한국초등수학교육학회지 15(1) 39-56.
2011. 04. 30
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(1) 39-56.
April 30. 2011.

한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석

변희현[1)]

현재 중학교에서는 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 문자변수를 사용하여 일반화의 맥락에서 정의하여 도입한다. 그런데 분배법칙에 대한 학생들의 이해도는 그리 높지 않다. 일반화의 맥락에서 도입되는 분배법칙을 의미 있게 학습하려면 특수한 맥락에서 분배법칙의 풍부한 이해가 선행되어야 하므로, 본 연구는 한국과 일본의 초등학교 교과서에서 다루어지는 분배법칙 내용의 비교 분석을 통해 교육적 시사점을 도출하고자 한다.

[주제어] 분배법칙, 곱셈 알고리즘, 일반화

Ⅰ. 서 론

초등학교 수학에서는 수와 연산을 이해하고 산술 계산을 능숙하게 하는 것에 많은 시간과 노력을 들인다. 우정호(2000)는 계산을 한다는 것의 의미를 다음과 같이 설명한다.

> 덧셈·곱셈 계산은 연산의 기본성질 곧, 체의 공리와 기본셈(10 미만의 자연수의 덧셈과 곱셈) 및 십진기수법의 원리에 따라 합과 곱을 표준 기호로 바꾸는 과정이며 나눗셈은 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 계산에서 무엇보다도 중요한 것은 십진기수법이며 그 바탕이 되는 자릿값의 원리이다(p.193).

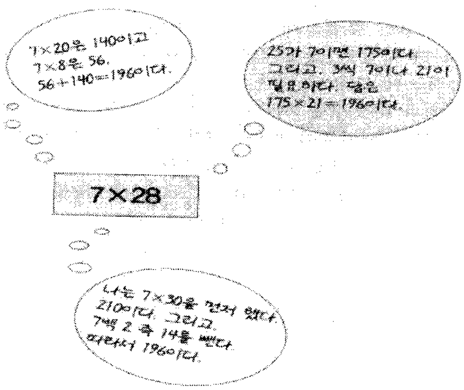
인용문에 따르면 덧셈과 곱셈은 모두 기본셈인 한 자리 자연수의 덧셈과 곱셈, 자릿값의 원리에 따른 표기법으로서 십진기수법 그리고 체의 공리에 따라 계산 결과를 표준기호인 십진법으로 표현하는 것이다. 그러면 곱셈의 경우 기본셈인 한 자리 자연수의 곱셈 즉 곱셈구구의 범위를 벗어나는 큰 수들의 곱셈을 위해 가장 중요한 체의 공리는 무엇일까? 곱셈의 표준 알고리즘을 잘 살펴보면 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 중요한 위치를 차지하고 있음을 확인할 수 있다.

또한 학교수학을 위한 원리와 규준(2007)에서는 초등학교 3-5학년 학생들은 곱셈과 나눗셈의 의미와 관계를 집중적으로 학습해야 함을 언급하면서 분배법칙은 곱셈 알고리즘의 기본으로서 특히 위력적인을 [그림 1]과 같이 7×28을 계산하는 세 학생의 계산 방법을 통해 보이고 있다(pp.182-183). 학생들이 7×28에 대해 서로 다른 다양한 계산 방법을 보이는

---

1) 한국교육과정평가원

것은 곱셈의 의미와 그 방법의 이해가 풍부함에 따라 문제에 적합한 알고리즘을 융통성 있게 선택적으로 사용가능함을 드러낸 것인데 이들 계산의 기본 원리는 분배법칙임을 확인할 수 있다. 이에 본 논문에서는 초등학교에서 다루어지는 곱셈 계산의 원리를 이해하고 보다 능숙한 계산에 반드시 필요한 연산의 성질로 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 주목한다.



