 있다. 실제로 이와 관련하여 Artmann[9]은 기원전 4세기경에 그리스의 Aegina 지역에서 사용된 동전 한 쪽 면에 원론 2권의 명제 4에서 다루는 도형(즉, 6개의 영역으로 나뉜 정사각형)과 유사한 그림이 그려져 있었음을 지적한 바 있다.

한편, Archibald[8]는 분할론이 사람들의 관심을 끈 것은 여러 가지 모양의 토지를 분할하는 데에 분할론에 제시된 명제들이 실제로 유용하게 활용될 수 있기 때문이라고 보았다. 린드 파피루스에 기록된 내용을 통해 짐작할 수 있듯이 여러 가지 모양의 토지의 넓이를 계산하는 문제는 이미 기원전 1800년경에 경험적인 방법으로 다루어졌고, 기원전 1세기경에는 알렉산드리아의 헤론이 입체와 평면 도형을 분할하는 문제를 다룬 바 있다는 것이다. 이처럼 Aboav[7]와 Archibald[8]가 분할론의 집필 동기를 실용적인 목적과 관련지어 추측하였다고 한다면, Favaro[12]는 분할론에 제시된 명제들이 실용적으로 필요한 것들이기도 하지만 그와 동시에 순수하게 기하 문제 풀이에 관심 있는 사람들에게 여러 가지 연습문제를 모아 놓은 문제집으로서의 역할을 한 것으로 보았다([7]에서 재인용).

## 2.2 도형의 분할 문제를 다룬 그리스의 수학자

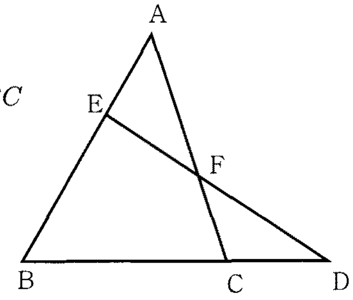
유클리드 이외에도 헤론은 자신의 저서 《Surveying($\mu\epsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\alpha}$)》에서 입체와 평면 도형을 분할하는 문제를 다룬 바 있고, 아폴로니우스와 파푸스 역시 이와 관련된 문제를 다루었던 것으로 알려져 있는데, 이하에서는 이를 보다 자세하게 살펴보도록 하겠다[8].[2)]

헤론이 《Surveying($\mu\epsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\alpha}$)》에서 다룬 문제들은 전체적으로 유클리드의 분할론과 내용 면에서는 유사한 반면 내용의 진술 방식 면에서 큰 차이가 있었는데, 헤론의 경우 유클리드와는 달리 거의 모든 문제를 분석(analyses)과 근사(approximations)의 방법으로 접근하였다는 점이다. 예를 들어 "삼각형이 하나 주어져 있을 때, 이 삼각형의 한 변과 평행한 직선을 그려 삼각형을 주어진 비로 분할하라."는 문제에 대해 유클리드는 일반적인 작도법을 제시한 반면, 헤론은 면(surface)이 고르지 못할 경우 주어진 직선과 평행한 직선을 긋는 것이 어려우므로 주어진 삼각형의 각 변들이 특정한 수치를 길이로 갖는다고 보고 이에 따라 작도하기를 원하는 평행선이 삼각형의 변들과 만나는 점과 꼭짓점 사이의 근사 거리를 구하는 방식으로 논의를 전개하였다는 것이다. 물론 헤론이 대부분의 문제들을 다룰 때에 여러 가지의 구체적인 수치를 가정하고 논의를 전개하였다고 해서 이론적인 분석이 전혀

2) 이 절의 내용은 Archibald[8]에 제시된 내용을 간략하게 정리한 것이다.

없었던 것은 아닌데, 이는 명제 X "삼각형이 하나 주어져 있을 때, 이 삼각형의 한 변의 연장선 위의 한 점을 지나면서 삼각형을 주어진 비로 분할하는 직선을 작도하라."에 대한 다음 풀이의 사례를 통해 확인할 수 있다.

> 삼각형을 주어진 비로 분할하였다고 가정하자.[3] 그러면 삼각형 $AEF$와 삼각형 $FEBC$ 사이의 비가 결정되고, 삼각형 $ABC$와 삼각형 $AEF$ 사이의 비도 결정된다. 그런데 삼각형 $ABC$의 넓이는 이미 주어져 있으므로, 삼각형 $AEF$의 넓이도 알 수 있다. 한편, 변 $BC$의 연장선 위의 점 $D$는 주어진 점이므로, $D$를 지나면서 삼각형 $AEF$의 넓이가 주어진 넓이가 되도록 하는 직선이 결정된다. 따라서 두 점 $E$, $F$가 결정된다. 구체적인 방법은 《On Cutting off a Space》의 제2권에 제시되어 있다. 따라서 원하는 증명이 이루어졌다. 점 $D$가 다른 곳에 있어도 마찬가지이다.




한편, 위에 제시된 명제 X의 풀이 과정에 《On Cutting off a Space》이라는 저작이 언급되어 있음을 확인할 수 있는데, 헤론이 이 저작의 저자가 누구인지 직접 언급하지는 않았지만, 《On Cutting off a Space》가 아폴로니우스의 잃어버린 저작 중 하나라는 것이 알려져 있고, 이러한 점에서 아폴로니우스 역시 도형의 분할 문제를 다루었음을 추측할 수 있다. 파푸스에 따르면 이 저작은 두 권의 책으로 구성되어 있고 다음 문제에 대한 여러 가지 경우를 다룬 124개의 명제들로 구성되어 있다.

