한국초등수학교육학회지 15(1) 199-219. 2011. 04. 30
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(1) 199-219. April 30. 2011.

위치적 십진기수법을 본질로 하여 조직한 소수 개념 지도 방안 연구[1]

강흥규[2]

이 논문에서는 소수 개념의 본질에 대한 고찰에 근거하여, 초등 수학에서 소수 개념의 효과적인 지도 방안을 구체적으로 모색하였다. 브루소는 역사적 발생과정에 대한 고찰에서 출발하여 소수 개념의 본질을 '자연수의 순서쌍의 동치류'로 규정하고 그것을 지도하기 위한 교수학적 상황을 구성하였다. 브루소와는 달리, 이 논문에서는 소수 개념의 본질을 '십진소수' 즉 '밑수 10에 대한 다항식'으로 파악하였다. 그리고 측정활동에 입각하여 그러한 본질을 효과적으로 구현할 수 있는 지도 방안을 구체적인 학습·지도안 형태로 구안하였다. 이 학습·지도안이 기초하고 있는 측정활동의 유형은 '보다 정확한 측정치를 얻기 위한 단위의 십진 세분할을 통한 순차적인 측정 활동'이다. 이 실험적 학습·지도안은 다음과 같은 특징을 가진다.
첫째, 학생들은 그들 스스로 단위를 십진법에 따라 세분할함으로써 하위 단위를 생성하는 조작을 경험한다.
둘째, 십진분수 전개를 먼저 다루고 이로부터 귀납적으로 위치적 기수법에 따른 완성된 소수 표현을 다룬다.
셋째, 위치적 십진기수법을 따라 형식적으로 표기하기 이전에 임의 단위의 명수체계(해-달-별, 혹은 m-dm-cm-mm)에 의해서 읽는 활동을 제공하였다.
이 논문에서 개발된 학습·지도안은 교수실험을 통하여 검증될 필요가 있다. 이를 위한 후속연구가 요청된다.

[주제어] 소수(小數), 브루소, 측정, 위치적 기수법, 십진분수, 육십진분수

Ⅰ. 서 론

Cajori(1896)는 수학사에서 계산술의 비약적인 발전을 이룩한 삼대 발명품으로서 자연수의 십진기수법과 로그 그리고 소수(小數)를 선정하고 있다. 또한 Eves(1979)는 자신의 저서 「수학의 위대한 순간들」에서 수학사를 통틀어 위대한 전기를 이룩한 사건 60가지를 선정하였으며, 그 중에 소수의 발명도 포함시키고 있다.[3] 뿐만 아니라 소수는 단위의 십진분할에 의한 측정활동을 통하여 연속량을 수로 나타낼 수 있는 계기를 마련함으로써 19세기에 확립된 현대적인 실수 개념의 기원이 된다(Moreno-Armella & Waldeg, 2000; Toeplitz, 1963).

---

1) 이 논문은 2008년 공주교육대학교 교수학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 공주교육대학교 수학교육과
3) Eves는 60가지의 수학의 위대한 순간들 중 17가지에 대해서는 그 책의 지면의 한계로 인하여 자세히 다루지 않고 있는데, 소수도 이 중의 하나이다.

수학사에서 뿐만 아니라 소수는 우리나라 초등학교 고학년 수학 교과에서의 중요 교육 내용이다. 소수가 처음으로 도입되는 시기는 3학년이며 소수의 사칙계산에 관한 내용은 4, 5학년 수학의 많은 부분을 차지한다. 소수는 컴퓨터가 인식할 수 있는 수의 표기 형태로서 정보화 시대에서 교양적이고 생활적인 면에서 필수적인 가치를 가지며, 수학 내적인 면에서 볼 때도 중학교 수학에서 무한소수로서의 실수 개념을 이해하는데 필수적인 전제조건이다.

이 논문에서는 초등 수학에서 효과적인 소수 개념의 지도 방안을 구체적으로 모색하고자 한다. 이를 위해서 가장 먼저 필요한 일은 '소수 개념의 본질이 무엇인가'라는 질문에 답하는 일일 것이다(우정호, 변희현, 2005, p.301). 소수 개념의 본질은 다차원적인 복합적인 개념이다. 소수는 방정식이 해를 갖게 하는 정수의 확장이며, 정수의 순서쌍(분수)의 동치류라는 측면, 모든 유리수(실수)를 근사적으로 표현할 수 있으며 유리수(실수)의 생성체계가 되는, 분모가 10의 배수인 분수로 나타내어지는 유리수로의 유리수의 제한이라는 측면을 갖는다(우정호, 2000, p.449). 강현영, 박문환, 박교식(2009)에 따르면 소수는 등분할 소수, 양 소수, 조작 소수, 비율 소수, 몫 소수, 배 소수 등의 여러 측면을 가지며, 변희현(2005)은 소수의 본질을 측정수, 십진기수법, 분수, 비, 작용소, 통약불가능성, 무한 근사, 실무한, 계산수의 9가지 개념 요소로 분해하고 있다.

소수를 어떻게 지도하는 것이 효과적인가라는 질문에 대한 첫째 대답은 이러한 소수의 다양한 측면을 두루 고려하면서 동시에 그들 사이의 복합적인 상호 관계도 중시해야 한다는 것이 될 수 있다(강현영 외, 2009). 이러한 견해는 디엔에스가 말한 '다양성의 원리', 즉 어떤 개념을 가르칠 때 그 개념에 속하는 다양한 사례를 제시하는 것이 효과적이라는 주장과 상통한다(우정호, 2000). 그러나 수학의 특성상 '다양성을 경험하면서도 그 다양성 모두를 하나로 통합할 수 있는 단일한 공통 개념 요소'가 결코 소홀히 될 수 없다. 다시 말하면, 소수의 다양한 개념적 측면을 강조하되, 그 다양성을 모두 꿰뚫는 하나의 본질적인 개념이 무엇인지 명확히 제시할 수 있어야만 한다. 만약 이러한 본질적인 개념이 초등 수준에서는 제시될 수 없는, 오직 고등 수준에서만 다루어질 수 있는 것이라고 한다면, 초등 수학에서의 소수의 다양한 개념적 측면들을 강조한 소수 지도 방법은 서로 관련짓지 못하고 분리된 여러 조각들을 단순히 병치해서 제시하는 것에 지나지 않을 위험성이 있다.

아마 분수도 이러한 위험을 가지는 대표적인 사례일 것이다. 분수의 본질은 자연수의 순서쌍의 동치류로서, 자연수를 확장한 수 체계 즉 유리수 개념이다. 그러나 초등수학에서는 유리수라는 통합적 개념을 다룰 수 없다보니 전체-부분, 분배, 측정, 나눗셈, 작용소, 비 등과 같은 분수의 여러 현상들이 서로 관련짓지 못하고 분리된 채 독립적으로 다루어지는 경향이 있다. 디엔에스가 다양성의 원리를 말했을 때에는 다양성만을 드러낸 채 서로 통합되지 못한 상태에서 멈추는 것을 뜻하지는 않았을 것이다.

소수 지도에서 이러한 위험을 피하기 위해서는 먼저 소수의 다양한 여러 측면들을 통합할 수 있는, 그러면서도 초등 수준에서 다룰 수 있는 소수의 개념적 본질을 찾아야만 한다. 소수의 여러 측면을 관통하는 본질적 개념은 무엇인가? 그것은 초등교육 수준에서 다루어질 수 있는 것인가? 이 본질에 의해서 통합될 수 있는 소수의 여타의 의미들은 무엇인가?

이 논문에서는 소수 개념의 역사적 발생 과정에 대한 고찰을 통하여 소수 개념의 본질을 규명한 후, 이에 근거하여 통합적인 소수 개념의 지도 방안을 제시하고자 한다. 이 논문의 논의 진행 순서는 다음과 같다.

첫째, 소수 개념에 대한 수학사적 고찰을 통하여 소수의 역사적 발생 맥락은 '단위의 십

진분할에 의한 측정 활동'이라는 것과 소수 개념의 수학적 본질은 '밑수 10에 대한 다항식'임을 제시한다. 또한 소수의 발명이 가지는 수학사적 의의를 논한다.

둘째, 이렇게 파악한 소수 개념의 본질은 브루소의 유명한 이론에서 파악한 소수 개념의 본질, 즉 '자연수의 순서쌍의 동치류'라는 개념과 서로 대비됨을 논한다. 아울러 초등수학에서 소수 관련 내용의 연역적 조직의 차원에서 이 두 관점을 비교한다.

셋째, '단위의 십진분할에 의한 측정 활동'을 통한 소수의 지도 방안을 구체적인 학습·지도안 형태로 제시한다. 더불어 그것이 현재 우리나라 교과서와 대비되어 가지는 현저한 특징을 변별한다.

Ⅱ. 역사적 발생 과정이 시사하는 소수 개념의 본질

1. 소수 개념의 역사적 기원

0.234는 무엇을 뜻하는가? 0.234에서 2와 3과 4는 소수점을 기준으로 각각 첫째, 둘째, 셋째 자리의 수를 나타내며, 그 자리값은 단위의 각각 $\frac{1}{10}$과 $\frac{1}{100}$과 $\frac{1}{1000}$이다. 소수 개념은 '단위의 연쇄적인 세분할', '십진법', '위치적기수법'의 세 가지 요소로 함축할 수 있다.

