한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제2호 (2011년 5월), 1–15

중국 및 조선 수학에서의 근사적 접근

Approximate Approaches in Chinese and Chosun Mathematics

장혜원 Hyewon Chang

인간 인식의 한계상 무한적 대상에 접근하기 위한 방법이 근사이고 그때 오차는 필수적이다. 동·서양의 근사적 접근 방식은 고유의 수학하는 방식을 반영하여 차이가 있다. 본 논문에서는 중국 및 조선의 산학서에서 발견되는 근사적 접근에서 나타나는 특징을 다섯 가지로 구분하고, 이를 통해 당시 수학자들의 근삿값에 대한 인식을 추론한다. 결과적으로, 동양 수학에서는 파악이 불가능한 대상을 다루기 위해 실제로 다룰 수 있는 근삿값을 구하여 사용한 필연성과 동시에, 오차와 관련된 근삿값의 정확도에 있어 고려된 편리성이 주목된다. 수학적 방법론으로서 근사적 원리가 구현되는 사례뿐만 아니라, 비록 근거나 원리에 대한 명시적 설명이 없다는 한계는 있지만 근삿값에 대한 인식과 정확도의 제고에 대한 의지도 여러 문맥을 통해 확인할 수 있었다. 거기에는 근삿값을 구하는 계산의 역 계산을 통해 근삿값의 정확도를 확인하는 과정도 포함된다. 그러나 선조들이 전해준 방법에 대한 고수나 편리함의 추구라는 입장에서 상당한 오차를 지닌 근삿값이 18세기까지도 상용되었다는 사실 또한 흥미롭다.

Approximation is a very useful approach in mathematics research. It was the same in traditional Chinese and Chosun mathematics.

This study derived five characteristics from approximation approaches which were found in Chinese and Chosun mathematical books: improvement of approximate values, common and inevitable use of approximate values, recognition of approximate values and their reasons, comparison of their exactness, application of approximate principles. Through these characteristics, we can infer what Chinese and Chosun mathematicians recognized approximate values and how they manipulated them. They took approximate approaches by necessity or for the sake of convenience in mathematical study and its applications. Also, they tried to improve the degree of exactness of approximate values and use the inverse calculations to check them.

Keywords: 근삿값(approximate values), 근사적 원리(approximate principles), 근사적 접근(approximate approaches), 중국 수학(Chinese mathematics), 조선 수학(Chosun mathematics)

MSC: 01A13, 01A25 ZDM: A3D3O
제출일: 2월 25일 수정일: 4월 3일 게재확정일: 4월 8일

1 서문

> 우리의 제한된 지능은 복잡한 내용을 한꺼번에 즉각 처리해낼 수 없으며, 따라서 그것을 정리하기 위해서는 불가피하게도 언제나 근사적 접근 방식을 취해야 한다[15, p. 182].

위의 인용문은 인간 능력의 한계로 인한 근사적 접근 방식의 불가피함을 말하고 있다. 이는 정확성을 추구하는 학문인 수학 내에서도 마찬가지이다. 인간 인식의 유한성이 수학적 대상의 무한성을 정확하게 파악하기 어렵기 때문에 근삿값을 사용하여 무한에 접근하는 것이며 그때 가장 중요한 개념이 그 정확도를 나타내는 오차이다. 예컨대 무리수의 소수 표현에서 보는 바와 같이 기호 $\cdots$ 없이는 그 양을 나타낼 수 없으므로 그 값을 좀 더 정확하게 구하려는 노력이 수학 발달의 한 단면을 보여주는 것으로 여겨져 왔다. 그 과정에서 π, $\sqrt{2}$ 등을 개념적으로 규정하고 그것을 이용하여 이론을 전개해가는 것은 서양 수학의 특성이라 할 만하다. 그러나 계산 위주의 동양 수학[1)]에서는 파악할 수 없는 그 막연한 값에 대해 대략적으로 얼마나 되는지 아는 것이 필요하였다. 그래서 서양 수학에서 나타나는 개념적 규정 없이 구체적인 근삿값을 구하여 사용하는 데 초점이 있었다. π의 근삿값으로 3.14를 사용하는지 3.141을 사용하는지는 사용자의 목적과 상황에 따라 원하는 오차의 범위에서 결정되는 것이다. 이렇듯 개념적으로 규정하여 이론적으로 전개하는 접근 방법과 근삿값을 구하여 구체적으로 사용하는 실제적인 접근 방법은 서양 수학과 동양 수학의 대비되는 특성을 보여주는 예가 될 수 있다. 동양 수학의 실제적 특성에 따라 굳이 개념적인 대상으로 명명할 필요 없이 원하는 오차의 범위 내에서 근삿값을 실제로 구하여 이용할 수 있으면 되었던 것이다.

이와 같은 맥락에서 동양 수학사에서 근삿값은 정확히 알 수 없는 양을 실제로 다루기 위해 선택된 값이고, 따라서 근사적 접근이 불가피하였던 여러 사례가 발견된다. 본 논문에서는 중국 및 조선 수학에서의 몇 가지 사례에 대한 분석을 통해 옛 수학자들이 이용한 근삿값 및 근사적 접근에 대해 고찰하고자 한다. 본 논문에서 고찰한 사례는 크게 다섯 가지 유형으로 분류될 수 있다: 근삿값의 개선, 근삿값의 상용, 근삿값 및 그 근거에 대한 인식, 근삿값의 정확도 비교, 근사적 원리. 이제 각각에 대해 사례를 제시하고 분석함으로써 중국 및 조선 산학서에서 이용된 근삿값 및 근사적 원리를 고찰하고 그로 인한 당시의 수학적 발전과 수학자들의 인식에 대해 추론하고자 한다.

---

1) 동양 수학이라 하면 중국, 한국, 일본으로 이어지는 동아시아의 수학 외에 인도 수학, 멀리는 아라비아 수학까지도 포괄할 수 있는 용어이지만 본 논문에서는 중국 수학 및 조선 수학을 위주로 한 19세기 이전의 수학을 지칭하기 위해 사용한다.