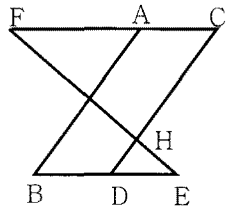
> 한 평면 위에 두 점 $A_1$, $B_2$을 각각 지나는 직선 $A_1P_1$, $B_2P_2$가 주어져 있을 때, 그 평면 위에 주어진 임의의 점 $D$를 지나고 두 직선 $A_1P_1$, $B_2P_2$과 각각 $F$, $E$에서 만나면서 $\overline{A_1F}\cdot\overline{B_2E}$가 주어진 어떤 직사각형의 넓이와 같아지도록 하는 직선 $DEF$를 그려라.

위 문제의 특수한 경우로서 $A_1$과 $B_2$를 같은 점 $A$라 하고 두 점 $P_1$, $P_2$를 각각 $B$, $C$라 하면 문제 상황은 앞에서 예로 든 명제 X의 상황과 유사하며, 나아가 점 $D$의 위치를 달리하게 되면 분할론의 명제 3, 19, 20, 26, 27의 상황과 일치하게 된다.

한편, 고대 그리스 수학자 중에 아폴로니우스 이외에도 파푸스가 이와 같은 도형의 분할문제를 언급한 바 있는데, 파푸스는 유클리드의 유실작 중 하나인 계론(the Porisms)의 171개 정리와 관련된 보조정리 38개를 제시하였고, 다음은 그 중 마지막 보조정리이다.

3) 그림으로 주어진 도형의 꼭짓점을 나타내기 위해 쓰인 문자는 독해의 편의를 위해 다소 수정하였는데, 원래 그림에서는 C, D, F 대신에 각각 그에 해당하는 그리스어 Γ, Δ, Z가 사용되었다.

평행사변형 ABDC의 변 BD의 연장선 위에 주어진 임의의 점 E에 대하여 점 E를 지나면서 삼각형 FCH의 넓이가 평행사변형 ABDC와 같도록 평행사변형 AD를 분할하는 직선을 그려라.




이처럼 도형의 분할 문제를 다룬 역사는 고대 문명 지역에서부터 고대 그리스의 유클리드, 아폴로니우스, 헤론, 파푸스 등 다양하지만, 현재까지 알려진 그리스 문헌에 의하면 고대 그리스인들 중에서 유클리드의 저작인 분할론 자체에 대해 직접적인 언급을 한 사람은 주석가 프로클루스 뿐인 것으로 알려져 있다. 그는 도형의 분할과 관련하여 어떤 도형을 자신과 같은 종류 혹은 다른 종류의 부분들로 분할하는 것에 대해 다음과 같은 언급을 하였다.

> "원은 자신과 종류가 다른(unlike) 부분들로 분할될 수 있고 직선으로 둘러싸인 도형들 역시 마찬가지이다. 원론의 저자(유클리드)가 분할론에서 했던 일이 바로 이런 것이다. 유클리드는 주어진 도형을 어떤 경우에는 자신과 같은 종류의(like) 부분들로, 또 어떤 경우에는 자신과 다른 종류의(unlike) 부분들로 분할하고 있다."

분할론에 대해 그리스 문헌으로부터 얻을 수 있는 직접적인 언급은 위의 내용이 전부이고, 그리스어로 쓴 분할론 원본은 아직까지 발견되지 않았다.

## 2.3 분할론의 복원

그리스어로 쓴 분할론 원본은 아직까지 발견되지 않았지만, 그 대신 아랍어 번역본이 발견되고, 이것이 다시 라틴어로 번역되는 등의 과정을 통해 오늘날에까지 전해지게 되었다. 이하에서는 이 과정을 좀 더 구체적으로 살펴보도록 하겠다.[8, 13, 14, 15, 17, 18]

앞서 언급한 바와 같이 분할론은 오랫동안 프로클루스의 주석을 통해서만 그 존재가 알려져 있다가 John Dee[4]에 의해 아랍어 사본이 발견되었고, 1570년 John Dee와 Federico Commandino[5]에 의해 라틴어 번역본이 출판되었다.[6] 그 후 Franz Woepcke[7]는 프랑스

4) John Dee(1527–1609)는 영국의 저명한 수학자이자 천문학자로서 엘리자베스1세 여왕의 고문이기도 했다.[16]([19]에서 재인용)

5) Federico Commandino(1509–1575)는 이탈리아 태생의 수학자이자 인문주의자로서 아르키메데스의 저작물들을 출판하였고, 그 이외에도 아리스타르쿠스(Aristarchus)의 '태양과 달의 질량과 거리에 관하여(On the masses and distances of the Sun and the Moon),' 파푸스(Pappus)의 '수학집성(Mathematical collection),' 헤론(Hero)의 '기력학(Pneumatics),' 유클리드(Euclid)의 '원론' 등 고대 수학자들의 저작을 다수 번역하였다[20].

6) 1563년 John Dee가 Urbino에 있던 Commandino를 방문하였을 때 Muhammed Bagdedinus가 쓴 'De superficierum divisionibus' 의 라틴어판 사본을 Commandino에게 건네주었고, 1570년에 Commandino는 이것을 Dee와 자신의 이름으로 이탈리아어 판과 함께 출판하였다.[8]

7) Franz Woepcke(1826–1864)는 독일의 수학자이자 동양학자로서 아랍어로 된 수많은 수학 저술들을 번역한

파리에서 아랍어로 쓰인 또 다른 원고를 발견하였고 이를 프랑스어로 번역하여 1851년 The Journal Asiatique에 "Notice sur des traductions Arabes de deux ouverages perdus d'Euclide"의 제목으로 게재하였다. 다음은 그의 원고 내용의 일부이다.