소수의 역사적 발달에는 여러 수학자들이 관련되지만, 이와 같은 완성된 수준의 소수를 발명한 사람은 Stevin(1548-1620)으로 널리 인정된다. Stevin은 소수의 수학적 가치를 분명히 인식하고 산술 연산에 적용하였으며(Cajori, 1896), 소수를 수학적으로 명확히 정의하고 일반적인 수 체계 안에서 형식적으로 정의했다는 점에서 소수의 진정한 발견자로 인정될 수 있다(Sarton, 1935).

그러나 Stevin보다 훨씬 이전부터 중국에서는 Stevin과 같은 수준의 소수를 고안하고 사용했다. 소수가 등장하는 현존하는 최초의 수학 문헌은 유휘(劉徽)가 서기 3세기경에 「구장산술」에 관하여 쓴 주석서이다(Ronan, 1981, p.242). 이 책에는 1.355척의 직경을 '1尺3寸5分5釐'로 표시하고 있다. 서기 635년의 "隋書(수서)"에서는 원주율의 값을 한자(漢字)를 사용하여 3.1415927로 나타내고 있다. 13세기 陽輝(양휘)와 秦九韶(진구소)에 이르러서는 소수에서의 일반연산과 체계가 확립되었다(과학세대, 1993). 이러한 발달에도 불구하고 소수가 널리 사용되지 않은 이유는 중국에서 분수를 다루는 기술이 매우 정교하고 뛰어났으며 대다수의 사람들이 소수의 필요를 전혀 느끼지 않았기 때문이다(과학세대, 1993). 중국에서 이렇게 발달한 소수의 개념은 티무르제국이 사마르칸트에 건설했던 당시 세계 최대의 천문대의 책임자인 알카시(al-Kashi: 1370?-1429?)에게 전해졌고 이것이 실크로드를 따라 유럽으로 전해져서 Stevin으로 이어졌다. 소수를 이해하는데 있어서 아라비아인과 유럽인은 중국보다 1600년 이상이나 뒤져있다(Ronan, 1981). Stevin이 「La Disme」에서 소수를 제안했을 때보다 훨씬 이전에 소수는 이미 도량형 십진체계와 밀접하게 연결되어 있었다(Freudenthal, 1983, p.172). 특히 중국에서는 고대부터 십진법 체계의 도량형을 발달시켜왔기 때문에, 10을 기준으로 단위를 분할하여 하위 단위를 생성하는 활동이 빈번했을 것이다. 이것이 소수의 기원으로서의 측정활동이다.

십진법을 제외하고 '단위의 연쇄적인 세분할'과 '위치적 기수법'만을 생각한다면, 소수의 기원은 바빌로니아 문명까지 거슬러 올라갈 수 있다. 바빌로니아 문명에서는 60을 기준으

로 단위를 세분할하여 나타내는 육십진소수를 고안하여 사용하였다. 𒐖 𒐖 라는 표시는 $2\times60+2\times1$를 나타내는 것만으로 사용된 것이 아니라 $2\times1+2\times\frac{1}{60}$ 혹은 $2\times\frac{1}{60}+2\times\frac{1}{3600}$을 나타내기도 하였다. 육십진법과 위치적기수법을 완전하게 사용하고 있기 때문에 육십진소수라고 부를 수 있으며, 밑수가 10이냐 60이냐의 차이만 있을 뿐 Stevin의 소수와 구조적으로 동일하다. 이것은 현대의 소수가 주는 것과 동일한 수준의 탁월한 계산 능력을 바빌로니아 문명에게 제공하였다(Boyer, 1968, p.45).[4)]

십진법과 함께 위치기수법도 도외시한다면, 소수 개념은 '단위의 체계적인 세분할을 통한 정확한 측정활동'이다. 이 활동의 기원은 무엇이었을까? 그것은 단위를 나눌 때 10이나 60과 같은 어떤 밑수를 기준으로 하지 않는, 비체계적이고 단순한 분할이었을 것이다. 어떤 양을 어떤 단위로 재었을 때 남은 자투리를 재기 위하여 원래의 단위를 분할하여 하위 단위를 만드는 일이었을 것이며, 그것은 그리 대단한 수학적 사고를 필요로 하지 않는, 거의 모든 도량형 체계에서 행해진 일이었을 것이다.

2. 소수 개념의 발달

단순한 측정 활동에서부터 완성된 소수까지의 발달 과정을 상상해보자. 첫째 단계는 단위의 비체계적인 분할을 통한 측정 활동이다. 어떤 양을 주어진 단위로 재고 나서 자투리가 남았을 때, 이 자투리를 재기 위하여 원래의 단위를 세분하여 하위 단위를 만드는 것은 일상사에서 자연스럽게 실행되었을 것이다. 예를 들면 $2\mathrm{m}+\frac{1}{3}\mathrm{m}$ 이다. 이러한 측정활동의 수준은 분수에 대응되는 것으로서 고대 이집트 문명의 수체계의 근저를 이루었다(Cajori, 1899; p.20). 그러나 분수는 계산 특히 덧셈에서 매우 복잡하다. $(2\mathrm{m}+\frac{1}{3}\mathrm{m})+(3\mathrm{m}+\frac{1}{5}\mathrm{m})$의 계산은 단순치 않다. 이 단계에서 당시 수학자들이 했을법한 생각을 추측해본다. "분수는 다루기가 불편하다 … 어려움은 분모가 다를 때 생긴다 … 그렇다면 분모를 하나만 쓰기로 통일하면 해결될까? 아니다 … 충분히 큰 수, 예를 들어 60을 분모로 쓰기로 정한다고 해도, $\frac{1}{60}$보다 작은 자투리가 반드시 생길 것이고 이는 60보다 큰 분모를 필요로 하기 때문이다. 그렇다면 여러 종류의 분모를 사용하되 그들 사이에 규칙성이 있는 것들로 하자 … " 이 단계에서 분모를 $10, 10^2, 10^3, \cdots$ 등 10의 거듭제곱으로 제한했던 것은 중국문명이고(Ronan, 1981), $60, 60^2, 60^3, \cdots$ 등으로 제한한 것이 바빌로니아 문명이다(Boyer, 2000, p.45). 이 단계를 둘째 단계 즉 '단위의 체계적 분할을 통한 측정 활동' 이라고 부를 수 있을 것이며, 비로소 소수다운 측정활동의 단계로 볼 수 있다. 마지막 셋째 단계는 위치기수법을 따라서 소수를 형식적으로 표기하는 단계이다. 예를 들어 '1미터 3데시미터 5센티미터 5밀리미터'는 1.355미터로, 1시간 20분 30초는 $1^{p}20'30''$로 표기하는 단계이다.

지금까지 서술한 소수의 역사적 발생 맥락으로서의 '단위의 체계적인 세분할을 통한 측정활동'을 자연수나 분수의 맥락으로서의 측정활동과 비교해보자. 자연수는 단일한 단위를

4) 바빌로니아의 육십진소수와 구분하기 위하여 현재의 소수를 '십진소수'라고도 부른다.

통한 측정이다. 측정값 3m가 의미하는 것은 측정단위는 m이고 그것을 잰 값은 3이다. 분수는 2차 단위를 통한 측정이다. 측정값 $\frac{2}{3}$m에서는 1차 단위는 m이고 2차 단위는 $\frac{1}{3}$m이다. $\frac{1}{3}$m로 재었을 때의 수값은 2이고 m로 재었을 때의 수값은 $\frac{2}{3}$이다. 1차 단위와 2차 단위 두 개가 개재되는 측정 과정을 표상하는 것이 분수이므로, $\frac{2}{3}$m속에는 두 수값이 모두 포함되어 있다. 소수는 다중 단위를 통한 측정이다. 측정값 2.34m에서 1차 단위는 m이며 이때의 수값은 2이고, 2차 단위는 $\frac{1}{10}$m이며 이때의 수값은 3이고, 3차 단위는 $\frac{1}{100}$m이며 이때의 수값을 4이다. 3m와 $\frac{2}{3}$m 그리고 2.34m 모두 각각이 속한 측정과정을 효과적으로 표상하고 있으며, 각각의 수값 3과 $\frac{2}{3}$와 2.34는 단위량과 측정량 사이의 비(比)이다.

앞서 서술한 소수의 발달 단계 가운데 둘째 단계, 즉 위치적 기수법이 채용되기 직전 단계에서는 측정량을 어떻게 표기했을까? 이 질문은 소수의 명수법의 문제로 우리를 이끈다. 고대 중국에서 길이의 십진도량형 체계는 다음과 같다. 1尺=10寸, 1寸=10分, 1分=10釐, 1釐=10髮, 1髮=10毫(Ronan, 1981, p.48). 이러한 체계에 따라 중국에서는 1.355척을 '1尺 3寸 5分 5釐'로 읽었다. 현재 우리가 쓰는 할(割), 푼(分), 리(釐)라는 이름도 여기에 기원을 둔다. 그렇지만 현재 할푼리는 비율의 의미이며 길이의 단위로는 쓰이지 않는다. 그렇다면 할, 푼, 리, … 를 자연수의 십, 백, 천, … 과 같이 소수의 자리값을 나타내는 명수체계로 볼 수 있는가? 다시 말해서 십, 백, 천 등이 그 자체로 숫자(기호)가 아니라 자리값을 나타내는 말(음성)이듯이 할, 푼, 리 등도 마찬가지인가? 추측컨대, 그 기원은 고대 중국에서의 길이에 대한 십진 도량형 체계에서 출발하여 점차적으로 일반적인 소수 자리값의 명칭으로 점차 바뀌었던 것 같다. '2.34척'으로 표기하기 이전에는 '2척3할4푼'으로 읽은 것이 분명하기 때문에(Ronan, 1981) '2.34미터'라면 '2미터 3할4푼'이 된다. 이제 할, 푼, 리, 등은 어떤 단위의 뒤에 붙어서 그것의 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$등의 값을 나타내는데 것, 즉 비율의 의미가 됨과 동시에 소수의 자리값을 나타내는 이름이 된다.

