한국초등수학교육학회지 15(1) 77-93. 2011. 04. 30
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(1) 77-93. April 30. 2011.

초등학생을 위한 문제해결 과제로서의 지수귀문도의 해결 방안 연구

박교식[1]

지수귀문도는 지금으로부터 약 300여년 전에 최석정이 <구수략>에서 소개한 마법 육각진이다. 작금에 지수귀문도에 관심이 모아지고 있고, 마법수가 76부터 110인 경우에 지수귀문도가 존재할 수 있다는 것이 증명되기는 했지만, 그것을 만드는 일반적인 방법은 아직도 알려지지 않았다. 현재까지는 컴퓨터를 이용하여 지수귀문도를 만드는 방법이 알려져 있을 뿐이다. 본 연구에서는 마법수가 88~92, 94~98인 경우에 한정하여, 컴퓨터의 도움을 받지 않고, 초등학교에서도 문제해결 활동의 일환으로 지수귀문도를 만들 수 있는 방안으로 교호법을 제안한다. 이를 위해 교호법이 작동되는 수학적 이론을 소개하고, 그것을 이용해서 만들 수 있는 지수귀문도를 제시한다. 본 연구에서는 교호법을 통하여 초등학생들도 자신만의 지수귀문도를 만들 수 있을 것으로 기대한다.

[주제어] 교호법, 마법육각진, 문제해결, 수학사, 지수귀문도(地數龜文圖)

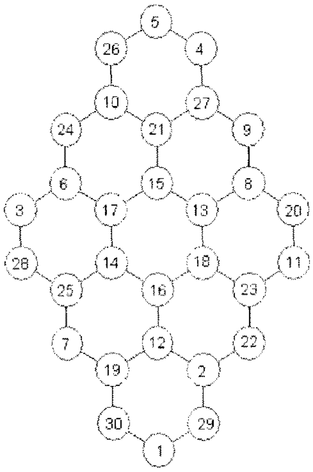
Ⅰ. 서 론

수학사에서 적절한 소재를 찾아 초등학교 수학 교수·학습에서 유용하게 활용할 수 있다는 연구(정동권, 1995, 1998; 김상화, 1999, 이성균, 2005; 정선화, 2006)가 더러 있지만, 그러한 소재를 우리나라 수학사에서 찾고 있는 경우는 보기 어렵다. '우리 것을 찾아 가르치자'는 주장(최영한, 1998)도 있지만, 아직까지는 우리나라 수학사에서 소재를 찾아 그것을 초등학교 수학 교수·학습에서 활용하려는 노력은 상대적으로 빈약하다고 할 수 있다. 그것은 소재를 찾기가 쉽지 않고, 소재를 찾아도 그것에 대한 교수학적 분석이 선행되어야 하기 때문이다. 교수학적 분석의 첫째는 수학적 분석이다. 본 연구에서는 우리나라 수학사에서 '지수귀문도(地數龜文圖)'라는 소재를 찾아, 그것을 초등학교 수학 교수·학습에 활용할 목적으로 교수학적인 관점에서 수학적으로 분석하는 것에 초점을 맞추고 있다. 지수귀문도는 최석정(崔錫鼎, 1646~1715)의 <구수략(九數略)>에 실려 있는 것으로, [그림 1]과 같이 1부터 30까지의 수를 한 번씩 사용하여, 각각의 육각형을 이루는 6개의 수의 합이 모두 93이 되도록 만든 것이다. 이와 같은 수 93을 흔히 '마법수(magic number)'라고 한다.

초등학교 수학 교수·학습에서 지수귀문도를 우리나라 수학사의 특별한 유산으로 소개하는 것도 필요하지만, 더 나아가 그것을 초등학생들의 문제해결 활동을 위한 과제로 활용하는 것을 생각해 볼 필요가 있다. 그러나 지수귀문도를 만드는 일반적인 방법이 알려져

1) 경인교육대학교 수학교육과

있지 않기 때문에, 아직까지는 그러한 시도를 하고 있는 연구를 찾아 볼 수 없다. 본 연구에서는 그러한 시도가 가능하도록 지수귀문도를 만드는 준-일반적인 방법을 제안한다. 그 방법을 '준-일반적'이라 한 것은, 그것이 특정한 마법수에 한정해서 일반적으로 작동하기 때문이다. 이 방법을 활용한 구체적인 교수 · 학습 프로그램을 만들어 초등수학교육의 실제에 적용하는 것은 본 연구의 범위를 벗어나기 때문에, 여기서는 그것에 대해서는 개략적으로만 논의하며, 주로 지수귀문도를 만드는 준-일반적인 방법에 초점을 맞춘다.



[그림 1] 최석정의 지수귀문도

지수귀문도는 그 독창적인 형태 때문에, 그리고 그것을 구하는 일반적인 방법이 알려져 있지 않기 때문에, 작금의 우리나라에서 적지 않은 관심의 대상이었다. 그러한 관심은 김용운(1974)에서 처음으로 드러난 것으로 보인다. 그 이후 지수귀문도는 수학사 분야에서 김용운, 김용국(1977, 1982, 2003, 2009), 윤태수(1988), 김태성, 김원규(1992), 장혜원(2006, 2010), 정해남과 허민이 번역한 <구수략>(2006)에서 소개하고 있다. 수학교육 분야에서는 오윤용, 한상근(1993), 최영한(1998), 한상근(1998), 이경언(2010)에서 소개하고 있다. 한편, 정보공학 분야에서는 김동진, 오영환(1989), Choe, Choi, Moon(2003), Povolotskiy(2009)가 컴퓨터를 사용하여 지수귀문도를 만드는 방법을 탐색하고 있다. 최희웅(1989)은 독특하게 <상서>라는 전문지에서 최석정의 지수귀문도를 소개하고, 아울러 자신이 만든 지수귀문도를 소개하고 있다. 지수귀문도는 세인의 관심을 받기도 했다(전용훈, 1999a, 1999b).

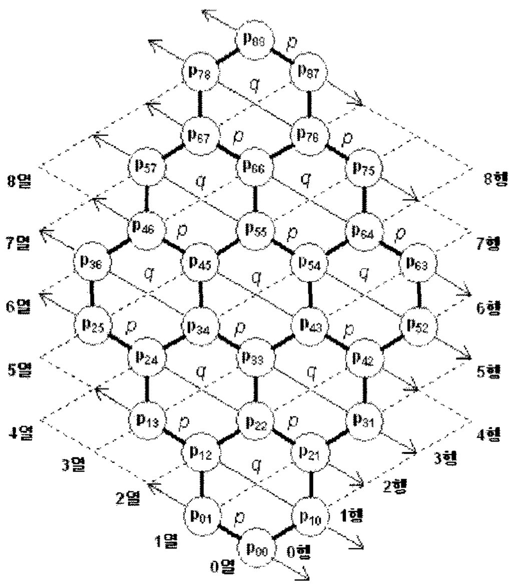
지수귀문도에서 마법수가 93으로 한정되는 것은 아니다. 김동진, 오영환(1989)에 의하면, 지수귀문도의 마법수로 가능한 것은 최소 76에서 최대 110까지이다. 그들은 마법수가 77에서 108까지인 경우를 실제로 구했다고 했고, 마법수가 77~80, 91~94, 105~108인 경우의 해를 한 개씩 예시하고 있다. 이경언(2010), 전용훈(1999a), 정해남과 허민이 번역한 <구수략>, 장혜원(2006)은 마법수가 90(김용수 발견), 91(이지원 발견), 95(이지원 발견)인 지수귀문도를 소개하고 있다.[2] 본 연구에서는 마법수가 88~92, 94~98인 경우에 한정하여, 컴퓨터를 사용하지 않고도, 초등학교에서 지수귀문도를 만들 수 있는 방안을 제안한다. 이러한

2) 오윤용, 한상근(1993), 최영한(1998), 한상근(1998)은 Bača(1992)가 마법수가 92인 해를 하나 제시했다고 보고하고 있지만, 실제로 Bača(1992)에서 그것을 찾을 수는 없다.