[그림 1] 분배법칙을 이용한 계산

관련한 선행연구들을 살펴보면 중등 단계에서는 분배법칙을 보다 의미 있게 지도하기 위한 방안 연구(정해원, 2006)와 수학교과서의 용어 정의방식과 중학생들의 용어 이해에 관한 연구의 일부로 분배법칙에 관한 교과서의 용어 정의방식이 학생들의 제한된 이해에 영향을 미침을 드러낸 연구(신은주, 2002)가 있다. 그리고 초등단계에서는 프로이덴탈의 수학화 이론에 근거하여 곱셈 알고리즘의 토대가 되는 자릿값의 원리와 분배법칙의 이해에 효과적이도록 3학년 곱셈 단원을 재구성한 연구(심선영, 2010 : 강홍규 · 심선영, 2010)가 있다. 즉, 분배법칙과 관련해서는 중학교 단계에서 다루어지고 이해되는 분배법칙의 양상과 그 지도 방안에 관한 연구와 초등학교에서 다루어지는 곱셈 알고리즘의 원리에 해당하는 자릿값과 분배법칙을 보다 잘 이해할 수 있도록 특정학년의 단원을 재구성한 연구 등을 확인할 수 있었다. 그러나, 현재 우리나라의 경우 중학교 1학년에서 분배법칙을 문자변수를 사용하여 대수식으로 표현하여 도입하기 이전에 학생들이 학습하는 분배법칙 개념이 전체적으로 어떠한지에 관한 연구는 찾기 어려웠다. 이에 본 연구에서는 초등학교에서 분배법칙이 어떻게 다루어지는 지를 파악하기 위해 학교 수업 내용의 지표가 되는 교과서를 분석하고자 한다. 이 때 분배법칙 지도와 관련하여 한국 교과서와 많은 차이를 보이는 일본 교과서를 비교 분석함으로써 교육적 시사점을 끌어내고자 한다. 이를 위해 분배법칙을 다루는 맥락, 서술하는 방식 그리고 일반화의 정도 등을 집중적으로 비교하고자 한다.

Ⅱ. 한국 초등 교과서의 내용 분석

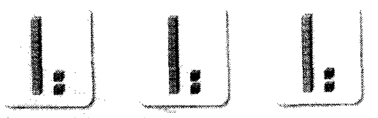
분배법칙은 기본셈의 범위를 넘어서는 즉, 피승수 또는 승수[2]가 두 자리 이상인 수의 곱셈과 자연수와 대분수 사이의 곱셈에서 다루어지고 있는데, 각각을 살펴보면 다음과 같다.

2) 본 논문에서는 A×B에서 A를 피승수, B를 승수로 부르기로 한다.

1. 두 자리 이상인 수의 곱셈

가. (두 자리 수)×(한 자리 수)

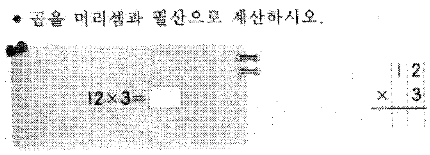
3-1 교과서에서 곱셈 (두 자리 수)×(한 자리 수)를 다루는데 여기서 분배법칙의 아이디어를 확인할 수 있다. 곱셈 12×3은 딸기가 12개씩 담겨 있는 접시 3개에 있는 모든 딸기의 개수를 구하는 상황에서 도입하고 계산을 위한 활동에서는 [그림 2]가 제시된다.



[그림 2] 12×3의 수 모형 표현

(교육과학기술부, 2010a, p.85)

교과서에서는 [그림 2]의 수모형에서 낱개 모형과 십 모형의 개수를 따로 구하는 활동을 12×3 에서 일의 자리의 계산 2×3=6과 십의 자리의 계산 10×3=30의 합을 나타내는 방법과 연관지어 생각하도록 의도한 것이다.



[그림 3] 12×3의 계산

(교육과학기술부, 2010a, p.85)

그리고 [그림 3]과 같이 머리셈과 필산으로 계산함을 다루는데 그 방법은 언급하지 않는다. 교사용 지도서에 따르면 이는 학생들이 방법을 발견하도록 계산결과도 제시하지 않는다고 한다. 또한 필산의 경우도 형식화하여 지도하는 것은 바람직하지 않음을 언급하면서 일의 자리와 십의 자리 중 어느 것도 먼저 쓰는 것이 가능함을 밝힌다(교육과학기술부, 2010d, p.259).

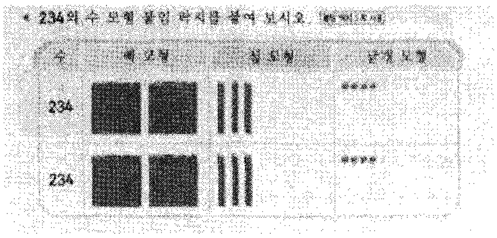
이어서 32×4 또는 26×3 등의 곱셈도 똑같은 수 모형으로 표현하고 십 모형과 낱개 모형의 개수를 따로 구하는 동일한 활동을 통해 계산 방법을 파악하도록 한다. 단, 십 모형 또는 낱개 모형의 개수가 10개를 넘어 올림이 생기는 것이 차이점이다.