이러한 추측은 바빌로니아 문명이 발명한 육십진소수의 명수법이 뒷받침한다. 육십진소수에서 $\frac{1}{60}$을 나타내는 '분(minute)'과 $\frac{1}{3600}$을 나타내는 '초(second)'는 시간에도 쓰이고 각도에도 쓰인다. 예를 들어 '1시간20분30초'는 '1시간$+(\frac{20}{60}+\frac{30}{3600})$시간'을 나타내며 '132도20분30초'는 '132도$+(\frac{20}{60}+\frac{30}{3600})$도'를 의미한다. 분, 초는 특정한 양에서의 단위의 이름이 아니라, 육십진소수에서 자리값의 이름인 셈이다. 유럽이 육십진소수 자리값의 이름을 가진 것은 Stevin이 소수를 발명했던 16세기 이전까지 오랜 동안 그것을 써왔기 때문이다. 이렇게 본다면 영어가 소수의 자리값의 이름을 갖지 못하는 것은 당연하며,[5] 대신 소수를 발명하고 발전시켰던 중국이 그 이름, 즉 할, 푼, 리, … 등을 갖는 것은 당연하다.

5) 영어에서는 a tenth, a hundredth, … 정도이다.

역사적으로 명수 표현이 먼저 등장했으며 위치적기수법에 의한 소수 표현은 소수의 완성시기에 등장했다는 것은 교육적으로 시사하는 바가 있다. 그것은 소수 자리값에 따른 위치적기수법 이전에 명수를 써서 읽는 경험이 필요하다는 점이다.

3. 소수 개념의 본질

이상의 고찰을 통하여 소수개념의 본질을 다음과 같이 규정할 수 있다. 0.234를 예로 들어서 말한다면 $0.234=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}$, 즉 분모가 10, 100, 1000, ⋯ 등의 순서로 증가하는 분수들의 합, 즉 '십진분수'이다.6) 십진분수는 자연수의 위치적 십진기수법과 구조적으로 일치하게 되는 큰 장점을 가진다. 이로 인하여 소수의 계산법은 자연수와 큰 차이가 없고, 자연수 계산법을 거의 그대로 가져올 수 있게 되었다. 23.45와 9.876의 덧셈과 곱셈은 자연수 2345와 9876과의 덧셈 곱셈과 본질적으로 동일하게 된다.

이제 소수는 자연수와 분리된 수가 아니라 자연수를 십진위치기수법에 따라 확장한, 자연수보다 넓은 수체계로 보아야 한다. 예를 들면 $333=3\times10^2+3\times10^1+3\times10^0$ 에서 밑 10의 지수를 음수 방향으로 확장하면 $3\times10^2+3\times10^1+3\times10^0+3\times10^{-1}+3\times10^{-2}+3\times10^{-3}$, 즉 333.333이 된다. 이것은 일종의 형식불역의 원리이기도 하다. 자연수의 확장으로서의 십진분수로서의 소수 개념을 수학적으로 형식화하여 명확하게 규정하면 다음과 같다(김응태, 박승안, 1989, p.187).

(1) 집합 $T=\{0, 1, 2, \cdots 8, 9\}$에 대하여,

10을 부정원(indeterminate)으로 가지는 형식적인 무한합

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 10^i = \cdots + a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 + a_{-1}10^{-1} + \cdots + a_{-n}10^{-n} + \cdots$$

(단 $a_i \in T$, $m, n \in Z$, $m \geq -n$ 이고 유한개를 제외한 모든 i에 대하여 $a_i = 0$)

전체의 집합 D를 소수라고 정의한다. 예를 들어 $a_1=2$, $a_2=3$, $a_{-1}=4$, $a_{-2}=9$ 인 경우는 소수 23.45를 나타낸다.

(2) 집합 D와 그 위에서의 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의하자.

D의 임의의 원소 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i$와 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \cdot 10^j$에 대하여

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i + \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \cdot 10^j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k + b_k) \cdot 10^k$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \cdot 10^j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot 10^k, \text{ 단 } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$$

이렇게 정의하면 D는 십진위치기수법을 따라 표시된 자연수의 집합을 확장한 양의 소수 전체의 집합이 된다. 이 논문에서 지금부터는 위와 같이 형식적으로 규정된 소수의 개념을 "10을 밑으로 하는 다항식"이라고 부를 것이다.

십진위치기수법이라는 측면에서는 동일하지만, 자연수와 소수는 역사상 발생 시기에는

6) 소수의 영어 표현은 'decimal fraction'이고 이를 직역하면 십진분수이다.

큰 차이가 있다. 수학사에서 자연수의 십진표기법이 발명된 시기는 9세기경이고, 소수가 발명된 시기는 16세기로서 두 시기 사이에는 700년의 간격이 있다(Cajori, 1896). 자연수의 십진표기법과 소수표기법은 논리적으로는 동일한 형식임에도 불구하고 왜 수학자들은 소수표기법을 자연수의 십진표기법보다 700년이나 더 늦게 발명했는가? 십진표기법에서 자연수 방향으로 무한히 상승하는 것만큼 음수 방향으로 무한히 하강하는 것 또한 수학적으로 다룰 수 있고 가치로울 것이라는 착상을 하는데 700년이라는 시간이 걸렸다는 사실을 매우 기이한 일이다. '실수의 소수표현'이라는 말에서처럼(정동명, 조승제, 1993), 소수는 실수의 한 가지 표현 방법에 불과한 것으로 치부되는 경향이 있지만, 실은 수학사적으로 매우 힘들게 이룩한 성과인 것이다.

현대적인 수 개념은 무엇인가? Toeplitz에 따르면 19세기에 실수 개념이 완성되기 이전에 그것의 기초가 된 현대적인 수 개념은 '선분이나 넓이와 같은 양은 무제한으로 정확하게 측정될 수 있다는 것' 다시 말하면 '무한소수'의 관념이다. 무한소수는 십진위치기수법을 음수 방향으로 확장하는 일과 밀접한 관련을 가진다. 이 무한 소수 개념에 의하여 실수 개념이 완성되었다. 이에 따라 그 전까지는 할 수 없었던 수와 크기를 동일시할 수 있게 된 것, 다시 말하면 '수직선'이 가능케 되었다. 그 이전까지는 피타고라스 학파에 의한 '통약불가능한 두 선분의 발견'이후, 이산량과 연속량, 수와 크기 사이의 분리 다시 말하면, 산술과 기하학의 분리시킨 그리스 수학의 전통 아래에 있었다.

비록 무한소수는 아니지만, 초등수학에서 다루는 소수 또한 이러한 중요한 교육적 가치를 가진다고 볼 수 있다. 소수는 이산량에 기초한 자연수와 자연수 사이의 비(比) 개념의 범위에 갇혀있던 수 개념의 한계를 극복한 현대적인 실수 개념의 기원으로써, 이에 힘입어 그리스 수학 이후 서로 분리되었던 이산량과 연속량, 산술과 기하라는 두 영역의 통합이 비로소 가능하게 되었다(Toeplitz, 1896; Moreno-Armella & Waldeg, 2000). 수학의 역사가 말해주는 것은 표기법 상의 구조적인 일치에도 불구하고, 소수는 자연수와 근본적으로 구별되는, 자연수를 넘어서는 수 개념이라는 사실이다.

Ⅲ. 소수의 본질에 관한 서로 대비되는 두 관점 : 자연수의 순서쌍의 동치류 vs. 밑수 10의 다항식

1. 브루소가 파악한 소수 개념의 본질

어떤 교수학적 상황을 구성하기 위해서는 그 상황을 통해서 도달하고자 하는 본질적 개념이 무엇인지 먼저 규명되어야 한다. 소수의 개념적 측면이 다양하다 할지라도, 그 다양성을 모두 통일하는 하나의 추상적이고 본질적인 개념이 분명하게 규정되어야 한다. 앞 장에서 소수의 역사적 발생과정의 탐색을 통한 소수 개념의 본질을 '10을 밑수로 가지는 다항식'으로 규정하였다. 만약 소수 개념의 본질을 이와 다르게 파악한다면 소수를 지도하는 교수학적 상황도 다르게 구성될 것이다.

브루소는 소수 개념의 본질에 관한 독특한 해석을 바탕으로 소수를 지도하는 교수학적 상황을 제시하였다. 브루소는 소수 개념의 역사적 발생과정을 그의 원형수학적 개념, 의사수학적 개념, 수학적 개념의 틀에 따라 분석하였으며, 그 결과 소수 개념의 본질은 '자연수의 순서쌍의 동치류'로 규정하였다. 이러한 소수 개념을 수학적으로 형식화하여 명확하게

규정하면 다음과 같다(홍진곤, 1999).