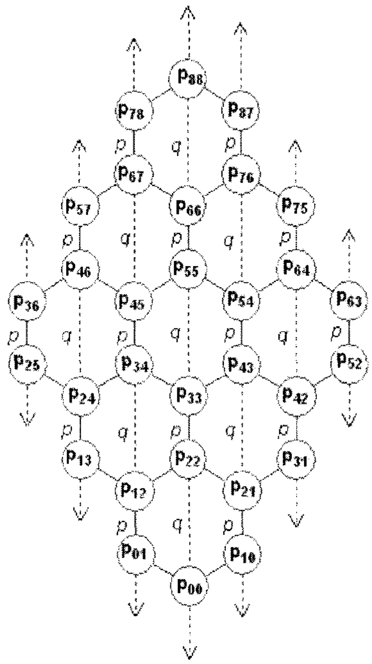
논의를 위해 본 연구에서 제안하는 방법을 '교호법(交互法)'이라고 부르기로 한다.

Ⅱ. 교호법의 이해

교호법을 설명하기 위해 먼저 [그림 1]의 지수귀문도에서 수를 지우고 공란을 만든 뒤, [그림 2]와 같이 기호를 붙이기로 하자. 여기서 행을 이용하든 아니면 열을 이용하든 상관없다. 본 연구에서는 행을 이용하기로 한다. [그림 2]에는 9개의 육각형이 있다. 각각의 육각형을 이루는 6개의 수의 합이 M일 때, 그 수가 마법수이다. 각각의 육각형에서 6개의 수를 두 개씩 쌍을 이루어 그 합이 [그림 2]와 같이 각각 p, q, p가 되도록 만든다. 즉, $p+q+p=M$이다. [그림 2]에서는 사선을, [그림 3]에서는 수직인 선을 이용한다는 점에서, 전자를 H-교호법, 후자를 V-교호법이라고 하자.



[그림 2] 지수귀문도($p+q+p$)에 기호 붙이기



[그림 3] V-교호법

H-교호법과 V-교호법에서는 모두 1부터 30까지의 수를 각각 한 번씩만 사용할 수 있기 때문에 $p \neq q$이다. $p=q$이면 예를 들어 [그림 2]에서 P34+P33=P33+P31이 되어 P34=P31이 되어 모순이다. 또, 1과 30을 모두 사용해야 하므로 p와 q가 동시에 31보다 크지 않아야 하고, 동시에 31보다 작지 않아야 한다. 본 연구에서는 1부터 30까지의 수를 각 행에서 연속된 두 수를 1개의 쌍으로 묶어 그 합이 교대로 p 또는 q가 되도록 만들기 때문에 교호법이라고 부른 것이다. 예를 들어 [그림 2]에서 6행의 네 수 P67, P66, P64, P63의 경우

(P67+P66)=p, (P66+P64)=q, (P64+P63)=p

가 되어야 하고, [그림 3]에서는 가장 위의 육각형에서

(P67+P78)=p, (P66+P88)=q, (P76+P87)=p

가 되어야 한다. 이와 같은 방식으로 1부터 30까지의 수를 한 번씩만 사용하여 P00부터 P88까지의 수를 확정할 수 있으면, 마법수가 $p+q+p=M$인 지수귀문도를 만들 수 있다.

여기서 논의에 필요한 용어 몇 가지를 정의하기로 하자. 그러나 '교호법'이라는 용어를 비롯하여 본 연구에서 사용하는 용어를 초등학생들에게 사용할 필요는 없다. 그런 용어가 아직 일반화된 용어가 아니기도 하지만, 초등학생들에게는 그런 용어를 사용하지 않고도 설명하는 것이 가능하기 때문이다.

먼저 $p+q+p$를 M의 분할(partition)이라고 하자. 또 $p>q$인 경우를 A형 분할, $p<q$인 경우를 B형 분할이라고 하자. 예를 들어 M=91일 때

91=31+29+31, 91=32+27+32

등은 91의 A형 분할이고

91=30+31+30, 91=29+33+29

등은 91의 B형 분할이다. 91=31+29+31이라고 하자. 즉, p=31, q=29이다. 30과 합해 31이 되는 수는 1이다. 따라서 30과 1을 연결한다. 이것을 30→1과 같이 표기하기로 한다. 다음 1과 합하여 29가 되는 수는 28이다 즉, 1→28이다. 이와 같이 연결하면 다음과 같이 연속하여 나타나는 두 수의 합이 교대로 31과 29가 되는 배열이 존재한다.

(30→1)→(28→3)→(26→5)→(24→7)→(22→9)→(20→11)→(18→13)
→(16→15)→(14→17)→(12→19)→(10→21)→(8→23)→(6→25)→(4→27)
→(2→29)

이 배열에서 합이 31이 되는 경우(즉, 합이 p)는 소괄호를 사용하여 묶었고, 합이 29(즉, 합이 q)가 되는 경우는 그대로 두었다. 사실상 어떤 수에서 시작하든, 그 수의 앞뒤로 합이 교대로 31 또는 29가 되는 수를 이어 가면 이러한 배열을 만들 수 있다. 본 연구에서는 논의의 편의상 가장 큰 수인 30에서 시작하기로 한다. 이 배열에서는 1부터 30까지의 수가 한 번씩 모두 사용되었다. 이때 이 배열에서 30개의 수가 모두 연결되어 있다는 의미에서 배열의 성분의 수는 1, 그 길이는 30이라고 하자. 이 배열은 합이 p(=31)가 되는 쌍에서 시작하여 합이 p(=31)가 되는 쌍으로 끝난다. 이러한 배열을 $p \to p$ 배열이라고 하자. 그런데 이 배열은 분할 $p+q+p$에서의 $p \to p$ 배열이라는 것에 주의해야 한다. 실제로 위의 배열은 분할 89=29+31+29에서도 동일하게 얻어진다. 이때 p=29, q=31이다. 즉, 위의 배열을 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이때는 합이 q(=31)가 되는 쌍에서 시작하여 q(=31)가 되는 쌍으로 끝나므로, 그것은 분할 $q+p+q$에서 $q \to q$ 배열이 된다. 이와 같이 분할 $p+q+p=M$과 그것에서 p와 q를 서로 바꾸어 얻은 분할 $q+p+q=M-p+q$를 서로 여분할(complementary partition)이라고 부르자.