교과서에서는 수 모형을 통해 곱셈 (두 자리 수)×(한 자리 수)는 십의 자리와 일의 자리를 따로 곱하여 더할 수 있다는 원리를 다루는 것에서 분배법칙의 아이디어가 처음 다루어짐을 알 수 있다.

나. (세 자리 수)×(한 자리 수)

(세 자리 수)×(한 자리 수) 곱셈은 3-2 교과서에서 다루어지며 여기서 사용된 분배법칙의 아이디어는 앞서 (두 자리 수)×(한 자리 수)에서 다룬 방식을 백의 자리까지 확장한 것이다. 먼저 올림이 없는 곱셈 234×2는 234명의 학생에게 풍선을 2개씩 나누어 줄 때 필요

한 개수를 구하는 상황에서 도입하고 [그림 4]와 같은 활동을 하게 한다.

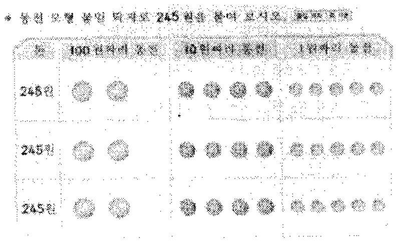


[그림 4] 234×2의 수 모형 활동

(교육과학기술부, 2010e, p.121)

[그림 4]에서 234×2에 대응하는 모형은 동수누가의 원리에 따라 234의 수 모형 딱지를 두 번 붙이는 것으로 한다. 그리고 234×2에 대응하는 모형에서 낱개 모형, 십 모형, 백 모형의 개수를 따로 세는 방법에서 계산 원리를 파악하는 것이다. 그리고 머리셈인 가로식의 방법 '234×2=□'만을 제시하고 세로식을 제시하지는 않는다. 이와 관련하여 지도서에서는 올림이 없는 곱셈은 굳이 세로식으로 계산하는 것이 바람직하지 않으며 곱셈구구를 이용한 머리셈으로 계산하는 것이 효과적이라고 밝힌다(교육과학기술부, 2010e, p.121).

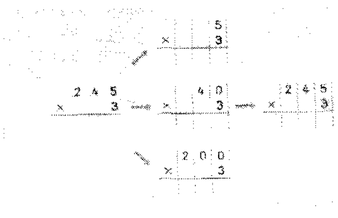
이어서 올림이 있는 곱셈 245×3은 한 권의 공책을 만드는 데 245원이 필요한 경우 3권을 만드는 비용을 계산하는 상황에서 도입하고 [그림 5]와 같은 활동을 하게 한다.



[그림 5] 245×3의 동전 모형 활동

(교육과학기술부, 2010e, p.122)

이는 현실에 대응하는 동전 모형으로 245를 3번 놓아 보게 한 뒤 같은 동전 모형끼리 각각 그 개수를 세어 전체 금액을 구하는 방식과 245×3의 계산 방법을 연결시키도록 한다. 교과서에는 245×3의 계산 원리를 [그림 6]과 같이 제시한다.



[그림 6] 245×3의 계산 원리

(교육과학기술부, 2010b, p.21)

[그림 6]의 두 번째 열에 제시된 세 곱셈은 245를 자릿값별로 200, 40, 5로 나누어 각각에 3을 곱하는 것을 수식으로 표현한 것이다. 세 번째 열에서는 이들을 모두 합하여 245×3의 값을 구함을 표현하려는 것이나 이것은 학생들이 발견해야 하는 몫으로 남겨둔 채 계산 결과도 제시하지 않는다. 이어서 [그림 7]을 제시하여 머리셈과 필산을 다루도록 한다.