(1) 자연수의 집합 N과 정수의 집합 Z의 곱집합 Z×N 위에서의 동치 관계 ~를 다음과 같이 정의한다.

$(a,n)+(b,p) \Leftrightarrow a\cdot 10^p = b\cdot 10^n$, (a,n)의 동치류를 $\frac{a}{10^n}$으로 나타낸다.

(2) $\mathrm{D}=\mathrm{Z}\times\mathrm{D}/\sim$ 위에서 다음 연산이 정의된다.

$(a,n)+(b,p)=(a\cdot 10^p + b\cdot 10^n,\ n+p)$

$(a,n)\times(b,p)=(a b,\ n+p)$

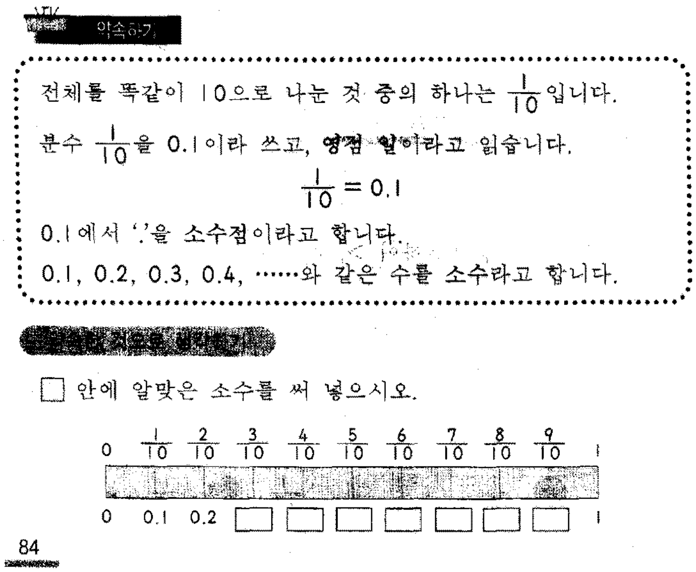
(3) $(\mathrm{N},0)\subset\mathrm{D}$ 이고 D위의 연산은 자연수의 연산을 확장한 것이다.

예를 들어 생각해보자. 0.23은 무엇인가? 이 관점에 따른다면 그것은 $\frac{23}{100}$이다. 동치관계에 의하여 $\frac{23}{100}=\frac{230}{1000}=\cdots$이고 이들 모두는 0.23으로 유일하게 표현된다. $0.2=\frac{2}{10}$이고 $0.02=\frac{2}{100}$, $0.002=\frac{2}{1000}$, $0.023=\frac{23}{1000}$, $0.234=\frac{234}{1000}$ 등이다. 즉 소수는 분자가 자연수이고 분모는 10의 거듭제곱인 분수가 된다. $23=\frac{23}{10^0}$이므로 자연수는 소수의 특수한 유형으로서 소수의 집합에 포함된다.

브루소의 교수학적 상황론은 어떤 수학적 지식의 역사발생적 상황을 단계적으로 경험시키고자 하는 시도이다(우정호, 2000, p.449). 브루소는 소수의 본질적 개념인 '자연수의 순서쌍의 동치류'의 역사발생적 기원을 측정활동으로 보고, 그러한 본질을 추구하는 세 가지 교수학적 상황을 고찰하였다. 즉 ① 미터법에 따른 측정치로서의 소수, ② 디엔에스 블록에 의한 넓이 측정, ③ 종이 한 장의 두께 재기 상황이 그것이다. 브루소는 ①과 ②는 소수 개념의 본질을 드러내지 못하는 제한적이고 부적절한 것으로 규정하고, ③을 바람직한 상황으로 규정한다. 여기서 주의해야할 것은 브루소가 ①과 ②가 제한적인 것이라고 비판하는 이유이다. 그것은 ①과 ②가 '자연수의 순서쌍의 동치류'로서의 소수의 본질을 제대로 추구하지 못하기 때문이지, 그와는 다른 소수의 본질을 추구했기 때문은 아니다. ①과 ②가 추구하는 소수의 본질은 여전히 '자연수의 순서쌍의 동치류'이다.

여러 연구에 의하면, 우리나라 제 7차 교과서에서 소수의 개념과 연산을 지도하는 상황은 ①에 가깝다(변희현, 2005; 홍진곤, 1999; 강현영 외, 2009). 소수 개념이 도입되는 부분은 미터법을 이용한 측정 상황과 본질적으로 다르지 않으며, 계산 알고리즘도 자연수의 계산 알고리즘에 소수점을 처리하는 절차가 덧붙여진 것으로 나타나고 있다. 예를 들어 제 7차 교과서에서는 십진 수모형을 써서 소수를 나타낼 때 이 같은 관점을 반영하는 특징적인 현상이 나타난다. 그것은 모형 벽돌(block), 막대(stick), 판(plate), 상자(cube) 중의 어느 하나가 단위 1을 나타내는 것으로 고정되지 않고, 그 장면에서 다루고 있는 소수가 소숫점 아래 몇째 자리인 수인가에 따라서 바뀐다는 점이다. 그 장면에서 다루는 소수의 최소 단위가 벽돌(block)로 고정되고 순차적으로 인근 상위 모형으로 올라가는 방식이다. 그러므로 단위 1을 나타내는 모형은 막대가 될 수도, 판이나 상자가 될 수도 있다([그림 1], [그림 2], [그림 3]). 이러한 방식은 소수를 소수점이 붙은 자연수로 보는, 즉 소수를 자연수로

환원시키는 관점의 파생물이다.


약속하기

전체를 똑같이 10으로 나눈 것 중의 하나는 $\frac{1}{10}$입니다.

분수 $\frac{1}{10}$을 0.1이라 쓰고, **영점 일**이라고 읽습니다.

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

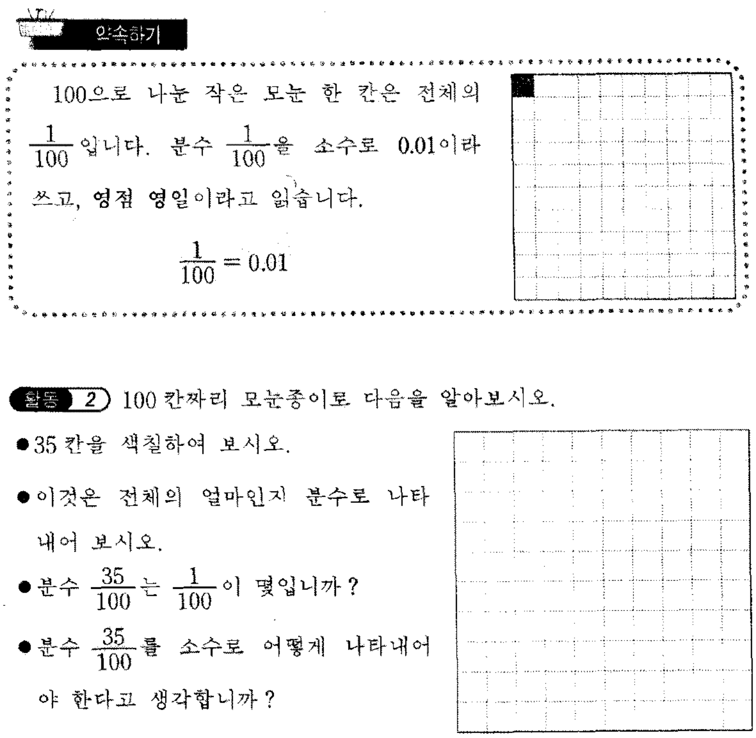
0.1에서 '.'을 **소수점**이라고 합니다.

0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ……와 같은 수를 **소수**라고 합니다.

□ 안에 알맞은 소수를 써 넣으시오.

84

[그림 1] 막대가 1을 나타내는 경우


약속하기

100으로 나눈 작은 모눈 한 칸은 전체의 $\frac{1}{100}$입니다. 분수 $\frac{1}{100}$을 소수로 0.01이라 쓰고, **영점 영일**이라고 읽습니다.