2 근삿값의 개선

원주율은 원의 지름에 대한 둘레의 비율로서, 그 비율의 일정함에 주목한 후 그에 대한 보다 정확한 근삿값을 구하려는 노력이 동서양을 막론한 수학사에서 발견된다. 그 근삿값을 얻기 위해 이미 계산할 수 있는 대상을 이용하였다. 즉 원 대신 다각형을 이용한 것이다. 예컨대 중국 수학에서 원을 내접 정육각형으로 근사시켜 생각한 것이 〈산수서〉, 〈구장산술〉에서부터 사용된 근삿값 3이다. 이는 사용자가 허용하는 오차의 범위에서 조선 말기까지도 사용된 유용한 값이었다. 그러나 수학의 발달은 근삿값의 오차를 줄이려는 노력으로 이어져 왔다. 대표적인 수학자가 〈구장산술〉을 주해한 유휘(263)이다.

> 이것은 원주 3, 지름 1의 비율이 아니다. 원주 3이란 원을 내접 정육각형으로 본 것이므로 활, 현에 비유함으로써 원과 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 대대로 전해진 이 계산 방법을 기꺼이 세밀하게 조사하지 않고 전하는 학자들은 옛것을 되풀이함으로써 그 오류를 익히는 것이다. 근거를 밝히지 못한다면 그 거짓을 분별하기란 어렵다[10].

이와 같이 기존의 지식에 대한 설명 및 정당성을 탐구하는 수학자의 진면목을 보여준 유휘는 원에 내접하는 정다각형을 이용하여 변의 수를 점차 2배로 증가시켜 원에 좀 더 가까운 도형을 생각함으로써 원주율의 근삿값을 개선하고자 하였다. 구체적인 방법은 다음과 같다. 우선 정육각형으로 시작하여 변의 수를 2배로 함으로써 정12각형, 그리고 나서 정24각형, 정48각형, ... 이런 식으로 정192각형까지 확장하면서 정n각형으로부터 정$2n$각형의 한 변의 길이를 구한다. 정육각형으로부터 정12각형의 한 변을 구하는 것은 반지름을 1이라 할 때 그림 1을 이용하면 다음의 절차를 따른다.

① $\sqrt{1-0.5^2} = 0.866025\frac{2}{5}$

② $1 - 0.866025\frac{2}{5} = 0.133974\frac{3}{5}$

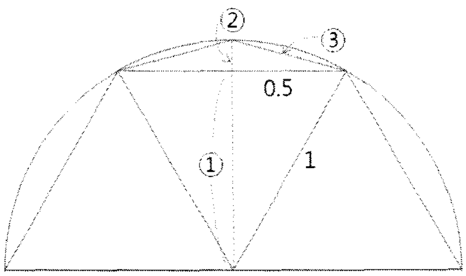

그림 1: 정12각형의 한 변

③ $\sqrt{0.5^2 + \left(0.133974\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{0.267949193445}$

이 값이 정12각형의 한 변이다. 마찬가지 방식으로 순차적으로 구해나가면 정192각형까지의 한 변을 각각 얻는다. 그리고 정48각형의 한 변을 구한 다음에는 정96각형의 넓이로 24×(정48각형의 한변의 길이)×r을 계산한다. 즉 원에 내접한 정$2n$각형의 넓이는 정n각형의 한 변의 길이와 반지름의 곱의 $\frac{n}{2}$배이고, 다시 말하면 정n각형의 둘레의 반과 반지름의 곱임을 이용한 것이다.

여기서 중요한 것은 6각형에서 12각형, 다시 24각형, 이와 같이 192각형까지 계속 나누어갈수록 원과 정다각형의 차이는 점점 줄어들고 더 이상 자를 수 없을 때까지 계속하면 원과 일치할 것이고 결국 남는 부분이 없게 됨을 주목하였다는 사실이다. 즉 같은 과정을 되풀이할수록 오차는 줄어들고 원하는 만큼 정확한 근삿값을 구하여 사용할 수 있음을 인식하였고, 정192각형까지의 과정은 근사 과정의 처음 몇 단계일 뿐, 이 과정의 무한 반복과 그에 따르는 극한 개념을 직관적으로 파악한 것이다.

원하는 오차 범위의 근삿값을 구할 수 있었고, 실제로는 내접 정192각형의 넓이를 구하는 계산 과정에서 $3.14\frac{64}{625} = 3.141024$라는 원주율을 얻음으로써 10^{-4} 수준의 오차를 허용하는 근삿값을 제시하였다. 이는 근삿값에 대한 인식과 그 개선에 대한 훌륭한 사례로 볼 수 있다.

이후 5세기의 조충지는 유휘의 방법에 기초하여 밀법으로서 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$과 밀률 $\frac{355}{113}$를 계산해내었다. 나아가 13세기에 이르면 조우흠(趙友欽, 1271∼?)이 조충지의 근삿값을 확인하기 위해 유휘의 방법과는 차별된 방법으로, 원에 내접하는 사각형에서 출발하여 2^{k+1}각형 ($k \geq 2$)을 고려하여 16384각형까지 계산하였다. 그 계산 과정을 정리하며 '정사각형은 계산의 시작이요, 원은 계산의 끝이다. 원은 정사각형으로부터 시작하고 정사각형은 원에서 끝난다.' 라고 언급함으로써 원을 정다각형의 극한으로 간주한다는 사실을 명시하였다[14].

3 근삿값의 상용

이론화를 위해 무리수를 개념적으로 규정하지 않은 동양 수학에서 무리수에 해당하는 수학적 대상에 대해서는 적당한 근삿값을 취하여 이용하는 것이 자연스럽다. 앞서 본 원주율이 대표적인 예이고 그 밖에 정삼각형의 높이와 정사각형의 대각선 등을 들 수 있다.