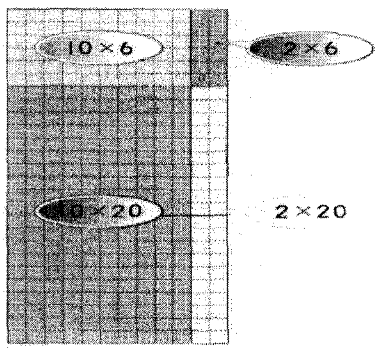
[그림 7] 245×3의 계산

(교육과학기술부, 2010b, p.21)

머리셈은 분배법칙에 기반한 계산원리의 이해를 바탕으로 245×3 = 600+120+15=735 와 같이 정확하고 빠르게 계산하도록 하고 필산은 계산원리를 형식화시켜 능숙하게 계산함을 의도하는 것으로 보여진다. 지도서를 살펴보면 (두 자리 수)×(한 자리 수)와 올림이 없는 (세 자리 수)×(한 자리 수)에서 세로셈 방식을 형식화하여 지도하지 말 것을 권유하는 것과는 달리 245×3과 같이 올림이 있는 경우의 곱셈은 형식화된 세로셈 계산을 사용하여 능숙하게 계산하도록 지도할 것을 언급하면서 세부적으로 올림한 값을 표시하는 방법까지도 다루고 있다. 즉, 우리나라 초등 교과서에서는 올림이 있는 (세 자리 수)×(한 자리 수)에서 곱셈 알고리즘을 본격적으로 형식화하는 것으로 볼 수 있으나 알고리즘의 각 단계들을 앞서 다룬 수 모형 활동을 통해 파악한 계산 방법과 연관시키는 것은 상세히 설명하지 않음으로써 학생들이 발견해야 할 몫으로 남겨두는 것으로 파악된다.

다. (두 자리 수)×(두 자리 수)

(두 자리 수)×(두 자리 수)의 계산은 1타에 12자루인 연필 26타의 개수를 구하는 상황에서 도입하고 12×26의 계산 원리를 드러내기 위해 활동1에서는 [그림 8]의 그림을 제시한다(교육과학기술부, 2010b, p.26).



[그림 8] 12×26 의 시각적 표현

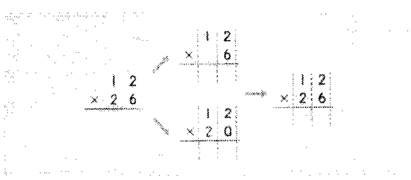
이 예를 통해 파악해야 하는 (두 자리 수)×(두 자리 수)의 계산 원리는 승수 26을 20과 6으로 분리하여 (12×6)과 (12×20) 나누어 곱한 후 이들을 더하면 된다는 것을 이해하는 것

이다(교육과학기술부, 2010e, p.128). 그러나 [그림 8]에서는 12×26을 두 곱셈 (12×6)과 (12×20)의 합으로 나누어 생각할 수 있다는 계산 원리가 잘 드러나지 않는다. 계산 방법을 이해하려면

$$12\times26 = (12\times6)+(12\times20) = \{(10\times6)+(2\times6)\} +\{(10\times20)+(2\times20)\}$$

과 같이 분배법칙을 두 단계에 걸쳐 적용하는 순차적인 사고가 필요한데 이들을 동시에 표현했기 때문이다. 또한, 이에 대응하는 교과서의 질문도 10칸씩 20줄의 모눈(10×20), 2칸씩 20줄의 모눈(2×20), 10칸씩 6줄의 모눈(10×6), 2칸씩 6줄의 모눈(2×6)을 구하는 방법을 연속하여 묻는 것에 그친다. 따라서, 모눈종이의 그림과 제시된 질문이 모두 12×26은 10×6 +2×6+10×20+2×20 임을 파악하는데 필요한 분배법칙의 순차적인 적용을 학생들 스스로 이해하기에는 다소 어려움이 따를 것으로 판단된다.

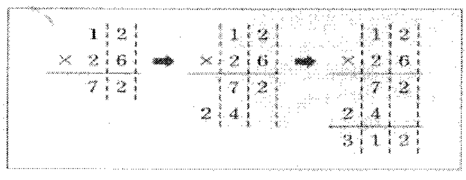
활동2에서는 계산 원리와 함께 세로셈 계산을 형식화하도록 하는데, 12×26의 계산 원리를 [그림 9]와 같이 제시한다.