> "이 원고는 유클리드로부터 기인한 것이 분명하고 프로클루스의 설명과도 일치한다. 여기서 분할은 주어진 도형을 그것과 같은 종류의 도형들로 분할하는 것, 이를테면 주어진 삼각형을 삼각형들로 분할하는 것을 의미한다. 물론 주어진 도형을 그 도형과 종류가 다른(unlike) 도형들로 분할하는 경우, 이를테면 주어진 삼각형을 그 삼각형의 밑변과 평행한 직선으로 (삼각형과 사각형으로) 분할하는 경우도 포함한다. 그리고 원의 분할에 관한 명제들도 있는데, '원호와 두 직선으로 둘러싸인 영역을 넓이가 같은 두 부분으로 분할하는 것'과 '주어진 원에 서로 평행한 두 직선을 작도하여 주어진 원의 1/3이 되도록 분할하는 것'이 그것이다. 그러나 불행하게도 이들 36개의 명제 중에서 4개에 대해서만 증명이 제시되어 있는데, 이는 아랍어 사본의 저자가 그 증명들이 너무 쉽다고 판단하여 생략했기 때문이다.[8)]"

이처럼 서로 다른 두 학자 Dee와 Woepcke에 의해 아랍어 사본이 각각 발견되어 번역되고 출판되었지만, 이들 두 원고 중 Dee의 원고는 분할론의 전체 내용 중 일부분만 담은 불완전한 원고인 반면 Woepcke가 번역하여 출판한 원고는 유클리드가 저술한 분할론 원본과 거의 일치하며, 매우 잘 정리되고 완비된 작품으로 평가받고 있다.[9)] 실제로 Dee의 원고에 제시된 명제들 중 상당수가 Woepcke의 원고에 제시된 명제들과 유사하지만, 몇몇 명제들은 Woepcke의 원고에만 제시되어 있고 Dee의 원고에서는 언급조차 되지 않은 경우도 있다.[10)]

---

것으로 알려져 있다[21].

8) 이러한 증명의 생략은 원본 자체가 그런 것이 아니라 번역자에 의한 것이라는 것을 다음 두 가지 방식으로 설명할 수 있다고 한다[8]. 첫째는 아랍어 사본에 제시된 36개의 명제 중에는 5개의 보조 명제(Woepcke 21, 22, 23, 24, 25)가 포함되어 있는데, 증명이 원래부터 없었다면 이러한 보조 명제가 소개될 필요도 없었을 것이라는 점이고, 둘째는 사본의 내용(Woepcke 5) 중에 "... 중략 ... 앞에서 했던 작도와 유사한 작도를 통해 이 삼각형을 분할한다."라는 내용이 있는데, 사본의 내용 중에 그런 작도는 어디에도 주어져 있지 않아 누군가가 의도적으로 증명을 생략하였음을 짐작할 수 있다는 것이다.

9) Dee의 원고에 기초하여 분할론을 복원한 책자로 Ofterdinger의 "Beitrdge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides iiber der Theilung der Figuren"이 있는데, Archibald[8]는 이 책자가 근거를 두고 있는 Dee의 원고 자체가 불완전한 것이기 때문에 이 책자를 분할론 원본의 '복원(Wiederherstellung)'이라고 일컫는 것은 그 이름이 잘못 붙여진 것이라고 하면서, 제목을 "A translation of the Dee tract with indications in notes of a certain correspondence with 15 of Woepcke's propositions, the whole concluding with a translation of the enunciations of 16 of the remaining 21 propositions of Woepcke not previously mentioned."으로 바꾸는 것이 보다 적절하다고 보았다.

10) Dee의 원고에 제시된 명제 중 Woepcke의 원고에 제시된 명제와 내용이 유사한 것들을 살펴보면, Dee 3은 Woepcke 30, Dee 7은 Woepcke 34, Dee 9는 Woepcke 36, Dee 12는 Woepcke 32와 그 내용이 일치하고, 이들 각 명제의 특수한 경우를 다룬 명제로서 Woepcke 1, Woepcke 14, Woepcke 16, Woepcke 4가 Woepcke의 원고에는 제시되어 있다. 그 밖에 Woepcke 3은 Dee 2의 특수한 경우를 다룬 명제이고,

한편, Woepcke의 원고와 함께 살펴보아야 할 작품으로 피보나치 수열로 우리에게 널리 알려진 Leonardo의 실용기하학(Practica Geometriae)을 들 수 있다. 13세기 수학사에서 중요한 위치를 차지하고 있는 Leonardo는 1220년에 실용기하학(Practica Geometriae)을 집필했고, 이 원고는 현재 바티칸 도서관에 소장되어 있다.[11] 실용기하학의 내용 중에서 Ⅱ장은 도형의 분할과 관련된 명제와 그 증명, 그리고 수많은 예들로 구성되어 있는데, 그 중 3, 10, 51, 57번 명제가 Woepcke의 19, 20, 29, 28번 명제와 그 진술과 증명이 모두 일치하고, Woepcke의 명제 중에서 최소한 22개의 명제가 실용기하학에 제시된 명제와 그 진술 면에서 사실상 동일하며, 이들 22개 명제에 대한 Woepcke의 풀이 중에서 8개 이상은 실용기하학에 제시된 방법에 의해 곧바로 얻어지거나 쉽게 유도될 수 있는 것들이다. 이처럼 Woepcke와 Leonardo의 작품은 매우 유사하고, Woepcke의 원고에 제시된 명제들뿐 아니라 증명과 보조정리들까지도 사실상은 실용기하학에도 비슷하게 제시되어 있다는 것이다.[12]

영국 브라운 대학의 Raymond Clare Archibald 교수는 Woepcke의 프랑스어 번역본과 Leonardo의 실용기하학에 실려 있는 증명과 작도를 재현하여 유클리드의 분할론에 대한 복원작 "Euclid's Book on Divisions of Figures with a restoration based on Woepcke's text and on the Practica Geometrioe of Leonardo Pisano"를 1915년에 출판하였다.[13]

## 3 분할론의 내용 분석

이 장에서는 Archibald의 원고[8]에 기초하여 분할론에 제시된 36개의 명제와 그 구성 방식을 보다 구체적으로 살펴보고, 이들 내용의 특징을 주어진 도형을 주어진 조건에 따라 분할하는 직선의 작도가능성과 존재성 및 유일성의 관점에서 살펴본다.