동양 수학에서 다루는 삼각형은 특별한 경우로 제한되었기 때문에 직각삼각형에 대한 밀도 있는 연구와 대조적으로 넓이 측도에 있어서 직각삼각형이나 이등변삼각형 이외의 삼각형에 대해서는 근삿값에 만족하는 수준이었다.[2] 특히 정삼각형은 매우 특수한 삼각형

2) 그러나 19세기에 이르면 세 변의 길이가 다른 일반적인 삼각형의 높이를 구할 때 구고법을 이용하여 정확한

임에도 불구하고 흔하게 다루어지지 않은 경우인데 그 이유를 정삼각형의 넓이를 구할 때 필요한 치수인 높이가 변의 길이와 무리수 비의 관계라는 사실로 설명할 수 있다. 실제로 한 변의 길이가 주어진 정삼각형의 넓이를 구할 때 '한 변에 6을 곱하고 7로 나누어 높이를 얻는다.[5]' 고 하였다. 한 변이 a인 정삼각형의 높이를 $\frac{6}{7}a$로 간주한 것이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근삿값으로 $\frac{6}{7}$을 취한 것이다. 다시 말해 $\sqrt{3}$의 연분수 표현 $[1;1,2]$에 따른 계산에 의해 근삿값 $\frac{12}{7}$를 취한 것이다[4].

또 하나의 흔한 사례가 방오사칠(方五斜七)의 경우이다. '방사법' 또는 '방오사칠술' 등으로 불리기도 한 이 값은 정사각형의 한 변을 5라 할 때 대각선의 길이를 7로 간주한 것이므로 $\sqrt{2}$의 근삿값으로 $\frac{7}{5} = 1.4$를 택한 것이고 역시 연분수 표현 $[1;2]$를 써서 계산하면 얻을 수 있다. 10^{-2} 수준의 오차에 만족한다면 계산상의 아무 불편 없이 사용할 수 있는 수치를 얻은 것이다.

선분의 길이뿐만 아니다. 평면도형의 측도에는 근사적 접근을 보여주는 사례가 다수 있다. 평면도형의 측도는 밭의 넓이 측정에 기초하여 이루어졌고 따라서 실제 밭의 다양한 모양으로부터 추출한 도형들의 넓이를 구하면서 주로 곡선이 포함된 도형이나 측도에 필요한 요소를 구하기 어려운 도형의 경우에는 도형을 넓이를 구하기 쉬운 다른 적절한 모양으로 근사시켜 다루었다. 곡선이 포함된 도형은 유사한 형태의 다각형으로, 다각형은 좀 더 다루기 쉽게 변형된 형태의 다각형으로 대치시켜 생각하였다. 예를 들어 삼사전(三斜田), 미전(眉田), 우각전(牛角田), 사부등전(四不等田) 등의 넓이는 풀이법에 제시된 공식 자체가 근삿값을 구하는 것으로 되어 있다.

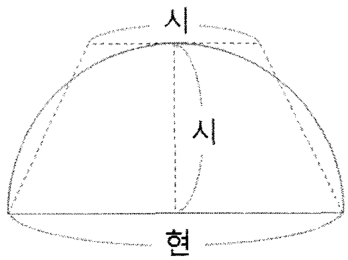

그림 2: 호시

호시전(弧矢田)의 경우도 마찬가지이다. 호시전은 오늘날의 활꼴 3) 이며 주어진 데이터는 두 개로, 현(弦)의 길이와 현에서 호까지의 거리인 시(矢)의 길이이다. 오늘날 활꼴의 넓이를 구하기 위해서는 그것을 포함하는 부채꼴의 반지름과 중심각의 크기가 필요하지만 전통 수학에서는 현과 시의 길이를 이용하여 호시의 넓이를 $\frac{\text{현}\times\text{시}+\text{시}^2}{2} = \frac{(\text{현}+\text{시})\times\text{시}}{2}$로 구하였다. 이는 ⟨구장산술⟩에도 포함된 방법이다. 그림 ??와 같이 시와 같은 길이의 윗변을 그려본다면 시를 윗변, 현을 아랫변, 시를 높이로 하는 사다리꼴의 넓이를 구하는 방법과 일치한다. 결국 활꼴의 넓이를 구하기 위하여 그 모양과 가깝게 근사시킨 도형으로서 사다리꼴을 선택하여 근삿값으로 대신한 것이라 할 수 있다.

한편 곱셈 연산에서도 편리한 계산 수행을 위하여 근삿값으로 처리한 사례가 있다. 곱셈

높이를 구한 것을 볼 수 있다[1].

3) 한편 황윤석은 호시를 활꼴의 특별한 경우인 반원에 국한시켜 생각했기 때문에 '현과 시를 더하면 호의 길이([6], p.7)' 라고 하였다.

은 중국 수학에서 사칙 연산 중 그 변화가 가장 다양한 연산이었는데, 중국 수학의 절정기인 송 · 원시대의 양휘(楊輝)가 〈양휘산법〉 중 '산법통변본말(算法通變本末)' 에서 다룬 여러 종류의 곱셈법 중 하나인 단인(單因) [4]이 바로 근사적 접근과 관련된다. 승수가 한 자리 수인 곱셈을 뜻하는 이 방법은 다음과 같은 문제를 통해 예시되어 있다.

밤이 2746섬 있다. 1111사람에게 나누어준다면 각각 얼마를 받는가?[9]

오늘날 계산을 한다면 $2746 \div 1111$이 제격이지만 책의 풀이법은 9를 곱하여 자리 옮김을 하는 것이다. 즉 $a \div 1111$ 대신 $a \times 9 \times 10^{-4}$을 하는 것이다.

$$\frac{a}{1111} \fallingdotseq a \times 9 \times 10^{-4}$$
$$\frac{1}{1111} \fallingdotseq 9 \times 10^{-4} = \frac{9}{10000}$$
$$\frac{1}{9} \fallingdotseq 0.1111$$

결국 $\frac{1}{9}$을 0.1111로 근사적으로 다룸으로써 가능한 해법이다. 그 이점은 무엇인가? $\frac{1}{9} \fallingdotseq 0.1111$ 정도의 근사적 접근에 의한 계산 결과는 $2746 \times 9 \times 10^{-4} = 2.4714$이고 $2746 \div 1111 \fallingdotseq 2.4716$이므로 10^{-4} 수준의 오차 범위에서 근삿값에 만족한다면 젯수가 네 자리 수인 복잡한 나눗셈을 피할 수 있고 그 대신 간단한 한 자리 수의 곱만으로 해를 구할 수 있는 것이다. 이제 문제 상황에 포함된 1111사람이라는 조건은 임의의 선택이 아니었음을 알 수 있다.