[그림 9] 12×26 의 계산 원리

(교육과학기술부, 2010b, p.27)

[그림 9]의 두 번째 열에 제시된 두 개의 곱셈은 승수 26을 20과 6으로 나누어 곱할 수 있음을 표현한 것이고 세 번째 열에서는 두 번째 열의 곱셈 값을 합하여 12×26의 값을 구함을 표현한다. 이어서 머리셈과 필산 계산을 다루나 교과서에서는 계산 과정과 결과를 모두 제시하지 않는다. 지도서를 살펴보면 머리셈은 계산원리의 이해를 바탕으로 12×26=12×20+12×6=240+72=312 와 같이 계산하도록 하는 것이고 필산은 [그림 10]과 같이 첫 줄에는 12×6을, 두 번째 줄은 12×20을 하여 두 값을 합하는 과정을 세로셈으로 형식화시켜 능숙하게 계산하도록 한다(교육과학기술부, 2010e, p.129).



[그림 10] 12×26 의 계산 알고리즘

그러나 교과서의 서술 방식은 계산 원리와 머리셈 및 필산 알고리즘을 연결하여 이해하는 것은 모두 학생 스스로 파악하도록 하고 있다.

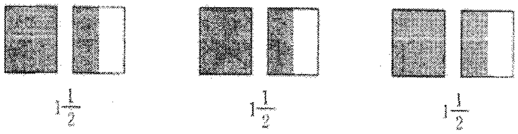
이 후, 4-1 교과서에서는 (세 자리 수)×(두 자리 수), (네 자리 수)×(두 자리 수)로 수의 범위를 넓혀 곱셈 원리를 이해하고 곱셈을 세로셈으로 형식화하도록 한다. 수가 커질수록 세로셈 알고리즘은 점차 복잡해지나 계산의 기본 원리는 분배법칙임을 확인할 수 있다(교육과학기술부, 2010c, pp.26-29).

2. 자연수와 대분수의 곱셈

5-가[3] 교과서의 '분수의 곱셈' 단원에서는 자연수와 대분수의 곱셈에서 분배법칙의 아이디어를 사용한다.

가. (대분수)×(자연수)

(대분수)×(자연수)에서 다루는 곱셈 $1\frac{1}{2}\times 3$은 색종이로 꽃을 만드는데 한 장 반이 든다면 3송이를 만드는 데 필요한 색종이를 알아보는 상황에서 도입하고 이를 [그림 11]로 표현한 후 계산 방법을 생각해보게 한다.



[그림 11] $1\frac{1}{2}\times 3$의 시각적 표현

(교육인적자원부, 2006, p.114)

[그림 11]을 보고 계산 방법은 아래와 같은 식으로 나타낸다.

$$1\frac{1}{2}\times 3=(1\times 3)+(\frac{1}{2}\times 3)=3+\frac{3}{2}=(\cdots \text{ 생략})$$[4]

(교육인적자원부, 2006, p.114)

제시된 계산 방법은 [그림 11]의 색종이 그림을 보고, 필요한 색종이의 전체 양 $1\frac{1}{2}$장의 3배 ($1\frac{1}{2}\times 3$)는 동일한 모양의 색종이끼리 필요한 양을 구하여 더할 수 있다는 아이디어를 파악하고 1장의 3배(1×3)와 $\frac{1}{2}$장의 3배($\frac{1}{2}\times 3$)를 따로 구하여 합한 것이다.

나. (자연수)×(대분수)

(자연수)×(대분수)에서 다루는 곱셈 $6\times 2\frac{1}{3}$ 은 6개 사탕의 $2\frac{1}{3}$배는 몇 개인지를 알아보는 상황에서 도입하고 이를 위해 바둑돌 6개의 2배만큼과 바둑돌 6개의 $\frac{1}{3}$배만큼을 놓아보는 조작 활동을 통해 $2\frac{1}{3}$배라는 것은 2배보다 $\frac{1}{3}$배가 더 많음을 알게 한다. 이러한 조

3) 초등학교 4학년까지의 교과서는 2007 개정 교육과정에 따른 것를 분석하였고, 초등학교 5, 6학년의 경우 분석 시기인 2011년 1월에는 2007 개정 교육과정에 따른 교과서가 아직 배포되지 않은 시기라 7차 교육과정의 교과서로 분석하였다.

4) 이외에 교과서에서는 $1\frac{1}{2}$을 가분수로 고쳐서 계산하는 방법을 다루나 분배법칙과는 동떨어진 방법이므로 본 연구에서는 제시하지 않는다(교육인적자원부, 2006, p.114).