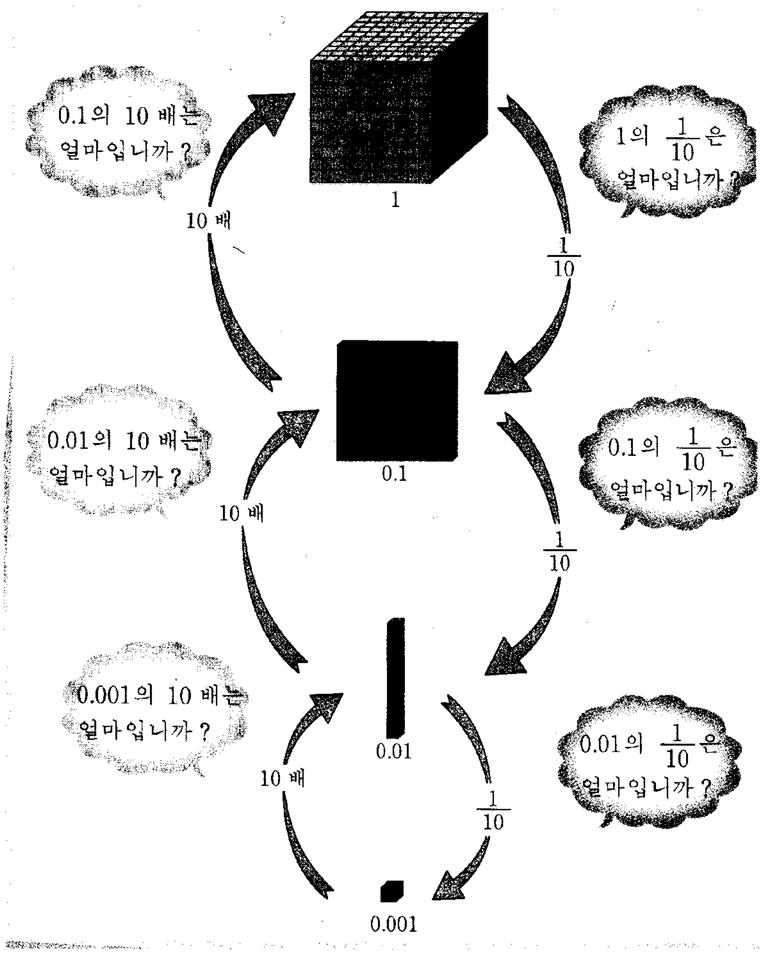
$$\frac{1}{100} = 0.01$$

활동 2 100칸짜리 모눈종이로 다음을 알아보시오.

- 35칸을 색칠하여 보시오.
- 이것은 전체의 얼마인지 분수로 나타내어 보시오.
- 분수 $\frac{35}{100}$는 $\frac{1}{100}$이 몇입니까?
- 분수 $\frac{35}{100}$를 소수로 어떻게 나타내어야 한다고 생각합니까?

[그림 2] 판이 1을 나타내는 경우

활동 1 1, 0.1, 0.01, 0.001 사이의 관계를 알아보시오.



[그림 3] 상자가 1을 나타내는 경우

2. 초등수학 소수 단원 내용의 연역적 체계를 통한 두 관점의 비교

그렇다면 우리 교과서 소수 도입 단원의 개선 방향은 무엇인가? 우리 교과서가 따르고 있는 방법의 제한점을 극복하고자 하는 탐구 방향은 두 가지가 있다. 하나는 브루소가 규정한 소수 개념의 본질을 받아들이면서 '종이 한 장의 두께를 재는 측정활동'을 대안으로 받아들이는 것과, 다른 하나는 소수 개념의 본질 자체를 브루소와는 다르게 파악하는 것이다. 후자는 전혀 새로운 방향이 된다.

이 논문에서는 브루소와는 다른 방향에서 대안을 모색하고자 한다. 그것은 앞 장에서 역사적 고찰을 통하여 소수의 본질로서 도출된 '십진분수' 혹은 '밑수 10에 대한 다항식'으로서의 소수 개념이다. 이 방식을 따라서 소수를 정의한다면, '$0.23=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$'이 된다. 지금까지 다룬 소수의 본질에 관한 두 관점을 초등 수학 수준에서 대비시켜 보고자 한다. 구별하기 쉽게 말한다면, 0.25가 무엇인가라는 질문에 대하여 하나는 $\frac{25}{100}$으로, 다른 하나

는 $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$으로 파악한다. 소박한 연역적 방법, 즉 정의에서부터 나머지를 도출하는 방식을 써서 초등 수학에서 소수의 도입 부분에 관련된 내용의 논리적 체계를 비교하고자 한다(비록 초등 교과서에서는 그렇게 다루지 않지만 비교를 명료하게 하기 위하여). 이는 측정 활동을 통하여 구체적인 지도 상황으로 구현하기 이전의 논리적 분석에 해당한다(<표 1>).

<표 1> 초등수학 소수 단원 내용의 연역적 체계

소수의 본질	방안 I. 밑수 10의 다항식 (0.25=2/10+5/100)	방안 II. 자연수의 순서쌍의 동치류 (0.25=25/100)
정의 1	0.1은 $\frac{1}{10}$이다. 0.2는 0.1이 2개, 0.3은 0.1이 3개, … , 0.9는 0.1이 9개이다.	
정리 1	$0.2=\frac{2}{10}$, $0.3=\frac{3}{10}$, … , $0.9=\frac{9}{10}$이다. <증명> $\frac{1}{10}$이 2개이면 $\frac{2}{10}$라는 사실과 정의 1에 의하여 성립한다.	
정의 2	0.01은 $\frac{1}{100}$이다. 0.02는 0.01이 2개, 0.03은 0.01이 3개, …, 0.09는 0.01이 9개이다.	
정리 2	$0.02=\frac{2}{100}$, $0.03=\frac{3}{100}$, …, $0.09=\frac{9}{100}$이다. <증명> $\frac{1}{100}$이 2개이면 $\frac{2}{100}$라는 사실과 정의 2에 의하여 성립한다.	
정리 3	0.01이 10개이면 0.1이다. 0.1의 $\frac{1}{10}$은 0.01이다. <증명> $\frac{1}{100}$이 10개이면 $\frac{1}{10}$이므로 0.01이 10개이면 0.1이다. $\frac{1}{10}$의 $\frac{1}{10}$은 $\frac{1}{100}$이므로 0.1의 $\frac{1}{10}$은 0.01이다.	
정의 3	0.25는 0.1이 2개이고 0.01이 5개이다.	0.25는 0.01이 25개이다.
정리 4	0.25=0.2+0.05 <증명> 정의 3과 정의 1, 2에 의하여 성립한다.	$0.25=\frac{25}{100}$ <증명> 정의 3과 정의 2에 의하여 성립한다.
정리 5	$0.25=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$ <증명> 정리 4와 정리 1, 2에 의하여 성립한다.	$0.25=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$ <증명> $\frac{25}{100}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$라는 사실과 정리 4에 의하여 성립한다.
정리 6	$0.25=\frac{25}{100}$ <증명> $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}$라는 사실과 정리 5에 의하여 성립한다.	0.25=0.2+0.05 <증명> 정리 5와 정리 1, 2에 의하여 성립한다.
정리 7	0.25는 0.01이 25개이다. <증명> $\frac{25}{100}$는 $\frac{1}{100}$이 25개라는 사실과 정리 6, 정의 2에 의하여 성립한다.	0.25는 0.1이 2개이고 0.01이 5개이다. <증명> 정리 6과 정의 1, 2에 의하여 성립한다.

두 방안의 핵심적인 차이점은 소수점 아래 두 자리수 이상의 소수를 정의하는 방법(정의 3)에 있다. 이 차이는 결코 사소하지 않다. 정의 3부터 정리 7까지의 논리적인 순서는 서로 정반대이다. 다시 말하면 한 쪽의 출발점은 다른 쪽의 종착점이다.

각 방안에 입각하여 전개한 논리적 체계를 비교해보면, 가장 두드러지는 차이는 자리값의 원리에 있다. 방안 I은 소수의 자리값의 구별을 정의로 채택하고 출발한 반면, 방안 II에서는 그것이 제일 나중에 도출되는 정리로 처리된다. 방안 II의 정의 3(0.25는 0.01이 25개)은 소수를 자연수화하는 경향을 유발할 수 있고, 따라서 자연수의 자리값과 소수의 자리값을 혼동하도록 만들 위험이 있다.7)

이미 앞서 소수의 역사적 발달에 관한 장에서 다루었듯이, 소수에서 자리값의 원리는 본질적인 개념 요소이다. 각 자리에 해당하는 수를 별도로 다루어주는 것은 매우 중요하며, 바로 그것이 자연수나 분수와 구별되는 소수의 본질이다. 바빌로니아 문명의 육십진소수의 발명과 사용에서 알 수 있듯이, 그것의 위력은 자리값의 원리와 함께 사용되었다는 것, 즉 $\frac{1}{60}$자리, $\frac{1}{3600}$자리의 값을 별도로 다루는데서 생겨났다. $0.23=\frac{23}{100}$과 같이 자리값을 무시하고 소수를 정의하는 것은 소수의 본질을 잃는 것이다.

이렇다보니 자리값별 전개를 다루는 장면에서 방안 II는 취약하다. 방안 II를 따르고 있는 우리나라 제 7차 교과서의 경우도 4.28=4+0.2+0.08과 같은 소수의 자리값별 전개를 다루는 부분에서, 논리적으로 설명하기보다는 선언적인 방식을 취하고 있다(강현영 외, 2009, p.472).

소수를 자리값별로 인식하는 것은 소수의 계산 알고리즘과도 밀접하다. 초등수학 4~5학년의 주요 내용 중의 하나인 소수의 덧셈과 곱셈 알고리즘에서 가장 중요한 것은 자리값을 이해하고 그 값에 따라 각 자리수를 변별하고 인식하는 것이다. 덧셈에서는 자리수별로 더해야만 한다. 곱셈에서는 각 자리수들끼리 엇갈려 곱한 다음, 소수점을 올바른 위치에 찍어야 한다. $0.25=\frac{25}{100}$과 같이 정의하는 방안 II는 이런 측면에서 불리하다.