마찬가지로 '돈 2746관으로 ○○을 사는데 1장의 값이 1관 666문이다. 모두 얼마를 사겠는가?' 라는 문제의 풀이에서도 1666으로 나누는 대신 6을 곱한다고 하였다. 역시 $\frac{a}{1666} \fallingdotseq a \times 6 \times 10^{-4}$, 즉 $\frac{1}{6} \fallingdotseq 0.1666$으로 간주함으로써 네 자리 수로 나누는 대신 한 자리 수의 곱셈을 택하여 정확도를 양보하더라도 계산상의 편리함을 추구한 것이다. 6이나 9이외의 다른 한 자리 수 n의 경우에도 마찬가지로, $\frac{1}{n}$의 근삿값을 나누는 수로 포함하는 문제 상황에 대해 n을 곱하여 해결하는 방식으로 다루었다.

앞서 고찰한 사례들은 모두 근삿값 처리로 만족한 경우에 해당한다. 그러나 참값을 얻을 가능성 또는 참값을 얻는 방법에 대한 앎의 유무와 관련한 차이를 읽어낼 수 있다. 무리수에 해당하는 선분의 길이를 실제로 다루기 위해서는 그 근삿값이 필수였다. 호시의 넓이에서는 참값을 얻기 위해 부채꼴의 반지름과 중심각을 알아야 하는데, 〈구장산술〉 정도의 수학 연구의 내용으로 보아 원의 넓이를 구할 수 있지만 그 부분인 부채꼴을 규정하기 위한 각의 개념은 발견되지 않으므로 실제로 오늘날의 접근 방식은 불가능했을 것이고 따라서 가장 근접해 보이는 다각형으로의 변형은 불가피한 선택일 수 있다. 한편 단인의 경우에는 동양 수학에서 곱셈 방법의 다양성에 비해 나눗셈은 그 활용도가 떨어지기는 하지만 어쨌든 나

4) 양휘의 단인(單因)을 설명해주신 홍성사 교수님(한국수학사학회 콜로키움, 2010)께 감사드린다.

눗셈 방법을 분명히 알고 사용했다는 사실에 비추어볼 때 편리함이 우선시된 선택이었다고 할 수 있다.

4 근삿값 및 그 근거에 대한 인식

중국 및 조선의 산학서를 보면 수학적 결과나 공식에서 근삿값을 사용하고 있지만 그것이 근삿값이라는 것을 언급한 내용은 매우 드물다. 황윤석이 〈산학본원〉에서 직각삼각형의 직각을 낀 두 변이 각각 3일 때 빗변이 4.xxx 임을 말한 구삼고삼현사영지도(句三股三弦四零之圖)에 대해 설명하면서,[7] '근사적으로 정한 것(假立)' 임을 밝혀 놓은 것이 한 가지이다. $\sqrt{18} \fallingdotseq 4.24264068711928$ 과 비교하여 오차가 10^{-7} 수준의 정확한 값을 제시하였다.

반면 대부분의 경우, 계산 결과가 근삿값임을 인식했거나 근삿값임을 알고 사용했음이 분명해 보이는 맥락에서조차 그에 대한 명시적 언급은 대부분 생략되어 있는 것이다. 예컨대 구 4, 고 9일 때 현의 근삿값 $9\frac{16}{19}$ 을 구한 다음, 이어지는 문제[7, p.11]에서 이 구와 현을 가지고 고를 구한다. 모두 참값이라면 $\sqrt{(9\frac{16}{19})^2 - 4^2}$ 으로 구해야 하지만 문제의 풀이에는 현의 제곱으로 $(9\frac{16}{19})^2 = \frac{187^2}{19^2}$ 이 아니라 $\frac{187^2+(19-16)\times 16}{19^2}$ 을 이용하였다. 이는 주어진 데이터 $9\frac{16}{19}$ 이 근삿값이기 때문에 근삿값으로부터 참값의 제곱수를 찾기 위해 근삿값을 얻은 과정의 역 절차를 따른 것이다.

따라서 어떤 데이터가 근삿값으로 취해진 것인지 혹은 왜 그러한 값을 취한 것인지에 대한 이유나 근거는 오늘날 연구자들이 이전 수학자들의 관점에서 추론해내야 하는 과제 중 하나가 되고 있다. 앞서 본 호시전의 넓이 공식을 사다리꼴로의 변형에 의한 것으로 보는 것도 공식으로부터 추론 가능한 하나의 설명일 뿐이다.

또 다른 예로 심괄(沈括, 1031~1095)의 '회원술(會圓術)'을 들 수 있다. 호시의 구성요소인 현(弦)과 시(矢)와 호(弧)의 길이 관계에 대한 것이다. 활꼴은 원의 일부이므로 활꼴이 정해지려면 지름 $d(=2r)$와 시 b가 주어지면 된다. 이때 현의 길이 a와 호의 길이 c를 계산하는 방법을 회원술이라 한다. a는 피타고라스의 정리를 적용하여 정확하게 $a = 2\sqrt{r^2-(r-b)^2}$ 으로 계산된다. 다만 호의 길이 c를 $c = a + \frac{2b^2}{d}$ 로 구하고 있는데, 곡선의 길이이므로 역시 근삿값을 취한 것이다. 이에 대해 저자 스스로가 생각한 방법이라고 했지만 왜 그러한 값을 취했는지에 대한 언급은 볼 수 없다. 이에 대해 Martzloff는 다음과 같이 추론하였다[13].