작 활동을 통해 $6\times2\frac{1}{3}$ 의 계산 방법을 다음의 식으로 나타낸다.

$$6\times2\frac{1}{3}=(6\times2)+(6\times\frac{1}{3})=12+2=14$$

(교육인적자원부, 2006, p.117)

위와 같은 자연수와 대분수의 곱셈 방법은 분배법칙의 적절한 사용이 효율적인 곱셈 계산을 가능하게 함을 잘 보여준다.

따라서, 우리나라 초등교과서에서는 분배법칙의 용어를 사용하지는 않으나, 분배법칙의 개념은 피승수나 승수가 두 자리 이상인 경우 곱셈의 기본원리로 다루어지고 자연수와 대분수의 곱셈에서는 다양한 계산 방법 중 효율적인 계산을 가능하게 하는 원리로 이를 선택적으로 사용하는 상황에서 다루어짐을 알 수 있다.

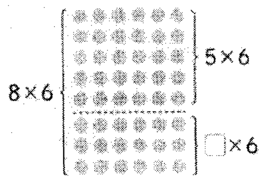
Ⅲ. 일본 초등 교과서의 내용 분석

일본교과서의 경우 분배법칙의 아이디어는 초등학교 2학년에서 이미 다룬 곱셈의 기본셈인 곱셈구구의 계산을 다양하게 생각하는 과정에서 다루기 시작하여 두 자리 이상의 수들의 곱셈 원리로 적극적으로 사용된다. 이어서 4-하 및 5-상 교과서에서는 곱셈 계산을 위해 승수나 피승수를 자릿값별로 나누어 곱한 후 더할 수 있다는 것을 넘어 보다 일반적인 분배법칙의 이해를 다룬다. 각각을 살펴보면 다음과 같다.

1. 한 자리 자연수의 곱셈

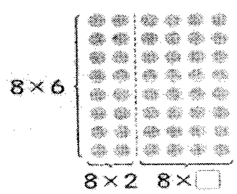
3-상 교과서에서는 이미 2학년 곱셈구구에서 다룬 8×6에서 승수 또는 피승수를 두 부분으로 나누어 계산하는 방법을 다음과 같이 다룬다.

학생1의 생각
8×6의 8을 나누는 것을 생각해보자.
$5\times6=30$
$3\times6=18$ 합하면, 48



[그림 12] 학생1 생각의 시각적 표현

학생2의 생각
8×6의 6을 나누는 것을 생각해보자.
$8\times2=16$
$8\times4=32$ 합하면, 48

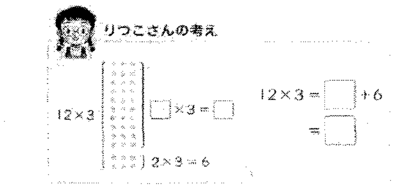


[그림 13] 학생2 생각의 시각적 표현

(杉山吉茂 외 2인, 2005a, p.8)

학생 1은 이미 곱셈구구를 통해 그 값을 알고 있는 곱셈 8×6에서 피승수 8을 5와 3의 합으로 보면 8×6은 5×6과 3×6의 합과 같다는 관계를 파악한 것이다. 유사한 방식으로, 학생 2는 승수 6을 4와 2의 합으로 보면 8×6은 8×4과 8×2의 합과 같다는 관계를 파악한 것이다. 이러한 연산의 관계에 대한 두 학생의 생각은 모두 [그림 12], [그림 13]에서 셈돌을 배열한 것과 같은 모델을 통하여 직관적으로 다룬다. 나아가, 교과서에서는 곱셈에서 피승수나 승수를 두 개의 수로 나누어 계산하여도 그 값이 같음을 언급하면서 다른 두 수의 곱셈에서도 성립하는지 문제를 통해 확인하도록 한다.

이어서, 곱셈구구의 범위를 넘어서는 12×3의 값을 결정하는 세 가지 방법을 다루는데, 이 중 분배법칙에 기초한 것은 [그림 14]와 같다[5].



[그림 14] 12×3의 계산 방법

(杉山吉茂 외 2인, 2005a, p.10)

이는 앞서 8×6을 5×6과 3×6의 합으로 계산한 것과 같은 원리를 이용한 것이다. 위의 모델은 피승수 12를 10과 2로 나누면 전체 12×3은 10×3과 2×3의 합과 같음을 잘 표현한다.