그러나 곱셈 알고리즘의 실행이 아니라 이해라는 측면에서 본다면 방안 II가 더 용이한 측면도 있다. 현재 우리나라 제 7차 교과서가 $0.25=\frac{25}{100}$과 같이 분수로 변환함으로써 곱셈 알고리즘을 도출하는데 유리한 측면을 가진다.

자리값의 원리를 강조하는 방안 I은 0의 처리에 있어서도 유리하다. 0의 수학적 의미는 "특정한 자리가 비어있음"이고, 이는 이미 자연수에서 배운 것이다. 이것을 소수에도 자연스럽게 확장할 수 있다. 예를 들어 0.20=0.2+0.00 이므로 0.20=0.2가 된다. 자리값의 원리를 통하는 길이 소수점 아래에서의 0에 대한 학생들의 혼동을 해소하는 효과적인 방법일 것이다.

IV. 측정활동을 통한 소수의 본질적 개념 지도 방안

브루소는 역사발생적 · 인식론적인 면에서 소수의 기원이 측정활동이라는 관점에 입각하여 '자연수의 순서쌍의 동치류'라는 소수 개념의 본질을 규명하고, 그러한 본질을 효과적

7) 0.25는 0.01이 25개 이므로 '영점 이십오'라고 읽을 위험이 있다.

으로 다룰 수 있는 교수학적 상황으로서 '종이 한 장의 두께를 재는 측정 상황'을 제시하고 있다(우정호, 2000). 그와 동시에 본질적인 소수 개념을 다루지 못하는 두 가지 지도 상황, 즉 '미터법을 이용한 측정 상황'과 '디엔에스 블록을 이용한 넓이 측정 상황'을 비판하였다. 하지만 여기서 주의할 것은 이 두 상황 역시 측정 활동에 속한다는 사실이다. 이 두 상황의 문제점은 측정 활동이 아니라서가 아니라 소수 개념의 본질을 효과적으로 드러내지 못한다는 점에 있다. 중요한 것은 소수 개념의 본질을 어떻게 규정하느냐이며, 그에 따라 측정 활동의 내용이 결정된다.

브루소의 사례에서도 알 수 있듯이 '소수의 기원은 측정활동에 있다'라는 언설은 그 자체로는 구체적인 의미를 가질 수 없다. 측정활동은 매우 다양하고 수준도 제각각이기 때문에, 그 활동 안에 어떤 개념을 담을지가 명확히 규정되지 않는다면 그것은 유동적인 상태에 있다.

이 논문에서는 소수의 본질적 개념을 '밑수 10의 다항식'으로 규정하였다. 그렇다면 이것을 내재적으로 구현할 수 있는 측정 활동은 무엇인가? 그것은 "단위의 체계적인 십진분할을 통하여 필요한 만큼 정확도를 높여가는 측정활동"이다(변희현, 강흥규, 2003; 우정호, 변희현, 2005, p.292). 예를 들어 길이에 대한 십진 단위 체계 미터-데시미터-센터미터를 써서 순차적으로 측정한 결과 2개의 미터, 3개의 데시미터, 4개의 센티미터를 얻었다고 하자. 그 측정값은 $2\text{m}+3\text{dm}+4\text{cm}$이고 분수로 나타내면 $2\text{m}+\frac{3}{10}\text{m}+\frac{4}{100}\text{m}$이다. 이것을 2.34m라고 쓴다.

이 장에서는 '십진체계로 분할된 다중단위를 통한 순차적인 측정 활동'을 중심으로 '밑수 10의 다항식'이라는 소수 개념을 지도하는 방안을 구체적으로 구안하여 2차시 분량의 지도안으로 제시하고자 한다. <표 2>는 차시별 내용을 요약한 것이다.

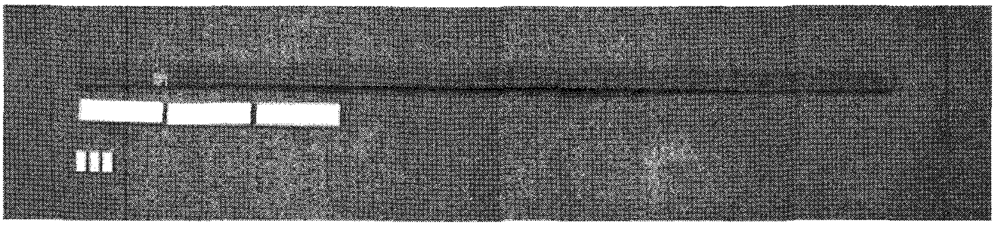
<표 2> 차시별 내용 요약

차시	주제	주요 활동
1	양팔의 길이는 정확히 얼마나 될까?	• '해', '달', '별'자로 양팔의 길이 재기 • 해, 달, 별 사이의 단위 환산하기 • 양팔의 길이를 해 단위로 통일하여 십진분수 전개로 나타내기 • 각 모둠의 양팔의 길이를 비교하기
2	우리들의 키는 몇 미터일까?	• m, dm, cm, mm자로 키 재기 • m, dm, cm, mm 사이의 단위 환산하기 • 키를 십진분수 전개로 나타내고, 그것을 다시 소수로 나타내기 • 각 모둠의 키를 소수로 나타내어 비교하기 • 두 소수를 수직선에 표시하여 크기 비교하기

1. (1차시) 양팔의 길이는 정확히 얼마나 될까?

제 1차시에서는 학생들은 임의 단위 막대를 정하고 그것을 십진법에 따른 세분할을 통하여 하위 단위를 생성하면서, 그것을 이용하여 벽에 표시된 자신의 양팔의 길이를 점차

정교하게 측정한다. 임의 단위의 이름을 '해'(1단위), '달'($\frac{1}{10}$단위), '별'($\frac{1}{100}$단위)이라는 이름으로 표현한다. 각각의 자는 교사가 제작하여 학생들에게 순차적으로 제공하였다([그림 4]).



[그림 4] 해, 달, 별 자

처음에는 '해'자만 주고 측정을 하도록 하고, 그 다음 남은 자투리를 어떻게 하면 좋을지 생각해 보도록 한다. 이에 학생들이 보다 작은 자의 필요성을 느끼고, 그것을 '해'자를 십등분해서 만들도록 자연스럽게 유도한다. 그리고 상호간의 단위 환산을 충분히 연습한 뒤 단위를 해로 통일하여 십진분수 전개로 표현한다. 그 다음 모둠의 양팔의 길이를 모두 십진분수를 전개하여 표로 정리한 다음 크기를 비교한다. 1차시 학습·지도안은 [그림 5], [그림 6], [그림 7]에 제시하였다.

<제 1 차시>양팔의 길이는 정확히 얼마나 될까?

◆ 모둠에서 키가 가장 큰 사람을 뽑습니다. 선생님이 나누어준 자를 사용하여 그 사람의 양팔의 길이를 재어 봅시다. 선생님이 각 모둠에 나누어 준 자의 이름은 해라고 합니다.

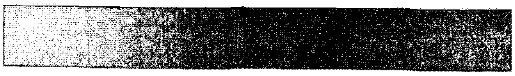
☞ 선생님이 양팔을 벌려 왼쪽 손 끝에서 오른쪽 손 끝까지의 길이를 벽에 표시하는 시범을 직접 보인다. 다른 자는 사용하지 않도록 한다.

◇ 먼저 양팔의 길이를 벽에 표시합니다.

◇ 해자로 재어 봅시다. 몇 해입니까?

( )해

◇ 남은 자투리를 재려면 어떻게 하면 될까요?



☞ 더 작은 단위가 필요함을 깨닫도록 한다. 그러면 더 작은 단위는 '해'자를 몇 개로 자르면 좋을지 다양하게 답하도록 한다. 그리고 우리가 평소 10진법을 쓰는 경우를 예를 들어10등분으로 의도한다. 또한 해 다음에 붙이면 좋은 이름을 생각하여 보도록 하여 위와 같이 정리한다.

◇ '달'자로 자투리를 재어 봅시다. 몇 달입니까?

( )달

◇ 양팔의 길이는 몇 해. 몇 달입니까?

( )해 ( )달

◇ 남은 자투리를 재려면 어떻게 하면 될까요?

[그림 5] 1차시 학습·지도안(1)

◇ '별'자로 자투리를 재어 봅시다. 몇 별입니까?

( )별

◇ 양팔의 길이는 몇 해, 몇 달, 몇 별입니까?

( )해 ( )달 ( )별

◆ 다음 빈 칸에 알맞은 수를 넣으시오.

1해 = ( )달 1해 = ( )별

1달 = ( )해 1별 = ( )해

3달 = ( )해 5별 = ( )해

☞ 자연수나 분수로 나타내도록 한다.

◆ 양팔의 길이를 보기와 같이 분수로 나타내어 봅시다.

<보기>

2해 5달 3별 = $(2+\frac{5}{10}+\frac{3}{100})$해

( )해

☞ 2해 5달 3별 = 2해 $\frac{5}{10}$해 $\frac{3}{100}$해 = $(2+\frac{5}{10}+\frac{3}{100})$해

◆ 다음 칸에 각 모둠의 양팔의 길이를 알맞게 쓰시오.