그림 3에서 부채꼴 OAB의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이와 활꼴 ABD의 넓이이므로 호시전 공식을 이용하여 $\frac{1}{2}a(\frac{d}{2}-b)+\frac{1}{2}(ab+b^2)$ 으로 나타낼 수 있다. 한편 부채꼴 OAB를 호 ADB를 밑변으로 하는 이등변삼각형으로 간주한다면 그 넓이는 약 $\frac{1}{2}\times c\times\frac{d}{2}$ 이다. 양쪽 값 모두 근삿값에 해당하며 각각 활꼴을 사다리꼴에, 부채꼴을 이등변삼각형에 근사시킨

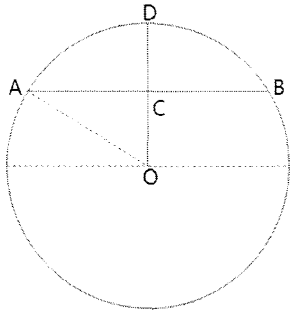

그림 3: 회원술

경우이다. 따라서 다음과 같은 계산에 의해 c를 얻는다.

$$\frac{1}{2} \times c \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2}a(\frac{d}{2} - b) + \frac{1}{2}(ab + b^2)$$
$$cd = ad - 2ab + 2ab + 2b^2$$
$$c = a + \frac{2b^2}{d}$$

이 경우와 같이 저자의 언급이 없는 경우에 그 방법의 근거는 후대 학자들의 추론에 의존할 뿐이다. 논리적 근거의 미약함은 시대에 따라 개선되기는 했지만 17세기 이후에도 저자에 따라서는 근거 없는 풀이 방법의 경향이 여전히 남아있는 것을 볼 수 있다.

5 근삿값의 정확도 비교

조선의 수학자들은 방오사칠이 근삿값이고 그렇게 때문에 데이터가 큰 경우에는 오차 역시 커진다는 것을 인식하고 있었고, 또한 풀이법에 따라 근삿값의 정확도가 달라진다는 것을 비교하기도 하였다.

〈산학본원〉에서는 정사각형의 한 변이 3자일 때 대각선의 길이를 구하는 문제를 두 가지 방법으로 풀어 두 개의 근삿값을 얻었다. 방오사칠에 의하면 $3 \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$(자)를 얻고 개방술에 의하면 $x^2 - 18 = 0$으로부터 $4\frac{2}{9}$자를 얻는다. 이어 덧붙이기를, '두 개의 답을 비교하면 방사법에 의한 답이 개방술에 의한 답보다 $\frac{1}{45}$자만큼 작다[7].' 고 하였다. 그리고 나서 다음을 진술하였다.

> 방사법으로 얻은 답이 개방술로 얻은 답과 다소 차이가 나는 것은 자 또는 치일 경우에는 심히 미미하지만 한 변을 알고 대각선을 구할 때 70자에 이르면 방사법으로 얻은 답이 개방술로 얻은 답보다 1자 정도 작다. ⋯ 따라서 방오사칠의 방법은 자 또는 치 사이에서는 간신히 사용할 수 있지만 100보가 넘는 경우에는 사용해서는 안 된다[7, p.44].

근삿값에 필수적인 오차에 대한 명확한 인식에 기초하여 방오사칠의 방법과 개방술에 의한 근삿값의 정확도를 비교하고, 다루는 데이터의 크기에 따라 오차도 달라지므로 그에 따라 허용되는 방법을 달리 해야 함을 설명한 것이다.

아울러 〈수리정온〉을 인용하여 제시한 정사각형의 변과 대각선의 길이는 각각 $\sqrt{50}$, $\sqrt{\frac{49}{2}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$의 근삿값을 소수점 아래 열째 자리까지 정확하게 구한 것으로 근삿값 및 그 정확도에 대한 인식을 보여준다.

6 근사적 원리

동양의 전통 계산법에는 원리 자체가 근사적 특성을 띤 것이 있다. 영부족술에 의한 다항식에의 선형근사(linear approximation)와 증승개방법이다. 먼저 영부족술은 서양의 이중가정법과 관련되는데[2], 원래 일차방정식의 해법인 이 알고리즘을 이용하여 제곱근을 구할 수 있었다. 이차함수의 포물선을 그 위의 두 점을 이은 직선으로 근사시켜 근삿값을 구하는 선형근사의 원리 그대로이다. 그림 4에서 $y = f(x)$ 상의 두 점 $P_1(a_1, c_1)$과 $P_2(a_2, c_2)$가 있

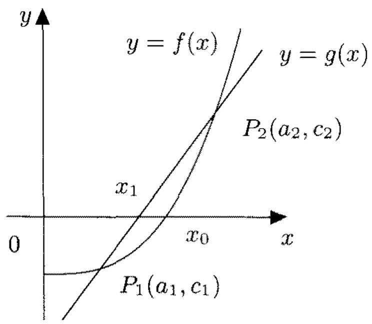

그림 4: 선형근사

을 때 그 두 점을 지나는 직선 $y = g(x)$를 구하여 $f(x_0) = 0$인 x_0의 근삿값으로 $g(x_1) = 0$인 x_1을 얻는 것이다.

두 점을 지나는 직선은 $y - c_1 = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x - a_1)$이고, 이 직선 $g(x) = 0$의 해 $x_1 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{c_2 - c_1}$을 구하는 $f(x) = 0$의 해로 간주한다. 이 때 x_1을 나타내는 식이 곧 영부족술의 알고리즘과 일치하는 것이다.

이 방법이 중국 고대 수학에서 얼마나 요긴한 방법이었는지는 〈산수서〉에서 찾을 수 있다. 중국 최고의 수학책으로 알려져 온 〈구장산술〉보다 앞선 〈산수서〉에는 전자의 원형이 될 만한 문제들이 주를 이루지만 구성이나 접근법에 있어서는 차이가 발견되며 그 중 하나가 제곱근 구하기이다. 전자에서는 '소광'에서 제곱근을 구하는 별도의 알고리즘인 개평방술을 이용하였지만 후자에서는 앞서 본대로 영부족술을 적용하였다. 문제 및 풀이는 다음과

같다.

1무(240보)의 정사각형 밭이 있다. 한 변은 몇 보인가?

답: $15\frac{15}{31}$ 보.