30→(1→28)→(3→26)→(5→24)→(7→22)→(9→20)→(11→18)→(13→16)
→(15→14)→(17→12)→(19→10)→(21→8)→(23→6)→(25→4)→(27→2)
→29

다음으로 91=30+31+30이라고 하자. 즉, p=30, q=31이다. 이 경우에도 다음과 같이 성분의 수가 1, 그 길이가 30인 배열이 존재한다. 합이 30이 되는 경우는 소괄호를 사용하여 묶었고, 합이 31이 되는 경우는 그대로 두었다. 이 배열은 31이 되는 쌍에서 시작하여 31

이 되는 쌍으로 끝나므로, $q \rightarrow q$ 배열이다. 한편, 91=30+31+30의 여분할은 92=31+30+31이고, 그것은 길이가 30인 $p \rightarrow p$ 배열을 가진다.

30→(1→29)→(2→28)→(3→27)→(4→26)→(5→25)→(6→24)→(7→23)
→(8→22)→(9→21)→(10→20)→(11→19)→(12→18)→(13→17)→(14→16)
→15

모든 분할에서 배열의 성분의 수가 항상 1인 것은 아니다. 예를 들어 91=32+27+32라고 하자. 즉, p=32, q=27이다. 그러면 다음과 같이 세 개의 성분이 존재한다. 각 성분에서 합이 32가 되는 경우는 소괄호를 사용하여 묶었고, 합이 27이 되는 경우는 그대로 두었다. 성분(component)을 간단히 C로 나타내기로 하자. 그리고 길이가 긴 성분부터 차례로 C1, C2, C3이라고 하자. C1과 C2는 모두 길이가 12인 $p \rightarrow p$ 성분이다. 길이가 12인 $p \rightarrow p$ 성분을 간단히 $p12p$로 나타내기로 하자. C3은 길이가 6인 $q \rightarrow q$ 성분으로, 간단히 $q6q$로 나타낼 수 있다. 한편, 91=32+27+32의 여분할은 86=27+32+27이고, 그것은 성분으로 $q12q$ 두 개와 $p6p$를 가진다.

[C1] (30→2)→(25→7)→(20→12)→(15→17)→(10→22)→(5→27)
[C2] (28→4)→(23→9)→(18→14)→(13→19)→(8→24)→(3→29)
[C3] 1→(26→6)→(21→11)→16

91=29+33+29라고 하자. 즉, p=29, q=33이다. 그러면 다음과 같이 두 개의 성분이 존재한다. 각 성분에서 합이 29가 되는 경우는 소괄호를 사용하여 묶었고, 합이 33이 되는 경우는 그대로 두었다. C1과 C2는 모두 $q15p$이다. 또는 $p15q$라고 할 수도 있다. 화살표를 반대 방향으로 하면 29가 되는 쌍에서 시작하여 33이 되는 쌍으로 끝나기 때문이다. 한편, 91=29+33+29의 여분할은 95=33+29+33이고, 그것은 $q15p$ (또는 $p15q$) 두 개를 성분으로 가진다.

[C1] 30→(3→26)→(7→22)→(11→18)→(15→14)→(19→10)→(23→6)
→(27→2)
[C2] 29→(4→25)→(8→21)→(12→17)→(16→13)→(20→9)→(24→5)
→(28→1)

또한 [그림 2]에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$12p+(P78+P57+P36+P10+P31+P52)=465$$

그런데 P78+P57+P36+P10+P31+P52의 최솟값과 최댓값은 각각

$$21(=1+2+3+4+5+6),\ 165(=25+26+27+28+29+30)$$

이므로 $300 \leq 12p \leq 444$이고, 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$25 \leq p \leq 37$$

또, [그림 2]에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$2p+9q+(P67+P46+P25+P13+P21+P42+P63+P75)$$

그런데 P67+P46+P25+P13+P21+P42+P63+P75의 최솟값과 최댓값은 각각

$$36(=1+2+3+4+5+6+7+8),\ 212(=23+24+25+26+27+28+29+30)$$

이므로 $253 \le 2p+9q \le 429$이다. 위에서 $25 \le p \le 37$이므로 $179 \le 9q \le 379$이고, 이것을 정리하여 정수만 택하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$20 \le q \le 42$$

그런데, p와 q가 동시에 31보다 크지 않아야 하고, 동시에 31보다 작지 않아야 하므로, A형 분할에서 q의 최댓값은 31이고, B형 분할에서 q의 최솟값은 31이다.

[그림 2]의 H-교호법과는 다르게 [그림 3]의 V-교호법에서는 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$14p+(\mathrm{P00}+\mathrm{P88})=465$$

그런데 P00+P88의 최솟값과 최댓값은 각각

$$3(=1+2),\ 59(=29+30)$$

이므로 $406 \le 14p \le 462$이고, 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$29 \le p \le 33$$

또, [그림 3]에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$2p+9q+(\mathrm{P13}+\mathrm{P57}+\mathrm{P78}+\mathrm{P01}+\mathrm{P87}+\mathrm{P10}+\mathrm{P75}+\mathrm{P31})$$

그런데 (P13+P57+P78+P01+P87+P10+P75+P31)의 최솟값과 최댓값은 각각

$$36(=1+2+3+4+5+6+7+8),\ 212(=23+24+25+26+27+28+29+30)$$

이므로 $253 \le 2p+9q \le 429$이다. 위에서 $29 \le p \le 33$이므로 $187 \le 9q \le 371$이고, 이것을 정리하여 정수만 택하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$21 \le q \le 41$$

V-교호법에서도 p와 q가 동시에 31보다 크지 않아야 하고, 동시에 31보다 작지 않아야 하므로, A형 분할에서 q의 최댓값은 31이고, B형 분할에서 q의 최솟값은 31이다.

초등학생들도 마법수의 분할을 택하고, 그 분할에 따른 성분을 구하고, 그리고 그것이 $p \to p$, $q \to q$, $p \to q$ 성분의 어느 것에 해당하는지 쉽게 판별할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 교호법을 이용하여 지수귀문도 구하기

[그림 2]에서 0행과 8행은 p 하나로 이루어진다. P00에서 P01(또는 그 역), 그리고 P87에서 P88(또는 그 역)로 가는 경로의 길이는 2이다. 경로를 이루는 두 수의 합이 p이므로, 이 경로를 간단히 $p2p$ 경로라고 하자. 합이 p가 되는 두 수의 쌍에서 시작하여 합이 p가 되는 두 수의 쌍으로 끝나기 때문이다. 사실상 $p2p$ 경로는 두 수의 쌍에서 시작하여 바로 그 두 수의 쌍에서 끝난다. 이러한 방법으로 pnq 경로와 qnq 경로를 정의할 수 있다. 1행과 7행의 경로는 모두 길이가 3이므로 $p3q$ 경로(또는 $q3p$ 경로)이다. 2행, 4행, 6행은 모두 $p4p$ 경로이다. 3행과 5행은 모두 $q4q$ 경로이다. [그림 2]에서 $p4p$ 경로 세 개를 각각 $p4p(1)$, $p4p(2)$, $p4p(3)$이라고 하자. 이들은 각각 2행, 4행, 6행의 어느 하나를 나타낸다. $p2p$ 경로 두 개를 각각 $p2p(1)$, $p2p(2)$라고 하자. 이들은 각각 0행, 8행 어느 하나를 나타낸다. $q4q$ 경로 두 개를 각각 $q4q(1)$, $q4q(2)$라고 하자. 이들은 각각 3행, 5행의 어느 하나를 나타낸다. $p3q$ 경로 두 개를 각각 $p3q(1)$, $p3q(2)$라고 하자. 이들은 각각 1행, 7행의 어느 하나를 나타낸다. $p \to q$ 경로는 $q \to p$ 경로이기도 하므로, 명백히 $p3q=q3p$이다.