3-상 교과서에서 이미 2-하 교과서에서 다룬 한 자리 자연수끼리의 곱셈을 다양한 다른 방법으로 다시 다루는 것은 곱셈 계산을 다양하고 융통성 있게 생각할 수 있도록 한 것으로 생각된다. 곱셈의 여러 계산 방법 가운데 특별히 피승수나 승수를 나누어 계산하는 방식은 분배법칙의 개념을 다루는 것이다. 물론 분배법칙이라는 용어를 사용하지는 않으나 그 본질에 해당하는 연산의 성질을 시각적 모델을 통해 직관적으로 파악하도록 하고 이를 곱셈 계산에 지속적으로 사용함으로써 학생들이 이러한 방식을 계속 주목할 수 있게 의도한 것으로 생각된다.

2. 두 자리 이상인 수의 곱셈

3-하 교과서에서는 기본셈의 범위를 넘어서는 두 수의 곱셈 계산을 크게 두 개의 단원으로 나누어 지도한다. 전반부에서는 승수가 한 자리 수인 곱셈을 다루고, 후반부에서는 승수가 두 자리 수인 곱셈을 다룬다.

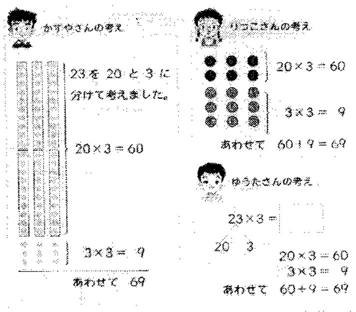
가. 승수가 한 자리 자연수인 곱셈

1) (두 자리 수)×(한 자리 수)

곱셈 23×3을 한 장에 23엔인 도화지 3장의 금액을 계산하는 상황에서 도입하고 그 계산

5) 다른 두 학생 중 한 명은 12×3을 동수누가의 의미를 적용하여 12를 3번 더한 값으로 계산하고, 다른 한 명은 12×1＝12를 시작으로 곱셈에서 승수가 1씩 커짐에 따라 곱셈값이 12씩 커진다는 사실을 이용하여 12×2, 12×3의 값을 순서대로 계산한다(杉山吉茂 외 2인, 2005a, p.10).

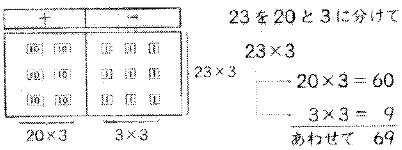
방식에 대한 학생 3명의 생각을 [그림 15]와 같이 제시한다.



[그림 15] 23×3의 계산 방법

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.16)

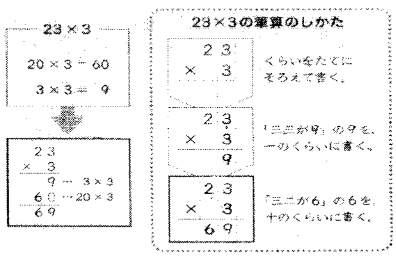
두 명의 학생은 서로 다른 수모형을 사용하여 23의 3배는 20의 3배와 3의 3배를 합한 것과 같다는 생각을 구체적으로 표현한다. 비교하여 나머지 한 학생은 구체적인 모형을 사용하지 않고 23을 20과 3으로 분리하여 곱할 수 있다고 생각한다. 세 학생들의 곱셈방법에 관한 표현은 약간의 차이를 나타내나 모두 피승수 23을 20과 3으로 분리하여 20×3 과 3×3의 합으로 계산함은 공통적이다. 이에 교과서에서는 세 학생이 공통적으로 사용한 곱셈 원리를 다시 한 번 [그림 16]으로 제시한다.



[그림 16] 23×3의 계산 원리

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.16)

그리고 세로셈에 의한 지필 계산을 [그림 17]과 같이 형식화한다.



[그림 17] 23×3의 계산 알고리즘

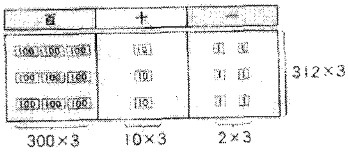
(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.17)

[그림 17]의 오른쪽 네모에서는 23×3의 세로셈 절차를 자세히 설명하는 것이고 왼쪽의

두 네모는 앞서 학생들의 생각에서 파악할 수 있는 계산 원리 즉 23을 20과 3의 합으로 보고 각각에 3을 곱한 후 더하면 된다는 생각을 세로셈 절차와 연결 지을 수 있도록 적극적으로 표현한 것으로 볼 수 있다. 이후 16×4, 42×3, 58×3 등과 같이 받아올림이 생기는 곱셈에 대한 지필계산을 세로셈으로 나타내는 방법 또한 피승수를 십의 자리의 수와 일의 자리의 수로 나누어 곱하여 더하는 똑같은 원리에 따라 형식화한다(杉山吉茂 외 2인, 2005b, pp.18-19).