### 3.1 분할론에 제시된 36개의 명제

앞서 언급한 바와 같이 분할론은 평면도형의 분할에 관한 36개의 명제를 담고 있는데, 이들 명제의 대부분은 주어진 평면 도형을 주어진 비(의 면적을 갖는 부분)로 분할하는 직선의

Woepcke 6, 7, 8, 9는 Dee 8에 의해 해결될 있는 명제들이다. 그러나 Woepcke 30, 31, 34, 35, 36의 경우 Dee의 원고에서는 언급조차 되지 않고 있다[8].

11) 여러 저술가들이 이 책을 알고 또 사용하기도 했지만, 650여 년 동안 출판되지 않고 있다가 1862년에 비로소 Prince Boncompagni에 의해 출판되었다[8].

12) 다음은 Woepcke의 명제 번호와 그에 해당하는 Leonardo의 명제 번호를 괄호 안에 나타낸 것이다[8]. 1(5); 2(14); 3(2, 1); 4(23); 5(33); 6(16); 7(20); 8(27); 9(30, 31); 10(18); 11(없음); 12(28); 13(32); 14(36); 15(40); 16(37); 17(39); 18(없음); 19(3); 20(10); 21(없음); 22(없음); 23(없음); 24(없음); 25(없음); 26(4); 27(11); 28(57); 29(51); 30(없음); 31(없음); 32(29); 33(35); 34(40); 35(없음); 36(없음).

13) Archibald가 유클리드의 분할론을 복원한 방식은 다음과 같다고 한다[8]. 먼저 Woepcke의 원고에 있는 내용 전부를 그가 쓴 주석을 포함하여 그대로 번역하여 따옴표로 묶었고, 이 중 Leonardo의 실용기하학에 제시된 것과 일치하는 모든 문장 및 진술에 대해서는 Leonardo가 제시한 작도와 증명을 그림(도형)에 쓰인 문자들까지 그대로 함께 제시하였다.

작도에 관한 것이다. 분할론에 제시되어 있는 36개의 명제는 다음과 같다[8].

[명제 1] 삼각형이 하나 주어져 있다. 한 변과 평행하면서 주어진 삼각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 2] 삼각형이 하나 주어져 있다. 한 변과 평행하면서 주어진 삼각형을 3등분하는 직선 2개를 작도하여라.

[명제 3] 삼각형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 삼각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 4] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 평행하면서 주어진 사다리꼴을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 5] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 평행하면서 주어진 사다리꼴을 3등분하는 직선 2개를 작도하여라.

[명제 6] 평행사변형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 평행사변형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 7] 평행사변형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 평행사변형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 8] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 윗변 중 긴 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 사다리꼴을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 9] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 윗변 중 긴 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 사다리꼴을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 10] 평행사변형이 하나 주어져 있다. 평행사변형 외부의 한 점을 지나면서 주어진 평행사변형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 11] 평행사변형이 하나 주어져 있다. 평행사변형 외부의 한 점을 지나면서 주어진 평행사변형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 12] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 윗변 중 긴 변이 아닌 변 혹은 나머지 두 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 사다리꼴을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 13] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 이 사다리꼴의 내부나 외부에 있는 임의의 점에 대하여 이 점을 지나고 또한 아랫변과 윗변을 모두 지나면서 주어진 사다리꼴을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 14] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 꼭짓점을 지나면서 주어진 사각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 15] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 꼭짓점을 지나면서 주어진 사각형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 16] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 사각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 17] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 사각형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 18] 가로와 세로가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$인 직사각형을 어떤 정사각형만큼 모자라도록 선분 $\overline{AB}$에 적용하여라.

[명제 19] 삼각형이 하나 주어져 있다. 이 삼각형 내부의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 삼각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 20] 삼각형이 하나 주어져 있다. 이 삼각형 내부의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 삼각형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 21] 네 선분의 길이를 각각 $a, b, c, d$라고 할 때, $ad > bc$이면 $a : b > c : d$이다.

[명제 22] 네 선분의 길이를 각각 $a, b, c, d$라고 할 때, $ad < bc$이면 $a : b < c : d$이다.

[명제 23] 두 직선 $AB$, $DE$와 직선 $AB$ 위의 점 $C$, 직선 $DE$ 위의 점 $Z$에 대하여 $\overline{AB} : \overline{BC} > \overline{DZ} : \overline{EZ}$이면 $\overline{AC} : \overline{CB} > \overline{DZ} : \overline{ZE}$이다.

[명제 24] 두 직선 $AB$, $DE$와 직선 $AB$ 위의 점 $C$, 직선 $DE$ 위의 점 $Z$에 대하여 $\overline{AC} : \overline{CB} > \overline{DZ} : \overline{ZE}$이면 $\overline{AB} : \overline{BC} > \overline{DE} : \overline{EZ}$이다.

[명제 25] 두 직선 $AB$, $DE$와 직선 $AB$ 위의 점 $C$, 직선 $DE$ 위의 점 $Z$에 대하여 $\overline{AB} : \overline{BC} < \overline{DE} : \overline{EZ}$이면 $\overline{AC} : \overline{CB} < \overline{DE} : \overline{EZ}$이다.