각 행의 왼쪽을 '상', 오른쪽을 '하'라고 할 때, 1행과 7행을 제외한 나머지 행은 모두 대칭적이므로 각각 상하로 뒤집을 수 있다. 예를 들어 6행에서

(P67→P66)→(P64→P63)을 (P63→P64)→(P66→P67)

로 뒤집을 수 있다. 또, 6행의 (P67→P66)→(P64→P63)을 4행의 (P46→P45)→(P43→P42)와 교환해도 $p \to p$의 배열은 변하지 않는다. 6행과 4행을 상하로 뒤집은 것과 교환해도 마찬가지이다. 이런 식으로 0행과 8행은 그대로 또는 상하를 뒤집어서 서로 교환할 수 있고, 2행, 4행, 6행도 그대로 또는 상하를 뒤집어서 서로 교환할 수 있다. 3행과 5행도 그대로 또는 상하를 뒤집어서 서로 교환할 수 있다. 그러나 1행과 7행은 그대로 서로 교환할 수는 없고, 상하를 뒤집어서 서로 교환할 수 있다. 이것은 교호법을 이용하여 하나의 지수귀문도를 만들면, 그것으로부터 여러 개의 지수귀문도를 더 만들 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 변형을 통해 만들 수 있는 지수귀문도끼리는 서로 동형이라고 할 수 있다.

[그림 2]에서 $p \to p$ 경로끼리 서로 연결할 수 있다. 예를 들어 2행의 (P25→P24)→(P22→P21), 4행의 (P46→P45)→(P43→P42)를 다음과 같이 각 경로에서 합이 p가 되는 경우는 소괄호를 사용하여 묶고, 합이 q가 되는 경우는 그대로 두어 서로 연결할 수 있다.

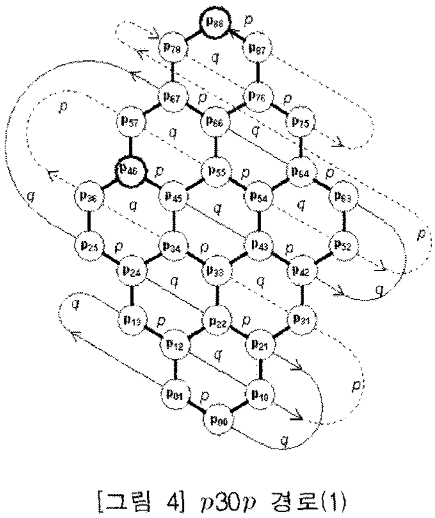
(P25→P24)→(P22→P21)→(P46→P45)→(P43→P42)

이때 4행에서 네 수의 순서를 (P42→P43)→(P45→P46)로 바꾸어

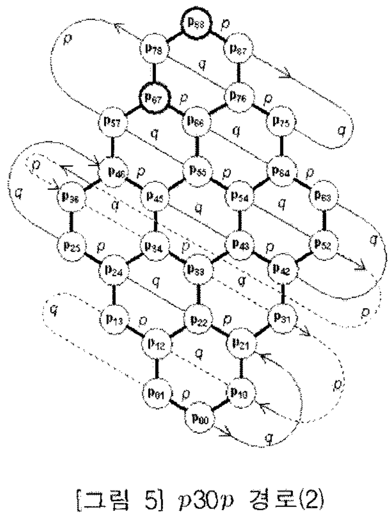
(P25→P24)→(P22→P21)→(P42→P43)→(P45→P46)

과 같이 연결할 수도 있다. 이렇게 서로 연결한 것도 $p \to p$ 경로가 되며, 최대 $p30p$ 경로까지 만들 수 있다. 같은 방법으로 $q \to q$ 경로끼리도 서로 연결할 수 있다. 이렇게 서로 연결한 것도 $q \to q$ 경로가 되며, 최대 $q30q$ 경로까지 만들 수 있다. 한편, $p \to p$ 경로와 $p \to q$ 경로도 서로 연결할 수 있다. 이렇게 연결한 것은 $p \to q$ 경로(또는 $q \to p$ 경로)가 된다. 같은 방법으로 $q \to q$ 경로와 $q \to p$ 경로도 연결할 수 있다. 이렇게 연결해서 최대 $p30q$ 경로(또는 $q30p$ 경로)까지 만들 수 있다. $p \to q$ 경로와 $q \to p$ 경로를 연결하면 $p \to p$ 경로가 되고, $q \to p$ 경로와 $p \to q$ 경로를 연결하면 $q \to q$ 경로가 된다.

[그림 4]는 출발점이 P46, 도착점이 P88인 $p30p$ 경로를 보여준다. [그림 5]는 출발점이 P88, 도착점이 P67인 $p30p$ 경로를 보여준다. 이 이외에도 여러 경로를 더 찾을 수 있다. [그림 6]과 [그림 7]은 p=31, q=29 즉, 91=31+29+31인 경우를 각각 [그림 4]와 [그림 5]의 경로에 따라 만든 것이다. [그림 8]은 이들과는 다른 $p30p$ 경로에 따라 만든 것이다.

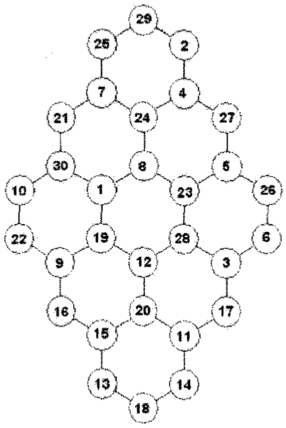


[그림 4] $p30p$ 경로(1)

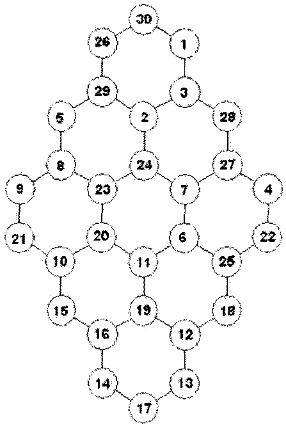


[그림 5] $p30p$ 경로(2)

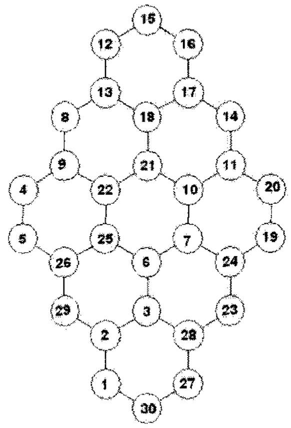
[그림 6], [그림 7], [그림 8]의 세 지수귀문도는 외견상 모두 다르지만, 실제로는 모두 $p30p$ 경로에 따라 만들어진 것이라는 점에서 그 셋은 서로 동형인 지수귀문도이다. 이 이외에도 이들과 동형인 지수귀문도를 많이 만들 수 있다. 또, 일단 지수귀문도가 완성되면 P36과 P25를 서로 바꾸어도 되고, P63과 P52를 서로 바꾸어도 된다. P78, P88, P87을 서로 바꾸어도 되고, P01, P00, P10을 서로 바꾸어도 된다.