풀이: 한 변을 15보라 하면 15보가 모자라고 16보라하면 16보가 남는다. 남음과 부족을 더하여 분모로 하고, 부족의 분자와 남음의 분모를 곱하고 남음의 분자와 부족의 분모를 곱하여 더한 것을 분자로 한다. 너비 구하는 방법과 마찬가지로 이를 뒤집는다[11].

문제만 보면 넓이가 주어진 정사각형의 한 변을 구하는 것이므로 240의 제곱근을 구하는 문제이다. 그런데 풀이의 방법은 영부족술을 따른다.

15	16
15 부족	16 남음

영부족술에 의해 $\frac{(15\times16+16\times15)}{15+16} = 15\frac{15}{31}$ 를 구한다.

영부족술은 일차방정식에 관한 해법이지만 이 문제와 같이 $x^2 = 240$의 이차식에 적용함으로써 선형근사의 방법으로 근삿값을 얻을 수 있음을 보여준다. 풀이의 맨 마지막 문장은 검산 과정에 해당한다. '復之' 라고 시작하는 이 과정은 결과의 정확성을 판단하기 위한 절차이다. 이 문제에서의 검산은 물론 얻은 결과를 제곱하여 240이 되는지를 알아본 것이다. $(15\frac{15}{31})^2 = 225 + \frac{450}{31} + \frac{225}{961} = 239 + \frac{721}{961} \fallingdotseq 239.75$이 되어 그 정확도를 확인할 수 있다.

한편 〈구장산술〉에서 제곱근과 세제곱근을 구하기 위해 이용된 개방술은 초상, 차상이라 불리는 각 자리 수에 해당하는 해의 근삿값을 추측하여 보다 정확한 근사해를 찾아가는 방법으로 그 자체가 근사적 원리에 근거한다. 이것이 11세기 가헌(賈憲)에 의해 증승개방법으로 발전되어 고차방정식의 해를 찾는 근사적 방법으로 일반화되었다[3]. 홍정하는 〈구일집〉에 나오는 고차방정식을 모두 증승개방법으로 풀었는데, 제6권 제1문인 $x^2 - 484 = 0$에서 첫 번째 근사해인 초상 20을 정하고[5] 다음 단계에서 이십 몇이 되는 더 정확한 근사해를 찾기 위해, 이 경우 일의 자리에 해당하는 차상 2를 얻는다. 그와 같이 하여 얻은 해가 22이다. 물론 이 해는 근삿값이 아니다. 다만 그것을 구해가는 과정이 근사적 원리를 따른다는 것이다. 그런데 구하는 해가 자연수로 떨어지지 않을 때 어림을 통한 근사적 접근이 유용하였다.

5) 그 과정을 오늘날의 조립젯법으로 나타내면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{rrrll}
1 & 0 & -484 & & \\
 & 20 & 400 & (& 20 \\
\hline
1 & 20 & -84 & & \\
 & 20 & & & \\
\hline
1 & 40 & & &
\end{array}
$$

이어지는 제2문의 $x^2 - 2048 = 0$을 예로 들어 설명해보자. 초상 40을 정하고 이어 차상 5를 정한다.

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & 0 & -2048 & \\
 & 40 & 1600 & (\,40 \\
\hline
1 & 40 & -448 & \\
 & 40 & & \\
\cline{1-2}
1 & 80 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrl}
1 & 80 & -448 & \\
 & 5 & 425 & (\,5 \\
\hline
1 & 85 & -23 & \\
 & 5 & & \\
\cline{1-2}
1 & 90 & &
\end{array}
$$

이때, $-448 + 425$가 0이 아니므로 정수 부분은 45이고 소수점 아래가 남아 있다. 진구소(秦九韶, 13세기)는 ⟨수서구장⟩에서 이와 같이 딱 떨어지지 않는 해를 어림하기 위해 소수점 이하를 처리하는 방법으로 세 가지를 이용하였다. 올림하여 정수 근삿값을 취하는 방법, 정수 부분과 분수의 합으로 나타내는 방법, 소수를 이용하는 방법이다[12].

문제 풀이를 계속하여, 첫째 방법으로 푼다면 $\sqrt{2048} = 45 + \bigcirc \fallingdotseq 45 + 1 = 46$을 얻는다.

둘째 방법은 다음 부등식을 이용한다.

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a}$$

여기서 앞의 부등식을 이용하여 $\sqrt{a^2+r} \fallingdotseq a + \frac{r}{2a+1}$로 구하였다.[6] 이 부등식은 $x^2 - k = 0$ $(k = a^2 + r)$의 정수해가 a이므로 정수 이하 부분을 얻기 위한 방정식 $x^2 + 2ax + (a^2 - k) = 0$에 구간 $[0, 1]$의 보간법을 적용하여 얻을 수 있다. 위의 문제에 적용하면 $\sqrt{2048} = \sqrt{45^2 + 23} \fallingdotseq 45 + \frac{23}{91}$을 근사해로 취한 것이다.

셋째 방법은 조립제법을 소수점 이하로 확장하는 것이다. 위의 문제 풀이에서 소수 첫째 자리를 구하기 위한 방정식은 $x^2 + 90x - 23 = 0$이다. 소수 첫째 자리를 2로 잡는다면 실제 해는 0.2이다.

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & 90 & -23 & \\
 & 0.2 & 18.04 & (\,0.2 \\
\hline
1 & 90.2 & -4.96 & \\
 & 0.2 & & \\
\cline{1-2}
1 & 90.4 & &
\end{array}
$$

소수 둘째 자리를 구하고 싶으면 방정식 $x^2 + 90.4x - 4.96 = 0$으로부터 근사해를 구하면 된다. 0.05를 얻으므로 지금까지의 과정에 의해 구한 근사해는 45.25이다. 마찬가지 방법으로 그 이하 자리 수를 구할 수 있다.

홍정하 등 조선의 수학자는 '정수 부분인 45를 두 배하고 1을 더한 91을 분모로 하고 나

6) 한편 손자산경에서는 이 식 중 두 번째 부등식을 이용하였다[12].