[명제 26] 삼각형이 하나 주어져 있다. 이 삼각형 외부의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 삼각형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 27] 삼각형이 하나 주어져 있다. 이 삼각형 외부의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 삼각형을 $\frac{m}{n}$ 만큼(원하는 비율만큼) 잘라내는 직선을 작도하여라.

[명제 28] 원호와 두 직선으로 둘러싸인 도형을 이등분하는 직선을 작도하여라.

[명제 29] 원이 하나 주어져 있다. 이 원을 임의로 주어진 비율만큼 잘라내는 평행한 두 직선을 작도하여라.

[명제 30] 삼각형이 하나 주어져 있다. 한 변과 평행하면서 분할되는 두 부분의 넓이의 비가 $m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 직선을 작도하여라.

[명제 31] 삼각형이 하나 주어져 있다. 한 변과 평행하면서 분할되는 각 부분의 넓이의 비가 $k:m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 두 직선을 작도하여라.

[명제 32] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 평행하면서 분할되는 두 부분의 넓이의 비가 $m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 직선을 작도하여라.

[명제 33] 사다리꼴이 하나 주어져 있다. 아랫변과 평행하면서 분할되는 각 부분의 넓이의 비가 $k:m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 두 직선을 작도하여라.

[명제 34] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 꼭짓점을 지나면서 분할되는 두 부분의 넓이의 비가 $m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 직선을 작도하여라.

[명제 35] 사각형이 하나 주어져 있다. 한 꼭짓점을 지나면서 분할되는 각 부분의 넓이의 비가 $k:m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 두 직선을 작도하여라.

[명제 36] 지금까지 제시된 문제들을 모두 해결했으므로 이제 다음 문제를 해결할 수 있다. 사각형이 하나 주어져 있다. 한 변 위의 임의의 점에 대하여 이 점을 지나면서 분할되는 각 부분의 넓이의 비가 $m:n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 직선, 그리고 분할되는 각 부분들의 넓이의 비가 $k : m : n$이(원하는 비만큼) 되도록 하는 두 직선을 작도하여라.

이상에서 알 수 있듯이 36개 명제들 중에서 6개의 명제(명제 18, 21, 22, 23, 24, 25)를 제외한 30개의 명제들은 모두 주어진 도형을 어떤 조건을 만족하도록 분할하는 직선을 작도하는 문제로서,[14] 이때 주어지는 도형은 삼각형, 사다리꼴, 평행사변형, 일반적인 (볼록) 사각형, 원, 원호와 두 직선으로 둘러싸인 영역 등이고, 이들 도형의 한 꼭짓점 혹은 한 변이나 원호 위, 도형의 내부, 외부 등에 놓인 점을 지나거나 주어진 도형의 한 변과 평행하면서

14) 이들 6개의 명제 즉, 명제 18, 21, 22, 23, 24, 25는 각각 이들 이후에 제시되는 명제에 대한 보조 정리의 역할을 한다.

표 1: 분할론에 제시된 30개 명제의 분류 (표에 제시된 숫자는 명제의 번호임)

| 직선의 조건 / 주어진 도형 | | 주어진 점을 지나면서 | | | | 한 변과 평행하면서 | 서로 평행한 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 꼭짓점 | 도형 위(변, 호)의 점 | 내부의 점 | 외부의 점 | | |
| 삼각형 | | (3) | 3 | 19,20 | 26,27 | 1,2,30,31 | 2 |
| 사각형 | 평행사변형 | (6,7) | 6,7 | (10,11) | 10,11 | | |
| | 사다리꼴 | (8,9,12) | 8,9,12 | 13 | 13 | 4,5,32,33 | 33 |
| | 일반사각형 | 14,15, 34,35 | 16,17,36 | | | | |
| 원호와 두 직선으로 둘러싸인 영역 | | | (28) | | | | |
| 원 | | | | | | | 29 |

주어진 도형(의 넓이)을 적당한 비율로 분할하는 직선을 작도하는 문제임을 알 수 있다. 이러한 점에서 분할론에 제시된 명제들을 분할해야 할(주어진) 평면도형의 종류와 그 도형을 분할하는 직선이 만족해야 할(주어진) 조건에 따라 <표 1>과 같이 분류할 수 있다.[15]

<표 1>의 분류에서 주어진 도형과 주어진 (직선의) 조건에 대하여 대응하는 명제가 하나인 경우도 있지만, 여러 개인 경우가 대부분임을 알 수 있는데, 이는 직선이 주어진 도형을 어떤 부분들로 분할하는가에 따라 이등분하는 경우(명제 1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 26, 28), 넓이가 같은 3개 이상의 부분으로 분할하는 경우(명제 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 29), 각 부분의 넓이의 비가 주어진 비가 되도록 두 부분으로 분할하는 경우(명제 20, 27, 30, 32, 34, 36), 각 부분의 넓이의 비가 주어진 비가 되도록 3개 이상의 여러 부분으로 분할하는 경우(명제 31, 33, 35, 36) 등으로 명제가 세분되기 때문이다.

한편, <표 1>에서 알 수 있듯이 삼각형의 분할에 관한 명제는 9개이고 사각형의 분할에 관한 명제는 19개로서 사각형에 관한 명제가 거의 2배 이상 많음을 알 수 있다. 이는 삼각형에 관한 명제는 모두 일반적인 임의의 삼각형을 대상으로 하고 있는 반면, 사각형에 관한 명제의 경우 일반적인 (볼록)사각형 뿐 아니라 특수한 사각형인 사다리꼴과 평행사변형을 대상으로 하고 있기 때문이다. 그러나 이러한 명제의 개수의 차이에도 불구하고 사각형의 분할 문제는 삼각형의 분할 문제에 비하여 매우 제한적인 범위 내에서만 다루어지고 있다고 볼 수 있는데, 이는 <표 1>에서 삼각형이 포함된 행은 빈칸이 거의(하나도) 없지만, 사각형이 포함된 행들은 빈칸이 상당수 있음을 통해 확인할 수 있다.