[그림 6] 91=31+29+31 (1)



[그림 7] 91=31+29+31 (2)



[그림 8] 91=31+29+31 (3)

이와 유사한 방법으로 $q30q$의 경로를 찾을 수 있다. $p30p$이나 $q30q$의 경로를 찾을 수 있으면, 마법수가 $M=p+q+p$인 지수귀문도가 존재한다. 한편, 91=32+27+32 즉, p=32, q=27인 경우에는 [그림 2]에서 $p2p$ 2개, $p3q$ 2개, $p4p$ 3개, $q4q$ 2개로부터 만들 수 있는 $p12p$ 경로를 두 개 찾으면 남는 것은 $q4q$ 경로 1개와 $p2p$ 경로 1개이다. 이 두 경로는 서로 연결할 수 없으므로 성분 [C3] 1→(26→6)→(21→11)→16의 배열을 만들 수 없다. 따라서 분할이 91=32+27+32인 경우에는, H-교호법을 이용하여 지수귀문도를 만들 수 없다. 한편, 91=29+33+29 즉, p=29, q=33인 경우에는 [그림 2]에서 $p15q$ 경로 두 개를 찾을 수 있다. 따라서 분할이 29+33+29인 경우에는 교호법을 이용하여 지수귀문도를 만들 수 있다. 즉, 분할에 따라서 교호법을 이용하여 지수귀문도를 만들 수도 있고, 만들지 못할 수도 있다.

지금까지의 논의에 따르면, 교호법을 이용하여 [그림 2]에 의존하지 않고도 지수귀문도를 만들 수 있는지 없는지를 판단할 수 있다. 예를 들어 $q30q$ 경로는 다음과 같이 만들 수 있다. 여기서 기호 ⊕는 경로를 연결하는 것을 의미한다.

$$q4q(1)\oplus q3p(1)\oplus p4p(1)\oplus p4p(2)\oplus p4p(3)\oplus p2p(1)\oplus p2p(2)\oplus p3q(2)\oplus q4q(2)$$

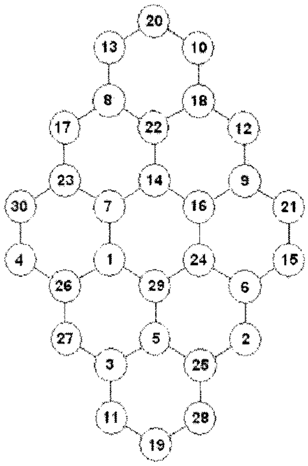
이 경로에서 $q4q(1)$을 맨 뒤로 보내도 되고, 그것을 $q4q(2)$와 서로 바꾸어도 된다. 또, $p4p(1)$, $p4p(2)$, $p4p(3)$, $p2p(1)$, $p2p(2)$의 자리를 서로 바꾸어도 된다. 이렇게 만든 경로는 원래의 경로와 동형이라고 할 수 있다. 동형인 경로를 따라 만들어진 지수귀문도 역시 원래의 지수귀문도와 동형이라 할 수 있다. [그림 9]는 p=30, q=31일 때 경로가 $q30q$인 지수귀문도이다.

한편, $p15q$ 경로 두 개는 각각 예를 들어 다음과 같이 만들 수 있다.

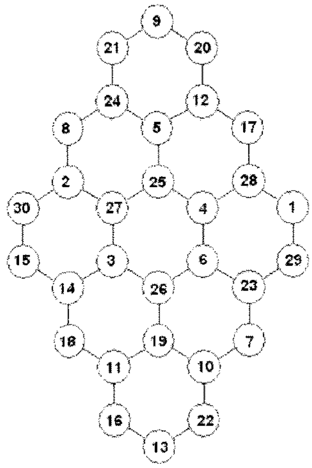
[경로 1] $p4p(1)\oplus p4p(2)\oplus p3q(1)\oplus q4q(1)$

[경로 2] $p4p(3)\oplus p2p(1)\oplus p2p(2)\oplus p3q(2)\oplus q4q(2)$

[경로 1]에서 $p4p(1)$과 $p4p(2)$의 자리를 서로 바꿀 수 있다. 그 뿐만 아니라 $p4p(1)$이나 $p4p(2)$의 어느 하나를 $p2p(1) \oplus p2p(2)$로 바꾸어도 된다. [경로 2]에서는 $p4p(3)$, $p2p(1)$, $p2p(2)$의 자리를 서로 바꾸어도 된다. 여기서도 이런 식으로 여러 가지 [경로 1]과 [경로 2]를 만들 수 있지만, 두 경로는 본질적으로 각각 한 개씩이라고 할 수 있다. [그림 10]은 p=29, q=33일 때 $p15q$ 경로 두 개를 가진 지수귀문도이다.



[그림 9] 91=30+31+30



[그림 10] 91=29+33+29

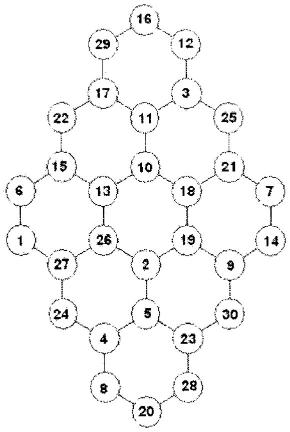
Ⅳ. 마법수가 88~92, 94~98인 지수귀문도

교호법을 이용하여 마법수가 88~92, 94~98인 지수귀문도를 만들 수 있다. 먼저 마법수와 그것의 분할 $M=p+q+p$를 정한다. 한 마법수의 분할은 여러 가지이므로 그 중의 하나를 택해야 한다. $p \neq q$이고, p와 q가 동시에 31보다 크지 않아야 하고, 동시에 31보다 작지 않아야 한다. 그런 다음 그 분할을 만족하는 모든 성분을 구하고, 이어 각 성분의 경로를 찾는다. 각 성분의 경로가 모두 존재해야 지수귀문도가 존재한다. <표 1>은 H-교호법으로 구한 것을 요약하여 나타낸 것이다. 여기서는 각 마법수의 분할로 하나만을 택했고, 경로도 한 가지만을 택했다.