모둠	해	달			
1				해	
2				해	
3				해	

[그림 6] 1차시 학습·지도안(2)

4				해	
5				해	
6				해	

◇ 몇 모둠의 양팔의 길이가 가장 긴가요? (　　)모둠

◇ 몇 모둠의 양팔의 길이가 가장 짧은가요? (　　)모둠

◇ 왜 그렇게 생각하였습니까?
☞'해' 단위부터 비교해야함을 말하도록 유도한다.

◇ 양팔의 길이가 긴 순서대로 표 안에 순위를 쓰시오.

[redacted] 최홍만과 킹콩의 양팔의 길이를 재어보았더니, 최홍만은 2해 6달 4별, 킹콩은 2해 8달 2별이었습니다.
각각은 몇 해인지 분수로 나타내어 보시오.
최홍만 (　　　　　　)해
킹콩 (　　　　　　)해

누구의 양팔의 길이가 더 깁니까? (　　　)
왜 그렇게 생각합니까?

[그림 7] 1차시 학습·지도안(3)

2. (2차시) 우리들의 키는 몇 미터일까?

2차시에서는 m(미터), dm(데시미터), cm(센티미터), mm(밀리미터)를 도입하여 각 모둠에 속한 한 사람의 키를 mm까지 측정하여 본다. mm자는 직접 만들기 어려우므로 cm자에 눈금만 표시하여 만들어 측정할 수 있도록 한다. 1차시에서와 같이 단위 환산을 충분히 연습한 뒤 단위를 m로 통일하여 십진분수로 전개한 다음 간단히 나타내는 방법으로 소수를 도입한다. 2차시 학습 · 지도안은 [그림 8], [그림 9], [그림 10]에 제시하였다.

<제 2차시> 우리들의 키는 몇 미터일까?

◈ 1미터(m)자를 사용하여 모둠에서 키가 가장 작은 사람의 키를 재어 봅시다.
☞눈금이 없는 1m 길이의 자를 제공한다.
◇ 먼저 키를 벽에 표시합니다.

◇ 미터자로 키를 재어 봅시다. 몇 m입니까?
(　　)m

◇ 남은 자투리를 재려면 어떻게 하면 될까요?

[redacted]

◇ 데시미터자로 자투리를 재어 봅시다. 몇 dm입니까?
(　　)dm

◇ 키는 몇 m 몇 dm입니까?
(　　)m (　　)dm

◇ 남은 자투리를 재려면 어떻게 하면 될까요?

[redacted]

◇ 센티미터자로 자투리를 재어 봅시다. 몇 cm입니까?
(　　)cm

◇ 키는 몇 m 몇 dm 몇 cm입니까?
(　　)m (　　)dm (　　)cm

[그림 8] 2차시 학습·지도안(1)

◇ 남은 자투리를 재기 위해서 보다 작은 자가 필요합니다. 어떻게 만들고 이름은 뭐라고 부를까요?

[redacted]

◇ 밀리미터자로 자투리를 재어 봅시다. 몇 mm입니까?
(　　)mm

◇키는 몇 m 몇 dm 몇 cm 몇 mm입니까?
(　　)m (　　)dm (　　)cm (　　)mm

◈ 다음 빈 칸에 알맞은 수를 넣으시오.

1m = (　　)dm	1m = (　　)cm	1m = (　　)mm
1dm = (　　)m	1cm = (　　)m	1mm = (　　)m
9dm = (　　)m	3cm = (　　)m	47mm = (　　)m
6dm = (　　)m	28cm = (　　)m	795mm = (　　)m

◈ 키가 몇 m인지 보기와 같이 분수로 나타내어 봅시다.

<보기>
2m 5dm 3cm 8mm = $(2+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000})$m

(　　　　　　)m

☞ 2m 5dm 3cm 8mm =(2)m $(\frac{5}{10})$m $(\frac{3}{100})$m $(\frac{8}{1000})$m = $(2+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000})$m

[그림 9] 2차시 학습·지도안(2)

키를 잰 것을 보다 간단하게 나타내는 방법이 있습니다.

$$(1+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000})m = 1.538m$$

1.538과 같이 나타낸 수를 소수라고 하고 일점 오삼팔이라고 읽습니다.

다음을 읽어 보시오.

5.124m = (   )m

6.914m = (   )m

다음 소수를 분수로 전개하시오.

2.487m =

1.553m =

2.987m =

1.238m =

◈ 다음 칸에 각 모둠의 키를 알맞게 쓰고 순위를 매기시오.

모둠			
1	m	m	
2	m	m	
3	m	m	
4	m	m	
5	m	m	
6	m	m	

[그림 10] 2차시 학습·지도안(3)

3. 실험적 학습 · 지도안의 특징

앞 절에 제시된 단위의 십진 세분할을 통한 순차적인 측정 활동을 중심으로 구안된 학습 · 지도안은 다음과 같은 특징을 가진다.

첫째, 소수 개념의 본질은 보다 정확한 측정을 위하여 기본 단위를 세분할하는 것이다. 어떤 임의 단위를 1로 정의한 다음, 보다 정확한 측정을 위하여 그것을 십진법에 따라 세분할함으로써 하위 단위를 생성하는 경험을 제공하였다. 이는 0.1, 0.01, 0.001, … 사이의 10배 관계 혹은 $\frac{1}{10}$배 관계를 이해하는 초석이 될 수 있다.

둘째, 십진 분수 전개를 먼저 다루고 이로부터 귀납적으로 위치적 기수법에 따른 소수의 형식적 표현을 다루었다. 현재 우리 교과서에서는 십진 분수 전개를 다루지 않고 있으며 그 대신 0.24=0.2+0.04와 같은 전개식만을, 그것도 소수의 형식적 표현을 배운 후에 다루고 있다.

셋째, 다양한 소수의 해석을 다룬다. 예를 들어 0.751미터는 다음과 같이 다양하게 해석될 수 있다. 3미터+7데시미터+5센티미터+1밀리미터, $(3+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}+\frac{1}{1000})$미터, $\frac{3751}{1000}$미터 등등. 이 방식은 「Mathematics in Context」 교과서에서 나타난다(Gravemeijer et al., 1997, p.56).

넷째, 소수를 처음 배울 때부터 자연수와 소수를 함께 다룬다. 이를 통하여 소수의 자리값 체계는 자연수의 십진법 체계를 자연스럽게 확장한 것이라는 것을 부각시킬 수 있다.

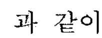
다섯째, 위치적 십진기수법을 따라 형식적으로 표현하기 이전에 임의 단위의 명수체계(해-달-별, 혹은 m-dm-cm-mm)를 따라서 읽는 활동을 배치하였다.

여섯째, 비(比)개념으로서의 소수 개념이 두드러진다. 이 학습 · 지도안에서의 측정활동은 주어진 단위와 그 세분 단위로 전체 양을 구성해 가는 측정 과정으로서, 단위량과 전체량 사이의 관계에 주목하게 한다(우정호, 변희현, 2005, p.292). 두 양이 제시되는 것에서부터 출발하여 수치화하는 과정이 순차적으로 다루어지기 때문이다. 미터라는 단위량과 측정량 사이의 비 관계가 부각된다.

V. 결 론

수학 교사나 연구자들에게 있어서 소수 개념의 본질과 그것의 효과적인 지도 방안에 관한 질문은 쉽지 않은 것이다. 왜냐하면 소수는 익숙하면서도 매우 단순한 개념으로 여겨지는 나머지 뚜렷이 분석할만한 내용이 있어 보이지 않을 뿐만 아니라, 여러 교과서의 소수 지도 내용들은 살펴보아도 그들 사이의 차별적인 특징들이 두드러지게 부각되지 않기 때문이다. 무엇보다도 어렵게 만드는 것은 소수가 여러 개념적 측면을 가진다는 사실이다. 변희현(2005)에 의하면 소수는 측정수, 십진기수법, 분수, 비, 작용소, 통약불가능성, 무한근사, 실무한, 계산수의 9가지 개념 요소를 가지며, 강현영 외(2009)에 의하면 등분할 소수, 양 소수, 조작 소수, 비율 소수, 몫 소수, 배 소수 등의 개념적 측면을 가진다.

바람직한 소수 지도에서는 이렇듯 다양한 측면을 모두 고려해야 함과 동시에, 그들이 서로 분리되지 않고 복합적으로 연결될 수 있도록 해야 한다(강현영 외, 2009). 여기서 새로운 난점이 생겨난다. 다양한 여러 측면들을 어떻게 하나로 통합할 것인가? 다양성을 경험시키는 것은 쉬운 일이지만, 그것을 통합시키는 것은 어려운 일이다. 왜냐하면 다양한 개념적 측면을 하나로 연결할 수 있는 또 다른 본질적 개념이 필요하기 때문이다. 그렇지 않고 단지 연결성만을 강조한다면, 그것은 구호의 차원에 머물게 되고, 소수의 다양한 측면들이 서로 분리된 채 별개의 영역으로 남을 위험이 있다. 소수에 대한 브루소의 연구는 이러한 문제에 대한 해답중의 하나이다(우정호, 2000). 그는 소수의 역사적 발생 과정에 대한 분석을 통하여 소수 개념의 본질을 '자연수의 순서쌍의 동치류'로 파악하였으며, 그것을 구현할 교수학적 상황으로서 '종이 한 장의 두께를 재는 측정활동'을 제시한 바 있다.