15) <표 1>에서 괄호와 함께 제시된 명제의 번호는 그 명제에서 명시적으로 언급하지는 않았으나 실제로는 암묵적으로 취급하고 있는 경우를 나타낸 것이다. 예를 들어, [명제 3]은 삼각형의 한 변 위의 임의의 점을 지나는 이등분선 작도에 관한 명제로서, 그 직선이 삼각형의 한 꼭짓점을 지나야 한다는 조건이 명시적으로 언급되고 있지는 않지만, 이는 삼각형의 한 변 위의 임의의 점을 지나는 이등분선 작도의 특수한 경우에 해당하므로 괄호와 함께 (3)과 같이 나타내었다. 평행사변형과 사다리꼴에 관한 명제들 중에서 명제 6, 명제 7, 명제 8, 명제 9, 명제 12 역시 이와 같은 이유로 괄호와 함께 나타내었다. 그러나 일반적인 (볼록)사각형의 경우에는 꼭짓점을 지나는 경우(명제 14, 15, 34, 35)와 사각형의 한 변 위의 임의의 한 점을 지나는 경우(명제 16, 17, 36)가 별도의 명제로 다루어지고 있다.

## 3.2 분할론 내용 구성의 특징

앞서 언급한 바와 같이 분할론에서 사각형의 분할 문제는 삼각형의 분할 문제에 비하여 매우 제한적인 범위 내에서만 다루어지고 있는데, 이를 좀 더 자세하게 살펴보도록 하자. 사실 분할론에 제시된 삼각형과 사각형의 분할 문제는 모두 다음의 두 질문으로부터 비롯된 것들이라 할 수 있다.

(1) '임의로 주어진 한 점' 에 대하여 이 점을 지나면서 주어진 '삼각형(사각형)' 을 '이등분' 하는 직선을 작도하라.

(2) '한 변과 평행' 하면서 주어진 '삼각형(사각형)' 을 '이등분' 하는 직선을 작도하라.

삼각형의 경우 분할론에 제시된 명제들을 통해 위의 두 질문 (1), (2)에 대한 완전한 해법이 제시되어 있다. 즉, 주어진 삼각형이 이등변삼각형이나 직각삼각형과 같은 특수한 형태의 삼각형이 아니라 일반적인 임의의 삼각형인 경우를 다루고 있고, 임의로 주어진 점 또한 모든 가능한 경우 즉, 그 점이 삼각형의 변 위에 놓인 임의의 점(꼭짓점 포함)인 경우, 삼각형 내부의 임의의 점인 경우, 삼각형 외부의 임의의 점인 경우를 모두 다루고 있다. 또한 한 변과 평행하면서 주어진 삼각형을 이등분하거나 삼등분하는 직선의 일반적인 작도 역시 다루고 있다.

이에 비해 사각형의 경우 평행사변형을 제외하고는 사다리꼴과 일반적인 (볼록)사각형에 대하여 몇 가지 제한적인 경우에 대한 작도만 다루고 있음을 확인할 수 있다. 실제로 사다리꼴의 경우를 보면, 질문 (1)에서 임의로 주어진 점이 변 위의 임의의 점이거나 꼭짓점인 경우는 모두 다루고 있지만 주어진 점이 사다리꼴의 내부나 외부에 놓인 점일 때에는 이 점을 지나면서 윗변과 아랫변을 모두 지나는 이등분선의 작도만 다룬다. 즉, 주어진 점이 사다리꼴의 내부나 외부의 점일 때, 이 점을 지나면서 사다리꼴의 아랫변이나 윗변을 지나지 않는 경우에 대한 이등분선 작도는 다루지 않는다. 질문 (2)에 대해서도 아랫변(윗변)과 평행한 이등분선 작도는 다루지만, 아랫변(윗변)이 아닌 다른 변과 평행한 이등분선의 작도는 다루지 않는다. 한편, 일반적인 (볼록)사각형에 대해서는 질문 (1)에서 임의로 주어진 한 점이 사각형의 한 변 위의 임의의 점인 경우와 꼭짓점인 경우만 다루고, 그 이외의 경우 즉, 주어진 점이 사각형의 내부나 외부의 점인 경우는 다루지 않는다. 더구나 질문 (2)는 전혀 다루지 않는다. 그리고 이들 각 경우 즉, 사다리꼴을 포함한 사각형의 몇 가지 경우에 대한 이등분선 작도가 일반적으로 가능한지 불가능한지에 대한 언급은 전혀 제시되어 있지 않다. 이러한 점에서 분할론에서 다루는 도형의 분할에 관한 명제들은 모두 '작도가 가능한 경우' 만을 취급하고 있고, 작도가 불가능하거나 작도 가능하다는 확신이 들지 않는 경우는 다루지 않았음을 추측할 수 있다.