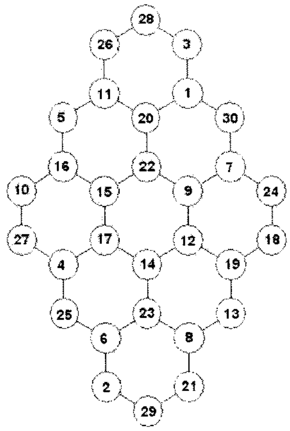
<표 1> 마법수가 88~92, 94~98인 지수귀문도(H-교호법)

마법수	분할	성분	경로	지수 귀문도
88	28+32+28	[C1]$p15q$ [C2]$q8q$ [C3]$p7q$	[C1경로] $p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p3q(1)$ [C2경로] $q4q(1) \oplus q4q(2)$ [C3경로] $p2p(1) \oplus p2p(2) \oplus p3q(2)$	[그림 11]
89	31+27+31	[C1]$p16p$ [C2]$p14p$	[C1경로] $p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2) \oplus p2p(1)$ [C2경로] $p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(2)$	[그림 12]
90	31+28+31	[C1]$p20p$ [C2]$p10p$	[C1경로] $p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2) \oplus p4p(1) \oplus p2p(1)$ [C2경로] $p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(2)$	[그림 13]

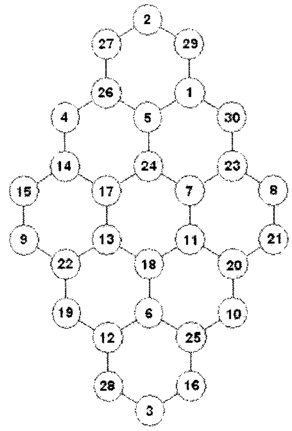
91	31+29+31	[C1]$p30p$	[C1경로] $p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(1) \oplus p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2) \oplus p2p(2)$	[그림 6]~[그림 8]
92	31+30+31	[C1]$p30p$	[C1경로] $p2p(1) \oplus p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(2) \oplus p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2)$	[그림 14]
94	31+32+31	[C1]$p30p$	[C1경로] $p2p(1) \oplus p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(2) \oplus p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2)$	[그림 15]
95	32+31+32	[C1]$q30q$	[C1경로] $q3p(1) \oplus p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3) \oplus p2p(1) \oplus p2p(2) \oplus p3q(2) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2)$	[그림 16]
96	31+34+31	[C1]$p20p$ [C2]$p10p$	[C1경로] $p3q(1) \oplus q4q(1) \oplus q4q(2) \oplus q3p(2) \oplus p4p(1) \oplus p2p(1)$ [C2경로] $p2p(2) \oplus p4p(2) \oplus p4p(3)$	[그림 17]
97	33+31+33	[C1]$q30q$	[C1경로] $q4q(1) \oplus q3p(1) \oplus p4p(1) \oplus p4p(2) \oplus p2p(1) \oplus p2p(2) \oplus p4p(3) \oplus p3q(2) \oplus q4q(2)$	[그림 18]
98	35+28+35	[C1]$p9q$ [C2]$p9q$ [C3]$q8q$ [C4]$p4p$	[C1경로] $p4p(1) \oplus p2p(1) \oplus p3q(1)$ [C2경로] $p4p(2) \oplus p2p(2) \oplus p3q(2)$ [C3경로] $q4q(1) \oplus q4q(2)$ [C4경로] $p4p(3)$	[그림 19]



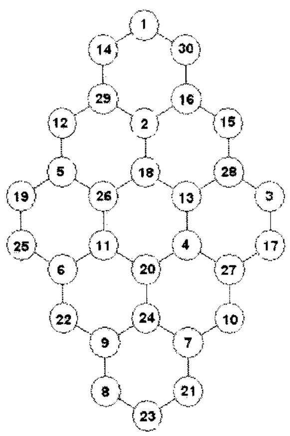
[그림 11] 88=28+32+28



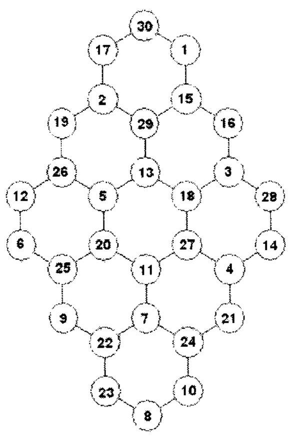
[그림 12] 89=31+27+31



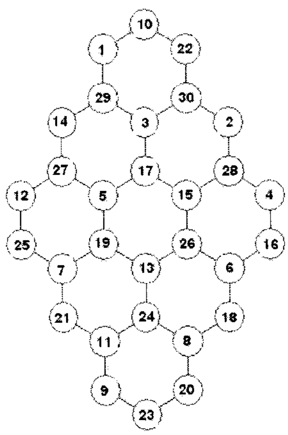
[그림 13] 90=31+28+31



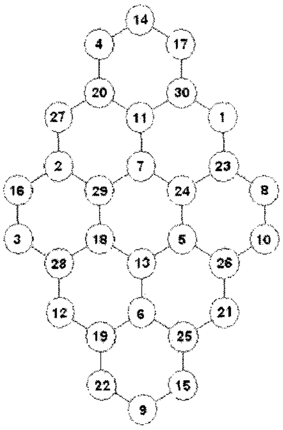
[그림 14] 92=31+30+31



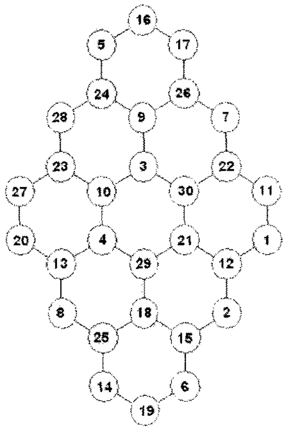
[그림 15] 94=31+32+31



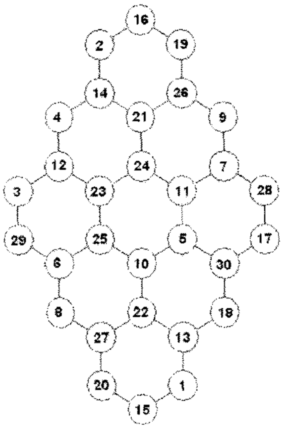
[그림 16] 95=32+31+32



[그림 17] 96=31+34+31

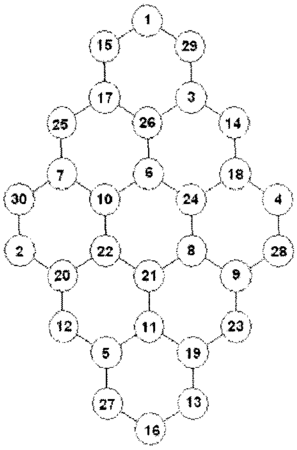


[그림 18] 97=33+31+33

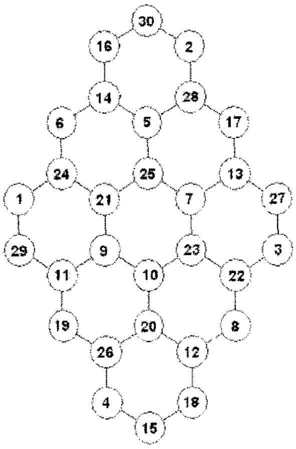


[그림 19] 98=35+28+35

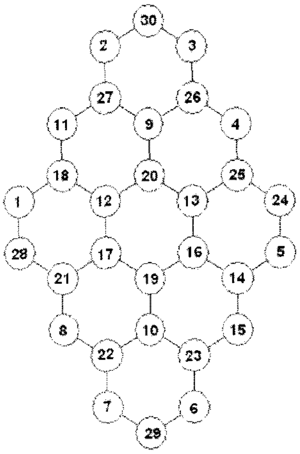
한편, V-교호법을 이용하기 위해서는 $q6q$ 경로와 $p2p$ 경로 2개, $p4p$ 경로 6개, $p6p$ 경로 2개를 거쳐야 한다. 이것은 V-교호법을 제한적으로만 사용할 수 있다는 것을 의미한다. 그래서 먼저 H-교호법을 사용하고, H-교호법으로 지수귀문도를 만들 수 없을 경우에 V-교호법으로 지수귀문도를 만들어 보는 정도로 사용할 수 있다. 예를 들어 M=32+27+32=91, M=30+35+30=95, M=29+39+29=97은 H-교호법으로 지수귀문도를 만들 수 없다. 그러나 V-교호법으로는 각각 [그림 20], [그림 21], [그림 22]와 같은 지수귀문도를 만들 수 있다.