여기에서 다음과 같은 의문이 생긴다. 브루소가 제안한 소수의 본질적 개념만이 역사적 발생 과정에 대한 분석을 통해서 도달할 수 있는 유일한 것인가? 역사발생적 원리란 한 개인의 학습의 순서는 인류의 역사적인 학습 순서를 따라야만 한다는 것이지만, 역사적 자료와 사실에 대한 해석에는 다양한 관점이 존재할 수 있으므로 인류의 학습 순서에 대해서는 다양한 대답이 있을 수 있다. 예를 들어 역사적인 발생과정에서 볼 때, 소수는 제곱근 값을 구하고 표현하는 것과 밀접했다(Cajori, 1896). 중국의 유휘는 「구장산술」의 주석서에서 완전제곱수가 아닌 자연수의 제곱근을 계산하여 소수로 나타내었다. 바빌로니아 문명은 2의 제곱근을 60진소수로 셋째 자리까지 계산하여  과 같이 나타내었다. 이것을 현대 기수법으로 나타내면 1:24,51,10이 되고, 십진소수로 바꾸면 약 1.414222이다(Boyer, 1968, p.45). 그렇지만 현재 어떤 초등수학 교과서에서도 제곱근을 소수 지도의

맥락으로서 다루고 있지 않으며, 그럴 수도 없다. De Morgan에 의한다면, "복리계산표에서의 편리함이 소수 자체의 기원이었다는 것은 거의 확실하지만"(Cajori, 1896, 151), 이것 또한 초등수학에서 소수 도입의 맥락으로 채용하는 것은 불가능하다.

이 논문은 역사적 발생과정에 대한 고찰에서 출발하여 소수 개념의 본질 규명하고 그것을 지도하기 위한 교수학적 상황 구성이라는 순서를 거쳤다는 점에서 브루소를 모방한 것이다. 하지만 소수 개념의 본질을 '밑수 10에 대한 다항식'으로 파악했다는 점에서 브루소와 다르다. 그리고 측정활동에 입각하여 그러한 본질을 효과적으로 구현할 수 있는 지도 방안을 구체적인 학습 · 지도안 형태로 제시하였다. 이 학습·지도안이 기초하고 있는 측정 활동의 유형은 '보다 정확한 측정치를 얻기 위한 단위의 십진 세분할을 통한 순차적인 측정 활동'이다(우정호, 변희현, 2005, p.292).

이 실험적 학습·지도안은 다음과 같은 특징을 가진다.

첫째, 학생들은 어떤 길이를 측정하는 과제를 부과받고, 그들 스스로 단위를 십진법에 따라 세분할함으로써 하위 단위를 생성하고 그를 통하여 보다 정확한 측정을 수행하는 조작을 경험할 수 있도록 하였다.

둘째, 십진 분수 전개를 먼저 다루고 이로부터 귀납적으로 위치적 기수법에 따른 완성된 소수 표현을 다루었다.

셋째, 「Mathematics in Context」 교과서에서와 같이 다양한 소수의 해석을 다룬다. 예를 들어 0.751미터는 다음과 같이 다양하게 해석될 수 있다. 3미터+7데시미터+5센티미터+1밀리미터, $(3+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}+\frac{1}{1000})$미터, $\frac{3751}{1000}$미터 등.

넷째, 소수를 처음 도입할 때, 0.01이나 0.001등과 같은 '단위 소수'부터가 아니라 2.345 등과 같은 '자연수+소수' 형태부터 다룬다. 이것은 소수가 일차 단위로 측정하고 남은 자투리를 보다 작은 하위 단위를 써서 정확하게 측정하는 과정에서 발생된 것임을 드러낸다. 또한 소수의 기수법 체계는 자연수의 기수법 체계를 자연스럽게 확장한 것이라는 것을 부각시킬 수 있다.

다섯째, 위치적 십진기수법을 따라 형식적으로 표현하기 이전에 임의 단위의 명수체계(해-달-별, 혹은 m-dm-cm-mm)를 따라서 읽는 활동을 제공하였다.

여섯째, 이 실험적 학습 · 지도안에서 채택한 측정활동은 주어진 일차 단위와 그것의 세분할에 의한 하위 단위들을 통한 점차적인 과정으로서, 두 양이 제시되는 것에서부터 출발하여 수치화하는 과정이 순차적으로 다루어진다. 즉 단위량과 전체량 사이의 관계, 즉 비 개념에 주목하게 된다(우정호, 변희현, 2005, p.292).

이 논문에서는 소수의 본질에 관한 새로운 해석을 바탕으로 그것을 지도하는 상세한 학습·지도안 2차시 분량을 이론적으로 구안하였다. 완전한 소수 단원을 이루기 위해서는 소수의 대소 관계, 소수와 분수 사이의 변환, 무게나 넓이 등과 같은 다양한 측정량에 대한 응용 등을 다루는 추가적인 학습·지도안이 개발되어야 한다. 이렇게 이론적으로 개발된 학습·지도안은 교수실험을 통하여 실행되고 검증되어야 한다. 이를 위한 후속 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

강현영, 박문환, 박교식 (2009). 우리나라 초등학교 수학에서의 소수 도입에 대한 분석과 비판. **학교수학, 11**(3), 463-477.

강흥규, 변희현 (2003). 소수의 역사적 기원과 의의. **한국수학사학회지, 16**(3), 69-76.

교육인적자원부 (2005a). **수학 3-나.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2005b). **수학 4-나.** 서울: 천재교육.

김수정, 방정숙 (2007). 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석. **한국초등수학교육학회지, 11**(1), 1-22.

김응태, 박승안 (1989). **현대대수학 제 2판.** 서울: 이우출판사.

김용태, 임해경, 안병곤, 신봉숙 (2001). 소수 개념 지도에 관한 연구. **수학교육학연구, 11**(1), 223-238.

변희현 (2005). **소수 개념의 교수학적 분석.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교출판부.

우정호, 변희현 (2005). 소수 개념의 교수학적 분석. **수학교육학연구, 15**(3), p.289-313.

정동명, 조승제 (1993). **실해석학개론.** 서울: 경문사.

홍진곤 (1999). 교수학적 상황론에 기초한 소수 지도 상황 분석. **학교수학, 1**(2), 417-431.

Boyer, C. B., & Merzbach (1968). *A history of mathematics.* New York: Wiley. 양영오, 조윤동 역 (2002). **수학의 역사(상).** 서울: 경문사.

Cajori, F. (1896). *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching.* New York: The Macmillan Company.

Dewey, J., & McLellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic.* New York: D. Appleton company.

Eves, H. (1979). *Great moments in mathematics.* Washington: Mathematical Association of America. 허민, 오혜영 역 (1994). **수학의 위대한 순간들.** 서울: 경문사.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrech: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K., Boswinkel, N., Meyer, M. R., & Shew, J. A. (1997). Measure for measure. In National Center for Research in Mathematics Education & Freudenthal institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

Moreno-Armella, L. E,, & Waldeg, G. (2000). An epistemological history of numbers and variation. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective.* The Mathematical Association of America.

Ronan, C. A. (1981). *The shorter science & civilization in China: An abridgement of Joseph*

Needhan's original text vol. 2. 이면우 역 (2000). **중국의 과학과 문명(축약본 2).** 서울: 까치.

Sarton, G. (1935). The first explanation of decimal fractions and measures. *Isis, 23*(1), 153-244.

Temple, R. K. (1986). *China: land of discovery and invention.* Wellingborough, UK: Patrick Stevens. 과학세대 역 (1993). **그림으로 보는 중국의 과학과 문명.** 서울: 까치.

Toeplitz, O. (1963). *The calculus: A genetic approach.* Chicago: The University of Chicago Press.

<Abstract>

A Study on the Learning-Teaching Plan about a Essential Concept of Decimal Fraction Based on Decimal Positional Notation

Kang, Heung Kyu[8)]

In this thesis, we designed a experimental learning-teaching plan of 'decimal fraction concept' at the 4-th grade level. We rest our plan on two basic premises. One is the fact that a essential concept of decimal fraction is 'polynomial of which indeterminate is 10', and another is the fact that the origin of decimal fraction is successive measurement activities which improving accuracy through decimal partition of measuring unit. The main features of our experimental learning-teaching plan is as follows.

Firstly, students can experience a operation which generate decimal unit system through decimal partitioning of measuring unit.

Secondly, the decimal fraction expansion will be initially introduced and the complete representation of decimal fraction according to positional notation will follow.

Thirdly, such various interpretations of decimal fraction as 3.751m, 3m+7dm+5cm+1mm, $(3+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}+\frac{1}{1000})$m and $\frac{3751}{1000}$m will be handled.

Fourthly, decimal fraction will not be introduced with 'unit decimal fraction' such as 0.1, 0.01, 0.001, $\cdots$, but with 'natural number+decimal fraction' such as 2.345.

Fifthly, we arranged a numeration activity ruled by random unit system previous to formal representation ruled by decimal positional notation.

A experimental learning-teaching plan which presented in this thesis must be examined through teaching experiment. It is necessary to successive research for this task.

Keywords: decimal fraction, Brousseau, measurement, positional notation, sexagecimal fraction

논문접수: 2011. 03. 18
논문심사: 2011. 04. 11
게재확정: 2011. 04. 16

8) natin@gjue.ac.kr