분할론의 내용 구성에서 발견할 수 있는 또 다른 특징 중의 하나로 명제 28과 명제 29를 들 수 있다. 명제 28은 원호와 두 직선으로 둘러싸인 영역을 이등분하는 직선을 작도하는 문제인데, 다른 명제들과는 달리 직선이 주어진 도형의 어떤 점을 지나야 한다거나 어떤 변과 평행해야 한다는 등의 조건이 전혀 제시되어 있지 않으며, 다만 명제 28의 증명(풀이)을 보면 주어진 도형을 이등분하도록 작도된 직선이 주어진 원호의 중점을 지나는 직선임을 확인할 수 있다. 또한, 다른 명제들의 경우 이등분선 작도 후 삼등분선 등 주어진 도형을 원하는 비(율)가 되도록 분할하는 직선(들)을 작도하는 문제를 다루는데, 명제 28에 제시된 도형의 경우 이등분선 이외에 더 이상 다른 경우에 대한 작도를 다루지 않는다. 원을 주어진 비율만큼 잘라내는 서로 평행한 두 직선의 작도를 다루고 있는 명제 29 역시 이 명제 이외에 원의 분할에 관한 다른 명제가 더 이상 제시되지 않는다. 이는 명제 29가 원을 특정한 비율만큼(이를테면, 이등분 혹은 삼등분) 분할하는 직선을 작도하도록 요구하지 않고 임의로 주어진 비율만큼 잘라내도록 요구하고 있기 때문이라고도 볼 수 있다. 그러나 명제 29의 이러한 진술 방식 즉, "임의로 주어진 비율만큼 잘라내는"이라는 조건은 Archibald[8]가 언급하고 있듯이 다소 의아스러운 측면이 있다. 실제로 명제 29의 증명(풀이)을 보면 원을 $\frac{1}{3}$만큼 잘라내는 평행한 두 직선을 작도하기 위해 주어진 원에 내접하는 정삼각형의 작도를 이용하고 있는데, 이 방법을 이용하면 주어진 원을 $\frac{1}{4}$만큼 혹은 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ 등의 비율만큼 잘라내는 문제 역시 정4각형, 정5각형, 정6각형의 작도로부터 어렵지 않게 해결할 수 있다. 그러나 정다각형의 작도가 항상 가능한 것은 아니므로, 이와 같은 논법 역시 항상 적용가능하지는 않다. 이를테면 주어진 원을 $\frac{1}{7}$만큼 잘라내는 두 평행선은 정7각형의 작도가 불가능하므로 앞의 경우와 같은 방식으로 작도할 수 없게 되며, 어쩌면 그러한 두 직선의 작도 자체가 불가능할 수도 있는 것이다. 그러나 이러한 작도불가능성의 문제 즉, 어떤 경우에 작도불가능하고 왜 그러한가에 대한 문제는 사다리꼴과 일반적인 (볼록)사각형의 몇 가지 경우에서 그랬던 것처럼 논의되지 않고 있다.

결국 분할론에 제시되어 있는 몇 가지 도형의 분할에 관한 30개의 명제들은 모두 주어진 조건을 만족하는 직선을 실제로 작도함으로써 그러한 직선이 작도가능함을 보이고 있으며, 이를 통해 그러한 직선의 존재성을 증명하고 있음을 알 수 있다. 그리고 작도하길 원하는 직선이 작도가능한 경우만을 명제로서 다루고 있음을 앞서 언급한 바와 같이 알 수 있다. 이러한 관점에서 보면, 분할론에 제시된 명제들은 오늘날에도 여전히 기하학을 공부하는 학생들에게 매우 흥미로운 탐구 주제가 될 수 있음에도 불구하고 그 내용의 구성 및 취급 방식에서는 주어진 조건을 만족하는 직선의 작도가능성, 존재성, 유일성이라는 측면에서 다소 아쉬움이 남는다. 즉, 분할론의 각 명제는 어떤 조건을 만족하는 직선의 존재성을 작도가능성의 관점에서 다루고 있는데, 아쉬운 점은 원하는 직선이 존재하지 않는 경우에 대한 논의 및 작도는 불가능하지만 주어진 조건을 만족하는 직선이 존재하는 경우에 대한

논의가 없다는 점이다. 그리고 주어진 조건을 만족하는 직선의 작도가 존재성을 보장하지만 유일성은 보장하지 못한다는 점에서 각 명제에서 요구하는 직선이 꼭 하나만 작도가능한지 아니면 그 이외의 다른 직선이 작도가능한지(혹은 존재하는지)에 대한 논의가 없다는 점도 아쉬운 부분이다.

## 4 맺는 글

작도는 눈금 없는 자와 컴퍼스라는 제한된 도구를 가지고 원하는 도형을 구성하는 것으로 자와 컴퍼스라는 제한된 도구는 유클리드 원론의 처음 세 공준을 의미하고 작도해야 할 도형은 그 존재성을 증명해야 할 하나의 명제로 간주될 수 있다. 즉, 작도는 하나의 구체적인 조작인 동시에 그 자체로 구하고자 하는 도형에 대한 존재성 증명으로 간주될 수 있고, 작도의 각 단계에 대한 타당성 검증은 주어진 공준들로부터 명제를 연역적으로 증명하는 과정이라 할 수 있다. 학생들은 작도를 통해 유클리드 기하의 연역적 체계를 실제 조작을 통해 구현하여 학습하고 경험할 수 있으며, 작도를 시행하는 과정이 수학적 문제해결의 전형적인 과정이라는 점에서 작도를 통해 수학적 문제해결을 경험하고 이를 통해 수학적 문제해결능력을 신장시킬 수 있을 것이다[4]. 이러한 점에서 분할론에 제시된 명제들은 그 자체로 학생들에게 훌륭한 기하학 탐구 과제가 될 수 있고, 이는 분할론의 명제들이 기하 문제 풀이에 관심 있는 사람들에게 흥미로운 연습문제의 역할을 하였고 이것이 유클리드가 분할론을 집필한 목적이었으리라 추측한 Favaro[12]의 견해와도 부합하는 것이다.