[그림 20] 91=32+27+32 (V-교호법)



[그림 21] 95=30+35+30 (V-교호법)



[그림 22] 97=29+39+29 (V-교호법)

<표 2>는 마법수가 88~92, 94~98인 범위에서 교호법으로 지수귀문도를 만들 수 있는 마법수의 분할을 나타낸 것이다. 전용훈(1999a)은 이지원이 만든 지수귀문도 2개를 소개하고 있다. 이 두 개 중에서 마법수가 91인 것은 28+35+28의 분할을 가지며, 마법수가 95인 것은 34+27+34의 분할을 가진다. 그러나 이지원이 이러한 분할을 이용한 것으로 보이지는 않는다.

<표 2> 마법수가 88~92, 94~98인 범위에서 지수귀문도가 존재하는 분할의 예

마법수	지수귀문도가 존재하는 분할의 예
88	27+34+27, 28+32+28
89	25+39+25, 27+35+27, 29+31+29, 31+27+31, 33+23+33(V-교호법)
90	29+32+29, 31+28+31, 33+24+33
91	25+41+25, 28+35+28, 29+33+29, 30+31+30, 31+29+31, 32+27+32(V-교호법), 33+25+33
92	28+36+28, 30+32+30, 31+30+31, 32+28+32, 33+26+33
94	29+36+29, 30+34+30, 31+32+31, 32+30+32, 34+26+34
95	29+37+29, 31+33+31, 32+31+32, 33+29+33, 34+27+34, 30+35+30(V-교호법), 37+21+37
96	29+38+29, 31+34+31, 33+30+33
97	29+39+29(V-교호법), 31+35+31, 33+31+33, 35+27+35, 37+23+97
98	34+30+34, 35+28+35

마법수가 88~92, 94~98인 경우로 한정하여 초등학교에서 지수귀문도를 만드는 방법을 지도할 수 있을 것이다. 교호법을 이용하기 위한 수학적 지식이 사실상 5학년 수준의 자연수의 덧셈과 뺄셈 정도이기 때문이다. 그런 만큼 5학년 이상의 수준에서 '수와 연산'과 관련된 단원에서 문제해결을 위한 과제로 활용할 수 있을 것이다. 특별히 초등학교 영재 학생을 위한 과제로도 활용될 수 있다. 이 경우에는 교호법을 이해하는 것에 초점을 맞출 수도 있다. 초등학교 영재 교육을 위해 참신하고 새로운 자료의 개발이 요구된다(남승인, 1998; 임경진, 박만구, 2010)는 점에서 교호법을 이용하는 지수귀문도 만들기는 그러한 기대에 부응할 수 있을 것이다. 그러나 그것이 초등학생 또는 영재학생을 위한 교수·학습 프로그램으로 개발되기 위해서는 별도의 연구가 필요하다. 본 연구에서는 그러한 프로그램이 개략적으로 다음과 같은 단계를 거치도록 구성할 수 있다는 것을 제안한다.

(단계 1) 지수귀문도를 소개한다. 9개의 육각형 각각을 이루는 6개의 수의 합이 모두 일정하다는 의미에서 그 수를 '마법수'라고 부르도록 한다. 77에서 108까지인 경우의 지수귀문도가 존재한다는 것을 알려주고, 이제 마법수가 88~92, 94~98인 경우에 한정하여 지수귀문도를 같이 만들어 볼 것을 제안한다. [그림 2]를 이용하면 지수귀문도를 만들 가능성이 있다는 것을 알게 한다. (최석정 및 지수귀문도의 소개: 역사, 문제의식 고취: 우리도 지수귀문도를 만들 수 있을까? 문제 제기: 지수귀문도를 어떻게 만들 수 있을까? 교호법의 소개, [그림 2]의 도입 및 설명)

(단계 2) 88~92, 94~98 중에서 마법수를 하나 정한 다음 그것의 분할을 생각한다. 처음에는 교사가 88=28+32+28과 같이 예시하고, 학생들로 하여금 다른 분할도 생각해 보게 한다. 그런 활동을 통해 여러 가지 분할이 가능하다는 것을 알게 한다. (교사의 예시, 학생들 각자 또는 소집단별로 마법수의 분할을 만들어 보고 발표하기, 교사의 조언 및 분할의 수정: 마법수가 88~92, 94~98인 범위에 있도록, 그리고 A형 분할에서 q의 최댓값은 31이고, B형 분할에서 q의 최솟값은 31이 되도록 수정·보완)

(단계 3) 교사는 88=28+32+28을 이용하기 위하여 다음과 같이 합이 교대로 28과 32가 되는 수의 배열을 만든다. 이때 세 개의 배열이 만들어진다는 것에 주목하게 한다. 혼동을 피하기 위하여 합이 28이 되는 경우는 소괄호를 사용하여 묶고, 합이 32가 되는 경우는 그대로 둔다. 이 배열에서 1부터 30까지의 수가 한 번씩 모두 사용되고 있다는 것을 확인하게 하고, 각 배열의 특징을 알게 한다.

[1] 29→(3→25)→(7→21)→(11→17)→(15→13)→(19→9)→(23→5)→(27→1)
[2] 30→(2→26)→(6→22)→(10→18)→14
[3] 28→(4→24)→(8→20)→(12→16)

학생들이 각자 생각한 분할에 따라서 이와 같은 배열을 만들어 보게 하고, 또 학생들이 만든 각 배열의 특징에 대해서 알아보게 한다. (어떤 수에서 시작해도 되지만, 편의상 30부터 시작한다는 것을 알게 한다. 학생들 각자 또는 소집단별로 만든 성분을 발표하기, 성분을 확인하고 수정하기)

(단계 4) 교사는 [그림 2]에서 p, q 대신 28, 32를 써 넣는다. 그리고 나서 [그림 2]에는 28-32-28로 이루어진 경로가 3개, 32-28-32로 이루어진 경로가 2개, 28만으로 이루어진 경로가 2개, 그리고 28-32(또는 32-28)로 이루어진 경로가 2개 있음을 알게 한다. (단계 3)에서 구한 성분을 [그림 2]의 경로를 따라 배열하는 과정을 보여준다. 이 과정에서 경로를 다양하게 선택할 수 있음을 알게 한다. [그림 10]은 그 중의 하나이다. 학생들이 만든 배열도 경로를 따라 배열하게 해 본다. 이 과정에서 성공하는 것과 실패하는 것의 차이를 알게 한다. 분할에 따라서 교호법을 이용하여 지수귀문도를 만들 수도 있고, 만들지 못할 수도 있음을 알게 한다. 성공할 경우 학생들은 자신만의 지수귀문도를 만든 것이다. (학생들 각자 또는 소집단별로 만든 지수귀문도를 발표하기, 그것을 확인하고 수정하기)