머지 23을 분자로 한다.'[7]고 하여 둘째 방법을 따랐음을 알 수 있다. 한편 황윤석은 이 방법 외에 셋째 방법도 함께 이용하였으며, 따라서 한 문제에 두 개의 답을 제시하기도 하였다[7]. 따라서 그 중 적어도 하나는 근삿값임에 틀림없다.

7 논의

본 논문에서는 중국 및 조선의 수학사를 통해 근사적 방법이 중요한 수학적 개념 및 방법론으로서 수학의 발전을 가능하게 하기도 하였고, 실생활의 복잡함을 단순화하는 과정에서 혹은 수학적 개념의 본성상 그 사용이 불가피하기도 하였음을 확인하였다. 확인된 근사적 접근과 관련한 특징을 다음의 다섯 가지로 구분할 수 있었다.

첫째, 보다 정확한 근삿값을 추구한다. 근삿값은 오차가 있음으로 해서 의미를 갖는다. 근삿값의 본질상 피할 수 없는 오차이지만 좋은 근삿값을 얻기 위해서는 오차를 최소화해야 하였다. 정확히 파악할 수 없는 수에 대한 보다 정확한 근삿값을 구하여 사용했고 그 과정에서 극한에 대한 직관적 탐구까지 가능했던 유휘의 수학적 태도를 주목할 만하다.

둘째, 적절한 오차의 범위에서 기꺼이 근삿값을 사용한다. 무리수를 개념적으로 다룬 서양 수학과 달리 정삼각형의 높이, 정사각형의 대각선의 길이와 같이 무리수인 길이를 구하여 사용하려면 근삿값에 의존할 수밖에 없다. 혹은 당시의 수학적 방법으로는 정확한 값을 구할 수 없어서 혹은 사용상의 편리함을 위해 근삿값을 다루었다. 이는 산술과 도형 측정 두 영역에서 모두 나타나는데, 산술에서는 계산상의 간편함을 우선시하는 경우를 보았고, 측정에서는 밭을 이용하여 평면도형의 넓이를 구할 때 일부 도형의 측도에서 볼 수 있었으며, 특히 곡선이 포함된 도형의 경우에는 이러한 경향이 두드러진다.

셋째, 근삿값을 인식하였지만 그 근거는 밝히지 않는다. 근삿값을 사용하거나 근사적 접근에 의해 얻은 결과가 근삿값인 많은 경우에 그 이전까지 밝혀진 연구 결과나 답이 두 개로 제시된 문제 등에 근거할 때 근삿값임을 분명히 인식하고 있었지만 그 사실을 언급한 경우는 매우 드물다. 하물며 근삿값을 왜 그렇게 정하였는지에 대한 이유나 근거가 설명되지 않았기 때문에 후학들에 의해 추론될 수밖에 없는 경우도 있다.

넷째, 사용되는 근삿값의 정확도를 비교하여 그 사용상의 한계를 논한다. 예컨대 정사각형의 대각선을 구하는 전통적인 방법인 방오사칠로 얻은 근삿값과 개방술로 얻은 근삿값을 비교하면서 전자가 더 오차가 크기 때문에 작은 길이에서는 별 문제가 없지만 큰 길이에서는 사용해서는 안 된다는 것을 말한 경우이다.

다섯째, 전통적인 수학적 방법이 본질적으로 근사적 원리를 포함하고 있다. 고차방정식의 해법인 증승개방법은 해를 큰 자리수부터 추정해가는 원리를 담은 대표적인 사례이며,

7) 이 방법은 〈양휘산법〉에서도 언급된 방법이었기 때문에, 조선의 수학자들은 이 방법을 쉽게 접하고 이용했을 것이다.

그때 정수해가 아닌 경우의 해를 근삿값으로 처리하는 방법도 이용되었다.

이상의 특징들은 근사적 접근을 보인 사례들로부터 추출한 특징이기 때문에 상치되거나 중복되는 성질의 것도 있으나 관점의 상이함이나 수학의 전개 과정을 감안한다면 동양 수학사 속에 나타난 관련 특징들로 이해될 수 있는 것들이다. 예를 들어 원주율의 근삿값은 보다 정밀한 계산 이후에도 정확도를 양보한 편리성의 추구라는 차원에서 3이 사용되었다는 점에서 적어도 첫째, 둘째, 넷째 특징이 모두 해당한다.

본문에서 보았듯이 다만 그 사용이 불가피하고 경우에 따라 매우 적절했음에도 불구하고 근삿값의 사용에 대한 수학자들의 인식을 재고해볼 필요가 있다. 말하자면 유휘가 대대로 전해진 계산 방법을 세밀하게 조사하지 않고 전해줌으로써 오류를 익히는 위험이나, 거짓의 분별을 위해 근거를 밝혀야 할 필요성을 지적했듯이 중국 및 조선의 수학사에는 아주 오래전부터 근삿값임을 인식하고 그 검산의 노력까지 보일 정도의 수준을 갖추고 있었지만 전통 수학을 습관적으로 사용한 것으로 보이는 사례도 있기 때문이다. 즉 근삿값의 적절함에 대한 반성적 고찰의 여부와 관련된다. 앞서 고찰한 근삿값의 사용과 관련하여 네 가지 준거를 생각해 볼 수 있다.

첫째, 근삿값을 사용하는 경우에 그것이 근삿값인지 인식하였는가?

둘째, 근삿값인지는 알고 있지만 그 사실을 명시적으로 언급하였는가?

셋째, 근삿값을 왜 그렇게 취하였는지 근거를 밝혔는가?

넷째, 근삿값에 따른 정확도의 차이, 즉 오차의 수준을 인식하였는가?