한편, 분할론이 지닌 몇 가지 아쉬운 부분 즉, 주어진 조건을 만족하는 직선의 작도가능성, 존재성, 유일성에 대한 몇 가지의 질문을 통해 새로운 여러 가지 문제들이 제기될 수 있다는 점에서 분할론에 제시된 명제들을 활용하여 학생들을 위한 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동을 설계할 수 있을 것이다.[16]

이를 통해 분할론에 제시된 각 명제를 기하학적인 방법에 의해서 뿐만 아니라 대수적인

16)

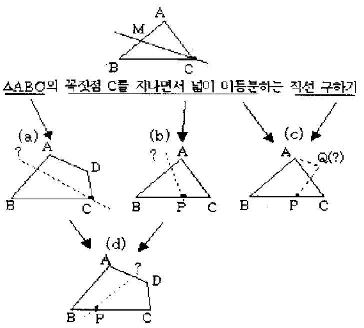



그림 3: 탐구 활동 설계의 예[3]

실제로 연구자는 이전 연구를 통해 학생들에게 이미 친숙하게 잘 알려진 명제인 "삼각형 $ABC$의 한 꼭지점 $C$를 지나면서 삼각형 $ABC$의 넓이를 이등분하는 직선은 변 $BC$의 중점 $M$을 지난다."의 주어진 자료와 조건, 구하고자 하는 것을 변형하여 [그림 3]과 같은 탐구 활동의 예를 제시한 바 있는데[3], 이에 따르면 먼저 주어진 자료에 대하여 "만약 삼각형 $ABC$가 아니고 사각형 $ABCD$라면"이라는 질문을 통해 "사각형 $ABCD$의 한 꼭짓점 $C$를 지나면서 사각형 $ABCD$의 넓이를 이등분하는 직선"의 존재성 및 작도가능성 문제를 제기할 수 있고(그림 3의 (a)), 주어진 조건에 대하여 "만약 삼각형 $ABC$의 한 꼭지점 $C$가 아니고 변 $BC$위의 임의의 점 $P$라면"이라는 질문을 통해 "변 $BC$ 위의 임의의 점 $P$를 지나면서 삼각형 $ABC$의 넓이를 이등분하는 직선"을 찾는 문제를 제기할 수 있다는 것이다(그림 3의 (b)). 이 탐구활동의 예에 나타난 문제 (a), (b), (d)는 각각 분할론의 명제 14, 3, 16에 해당한다.

관점에서 접근하여 분할의 가능성 즉, 명제에서 요구하는 직선의 존재성과 유일성 및 실제 작도 방법과 절차에 대한 탐색이 가능할 것이다. 이처럼 도형의 작도와 분할의 문제는 수학의 역사에서 유클리드를 비롯한 여러 학자들이 오래전부터 다루어 온 주제이고 학생들의 수준에서 새로이 만들고 해결해 볼 만한 가치가 있는 문제들이 여전히 풍부하다는 점에서 특히 수학에 재능이 있고 관심 있는 학생들을 위한 탐구 주제로서 활용 가능하리라 판단된다.

## 참고 문헌


1. 권석일, 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰, 서울대학교 박사학위논문, 2006.
2. 도종훈, 유클리드 제5공준의 기원에 관한 가설, 한국수학사학회지 16(2003), 3호, 45–56.
3. 도종훈, 학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계하기, 수학교육 46(2007), 1호, 71–81.
4. 도종훈, 작도의 수학교육적 의의와 컴퓨터 환경에서의 작도, 과학과 문화 6(2009), No.2, 15–23.
5. 윤대원, 서보억, 김동근, 유클리드의 자료론(Euclid's Data)에 대하여, 한국수학사학회지 21(2008), No.2, 55–70.
6. 홍진곤, 권석일, 유클리드 원론에 나타난 대수적 개념에 대하여, 한국수학사학회지 17(2004), No.3, 23–32.
7. D. Aboav, Euclid's book on divisions of figures: a conjecture as to its origin, *Archive for History of Exact Sciences* 62(2008), No.6, 603–612.
8. R.C. Archibald, *Euclid's book On divisions of figures with a restoration based on Woepcke's text and on the Practica geometriae of Leonardo Pisano*, Cambridge: at the university press, 1915.
9. B. Artman, *Euclid—The creation of mathematics*, Springer, 2001.
10. C.B. Boyer. & U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, 1991. (우리말 번역) 양영오, 조윤동 역, 〈수학의 역사〉 상, 경문사, 2000.
11. H.W. Eves, *An Introduction to the history of mathematics*, 1976. (우리말 번역) 이우영, 신항균 역, 〈수학사〉, 경문사, 1999.
12. E.A. Favaro, *Notizie Stoico-Critiche sulla Divisione delle Aree*, *Memorie del Reale Istituto Veneto*, Venice 22, 1882.
13. T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* Vol. 1, Dover Publications, Inc., 1956.
14. T.L. Heath, *A history of greek mathematics* Vol. 1 From Thales to Euclid, Dover Publications, Inc., 1981.
15. T.L. Heath, *A manual of greek mathematics*, Dover Publications, Inc., 2003.
16. R.J. Roberts, *Oxford Dictionary of National Biography*, Oxford University Press, 2004.
17. D.E. Smith, *Review: Raymond Clare Archibald, Euclid's Book on Divisions of Figures*(περὶ διαιρέσεων βιβλίου), Bull. Amer. Math. Soc. 22(1916), No.9, 463–465.
18. The Mathematical Gazette, Reviewed work(s): Euclid's Book on Divisions of Figures with a Restoration Based on Woepcke's Text, and on the Practica Geometriae of Leonardo Pisano by R. C. Archibald, *The Mathematical Gazette* 8(1916), 322–323.

19. http://enwikipediaorg/wiki/John_Dee
20. http://enwikipediaorg/wiki/Federico_Commandino
21. http://enwikipediaorg/wiki/Franz_Woepcke

도종훈 서원대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Seowon University
E-mail: jhoondo@seowon.ac.kr, djhn@dreamwiz.com