Ⅴ. 결 론

지수귀문도는 지금으로부터 약 300여 년 전에 최석정이 <구수략>에서 제시한 것이다. 현재 컴퓨터를 이용하여 마법수가 77에서 108까지인 경우의 지수귀문도가 존재하는 것으로 알려져 있지만, 여전히 그것을 만드는 일반적인 해결 방안은 알려지지 않고 있다. 본 연구에서는 마법수가 88~92, 94~98인 경우에 한정해서 컴퓨터를 이용하지 않고 지수귀문도를 만들 수 있는 교호법을 제안하고 있다. 이 방법의 특징은 1부터 30까지의 수를 한 번씩만 사용하여 합이 교대로 서로 다른 두 수 p, q가 되는 수의 배열을 만드는 것이다. 교호법을 이용하면 마법수가 88~92, 94~98인 경우에 한정해서 지수귀문도를 만들 수 있다. 초등학교에서 교호법을 이용하여 지수귀문도를 만들기 위해서는 그 과정이 초등학생들에게 적합한 형태이어야 한다. 초등학생들이 지수귀문도를 만들 수 있기 위해서는 한없는 시행착오를 반복하지 않으면서, 계산이 복잡하지 않아야 한다. 교호법은 이러한 조건에 부합한다.

지금까지 초등학교에서 지수귀문도 만들기를 문제해결 활동을 위한 과제로 사용하려는 시도는 전혀 없었다. 지수귀문도를 소개하는 것은 어려운 일이 아니지만, 초등학생들이 실제로 지수귀문도를 만들도록 하는 것은 쉽지 않다. 본 연구에서는 초등학교에서 지수귀문

도를 만드는 것을 도입하기 위한 단초로서 교호법을 제안하였다. 본 연구에서 제안하고 있는 교호법은 초등학생들도 사용할 수 있다는 점에서, 초등학교에서 문제해결 과제로서 지수귀문도 만들기를 사용할 수 있을 것이다.

교호법이 제한적으로 작동하며, 아직 수학적으로 정교하게 다듬어져야 할 부분이 많이 있는 방법이기는 하지만, 그것은 시행착오를 통해 지수귀문도를 만들게 하는 방법이 아니라 수학적으로 지수귀문도를 만들 수 있다는 것을 보여주는 방법이다. 초등학생들이 지수귀문도를 만들기 위해 교호법을 이용할 경우, 그것이 작동하는 과정에 주목해야 한다. 그렇게 하기 위해서는 먼저 초등교사가 교호법이 작동하는 수학적 이론을 충분히 이해해야 한다. 그것은 초등교사들이 지수귀문도를 활용하기에 앞서 알아야 할 초등교사용 수학에 해당한다.

참 고 문 헌

김동진, 오영환 (1989). 지수귀문도의 특성 및 해를 구하는 알고리즘. **한국정보과학회 봄 학술발표 논문집, 16**(1), 405-408.

김상화 (1999). **수학사를 도입한 초등학교 수학교재 개발 및 적용에 관한 연구**. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

김용운 (1974). 최석정의 마법진. **한양대학교 논문집, 8**, 437-451.

김용운, 김용국 (1977). **한국수학사**. 서울: 과학과 인간사.

김용운, 김용국 (1982). **한국수학사**. 서울: 열화당.

김용운, 김용국 (2003). **한국수학사**. 파주: 한국학술정보.

김용운, 김용국 (2009). **한국수학사**. 파주: 살림출판사.

김태성, 김원규 (1992). 사상산서 <구수략> 연구. **충북대학교 과학교육연구논총, 9**, 1-12.

남승인 (1998). 초등학교 수학 영재지도방안에 관한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 2**(1), 41-59.

오윤용, 한상근 (1993). 최석정과 그의 마방진. **수학교육, 32**(3), 205-219.

윤태주 (1988). **최석정의 구수략에 나타난 수리사상과 유럽수학의 수용에 대한 고찰.** 경북대학교 대학원 석사학위논문.

이경언 (2010). 정사각형 형태가 아닌 마방진에 대한 고찰. **수학교육논문집, 24**(1), 195-220.

이상균 (2005). **수학사와 관련한 초등 심화 교수-학습 자료 개발 연구: 5학년 우수아 중심으로.** 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

임경진, 박만구(2010). 초등영재교육원 수학 영재 캠프 프로그램 분석-서울특별시 교육청 산하 영재교육원 사례를 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 14**(1), 81-102.

장혜원 (2006). **청소년을 위한 동양수학사**. 서울: 두리미디어.

장혜원 (2010). **수학박물관**. 파주: 성안당.

전용훈 (1999a). 수학사의 미스터리 마방진. **과학동아, 14**(7), 68-77.

전용훈 (1999b). 300년 만에 풀린 최석정의 마법진. **과학동아, 14**(12), 106-113.

정동권 (1995). 피보나치수열과 초등학교에서의 그 지도 가능성. **수학교육학연구, 5**(1), 13-28.

정동권 (1998). 수학 수업 개선을 위한 수학사의 활용. **인천교육대학교 과학교육연구소 과학교육논총, 10**, 300-344.

정선화 (2006). **수학사를 활용한 수행평가 과제 및 학습 지도안 개발에 관한 연구.** 진

주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

최석정 (2006). **구수략(곤)**. 정해남, 허민 역. 서울: 교우사.

최영한 (1998). 우리의 것을 찾아 가르치자. **수학교육프로시딩, 7**, 101-107.

최희웅 (1989). 귀문도와 그 이용도: 수리적 접근. **상서, 9**, 176-183.

한상근 (1998). 최석정과 그의 구수략. **한국수학교육학회 뉴스레터, 14**(2), 22-25.

Bača, M. (1992). On magic labelings of honeycomb. *Discrete Mathematics, 105*, 305-311.

Choe, H. M., Choi, S. S., & Moon, B. (2003). A hybrid genetic algorithm for the hexagonal tortoise problem. *Lecture Notes in Computer Science, 2723*, 850-861.

Povolotskiy A. (2009). *Using bit-distribution and heuristics for solving hexagonal tortoise problem*. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

<Abstract>

A Study on Making Jisuguimundo as a Problem Solving Task for Elementary Students

Park, Kyo Sik[3)]

Jisuguimundo(地數龜文圖) is a magic hexagon created by Suk-Jung Choi in his book <Gusuryak(九數略)> about three hundreds years ago in Korea. Recently attention is focused on jisuguimundo, and it is known that jisuguimundos exist when magic number is from 77 to 108, however a general method making jisuguimundos is not known so far. Up to now, methods of making jisuguimundos using computers are known. In this study, a method making jisuguimundos is suggested using pairs of two numbers with sum p and q ($p \neq q$) alternately when magic number is from 88 to 92, and from 94 to 98, without using computer in elementary math class as a task for problem solving. Mathematical theory is introduced for this method, and jisuguimundos are presented which are found out through this method. Elementary students are expected to make their own jisuguimundo using this method.

Keywords: alternating method, magic hexagon, problem solving, history of mathematics, Jisuguimundo(hexagonal tortoise problem, 地數龜文圖)

논문접수: 2011. 03. 14
논문심사: 2011. 04. 01
게재확정: 2011. 04. 14

3) pkspark@ginue.ac.kr