이상과 같은 각각의 준거와 관련된 사례는 둘째와 셋째 준거의 미약함을 포함하여 앞서의 고찰에서 이미 언급하였다. 근삿값을 구한 계산 과정의 역산을 통한 검산 수행 등은 근삿값의 인식은 물론 오차를 줄여 근삿값의 정확도를 추구함을 보여주는 주목할 만한 사례이다. 〈산수서〉에서도 근사적 접근은 발견되고 더욱이 구한 근삿값에 대한 검산의 과정까지 풀이에 포함된다. 이차식에 대한 영부족술 적용 문제에서 '復之'의 절차를 이미 보았다. 그 문제의 풀이에 '너비 구하는 방법과 마찬가지로'[11]라는 구절이 있는데, 이는 검산 절차를 취한 다른 문제를 지칭한다. 직사각형의 너비와 넓이가 주어질 때 길이를 구하는 문제이다. 구하는 길이가 분수인 경우라 다소 복잡하게 설명되어 있고, 그것을 검산하는 절차로서 역시 '復之···'라고 하여 너비와 길이를 곱하는 과정을 통해 구한 답을 확인한다. 앞의 근삿값 문제에서는 너비와 길이가 같은 경우이므로 '너비 구하는 방법과 마찬가지로'라고 한 것이다. 너비나 길이를 구하는 문제의 경우는 근삿값은 아니다. 그러나 검산 절차가 매 문제마다 있는 것은 아니기 때문에 양쪽 문제 모두 검산을 필요로 하는 요인을 고려한 결과라고 볼 수 있다. 적어도 그 역산을 통해 구한 길이가 근삿값임이 드러나기 때문이다.

시대를 건너 뛰어 황윤석 역시 근삿값을 구한 과정의 역 계산 절차를 고려함으로써 근삿값에 대해 검증하였다. 20의 제곱근으로 $4\frac{4}{9}$를 얻는데 이를 다시 제곱하면 20이 되어야 하지만, 실제로 제곱하면 $19\frac{61}{81}$이 되어 20과 차이가 있음을 말하고 있다. 나아가 역산을 통해 근삿값의 정확도도 확인하였다. 20의 제곱근의 제1근삿값은 상을 4로 하여 구한 $4\frac{4}{9}$이고, 이 근삿값을 다시 상으로 하여 제2근삿값을 구하면 $4\frac{8}{17}$, 같은 방식으로 제3근삿값을 구하면 $4\frac{76}{161}$, 같은 방식으로 제4근삿값을 구하면 $4\frac{144}{305}$인데, 각각을 제곱하여 순서대로 $19\frac{61}{81}$, $19\frac{285}{289}$, $19\frac{25901}{25921}$, $19\frac{93021}{93025}$을 얻음으로써 이들 값이 점점 20에 가깝다는 것을 설명하였다[7].

동양 수학사에서 매우 이른 시기에 근삿값을 인식했을 뿐만 아니라 일차식에 적용 가능한 영부족술을 이차식에 근사적으로 적용하는 아이디어를 지녔었고, 또 그 결과를 검산하고자 하는 생각의 발상은 수학의 근사적 접근을 보여주는 적절한 사례라 할 수 있다. 그러나 그와 대조적으로 많은 문제해결 과정에서 근사적 접근을 취함으로써 근삿값을 구하였지만 그것이 근삿값이라는 사실이나 왜 그러한 근삿값을 취하였는지에 대한 근거에 대해서는 언급되지 않는다는 사실도 확인된다. 전통적인 방식이기 때문에 습관적으로 사용해오던 익숙한 방법들에 대해 재고의 필요를 느끼지 못했던 것으로 보인다. 유휘의 원주율 개선 노력으로부터 꽤 오랜 시간이 흐른 다음, 방오사칠[8] 등의 사례를 통해 근삿값의 정확도에 대한 논의가 명시적으로 이루어지는 18세기에 이르러서야 근삿값에 대한 반성적 고찰이 재현되었다고 할 수 있다.

근삿값 및 근사적 접근은 필수적이다. 오늘날 컴퓨터를 이용하여 원주율을 소숫점 아래 수십만 자리까지 구하였고 실제로는 시간 제약에 해당하는 일이지만 통상적으로 사용하는 근삿값은 3.14이다. 중국의 조충지 부자는 원주율의 근삿값을 소숫점 아래 여섯 자리까지 정확하게 계산할 수 있었지만 원을 내접 정육각형으로 근사시킨 3은 18세기 조선시대 수학책에서까지도 여전히 사용된 값이다. 정확도와 편리함을 고려한 선택의 문제일 뿐인 것이다.

참고 문헌

1. 남병길, 《산학정의》, 《한국과학기술사대계》 수학편, 여강출판사, 1867.
2. 장혜원, 동양의 영부족술과 서양의 가정법, 한국수학사학회지 18권(2005), 14호.
3. 장혜원, 「산학서로 보는 조선수학」, 경문사, 2006.
4. 장혜원, 조선 산학의 삼각형, 한국수학사학회지 22권 4호 (2009).
5. 홍정하, 《구일집》 지. 강신원, 장혜원 역(2006), 교우사.
6. 황윤석(1744a), 《이수신편》 22, 《산학입문》. 강신원, 장혜원 역(2006), 교우사.
7. 황윤석(1744b). 《이수신편》 23. 《산학본원》. 강신원, 장혜원 역(2006), 교우사.
8. 孫子算經. 《中國歷代算學集成》 上. 山東人民出版社.

8) 방오사칠의 방법은 손자산경[8, p.173]에서도 발견된다.

9. 楊輝, 《算法通變本末》. 靖玉樹 편. 《中國歷代算學集成》上. 山東人民出版社
10. 劉徽(263). 《九章算術》, 郭書春(1990), 遼寧教育出版社
11. Cullen, C. 《筭數書》. A translation of a Chinese mathematical collection of the second century BC, with explanatory commentary, Needham Research Institute, Cambridge, 2004.
12. Libbrecht, U., *Chinese mathematics in the thirteenth century*, the MIT press, 1973.
13. Martzloff, J.C., *A history of chinese mathematics*, Springer, 1987.
14. Volkov, A., Zhao Youqin and his calculation of π, *Historia Mathematica* 24(1997), 301-331.
15. Whitehead, A.N., *An introduction to mathematics*. 오채환 역, 「화이트헤드의 수학이란 무엇인가」, 궁리, 2009.

장혜원 진주교육대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education,Chinju National University of Education
E-mail: hwchang@cue.ac.kr