2) (세 자리 수)×(한 자리 수)

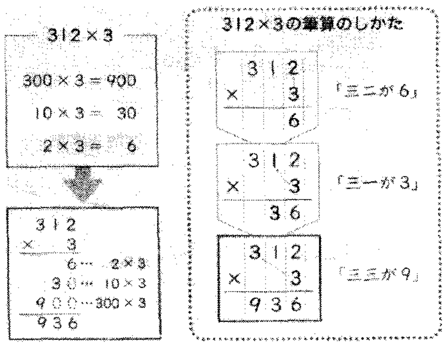
곱셈 312×3을 1m에 312엔인 리본 3m의 금액을 계산하는 상황에서 도입하고 [그림 18]을 보고 계산방법을 생각해보게 한다.



[그림 18] 312×3의 계산 원리

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.20)

[그림 18]에서 312는 300, 10, 2로 나누어 312×3은 312에 대응하는 수 모형을 세 번 나열하는 것으로 표현한다. 그리고 312×3은 백, 십, 일의 자리의 수인 300, 10, 2에 각각 3을 곱하여 더한 값과 같다는 관계를 인식하도록 한다. 이를 바탕으로 312×3의 지필계산을 세로셈으로 나타내는 방법을 [그림 19]와 같이 제시한다.

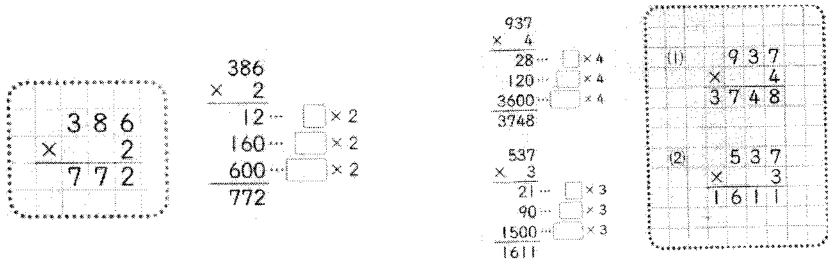


[그림 19] 312×3의 계산 알고리즘

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.21)

(세 자리 수)×(한 자리 수) 계산방법은 (두 자리 수)×(한 자리 수)의 계산법과 본질적으로 같은 것으로 피승수인 세 자리 수를 자릿값별로 나누어 곱한 후 더하는 원리 즉, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙에 기초함을 알 수 있다. [그림 19]의 오른쪽 네모에서 일의 자리 곱셈을 시작으로 차례로 한 줄에 기록하는 곱셈 방법은 자릿값별로 행해지는 세 번의 곱셈에 대응함을 좌측의 두 네모를 통해 적극적으로 드러내고 있음을 알 수 있다. 이후 386×2, 937×4, 537×3 등과 같이 받아올림이 생기는 곱셈의 세로셈에 대해서도 피승수인

세 자리 수를 자릿값별로 나누어 곱한 후 더하는 같은 원리에 따라 형식화되는 것임을 [그림 20]과 같이 다룬다.



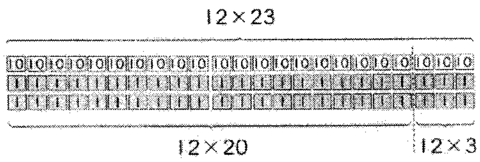
[그림 20] (세 자리 수)×(한 자리 수)의 계산 알고리즘 형식화

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, pp.21-22)

즉, 일본 교과서에서는 기본셈의 범위를 넘어서는 곱셈에서 올림의 여부에 관계없이 세로셈의 알고리즘화를 바로 시작하나 학생들이 알고리즘 각 단계 이면에 있는 계산원리를 연결하여 생각할 수 있도록 교과서에서는 이를 상세하게 지속적으로 나타냄을 알 수 있다.

나. 승수가 두 자리 자연수인 곱셈

곱셈 12×23을 1장에 12엔인 공작용지 23장의 금액을 계산하는 상황에서 도입하고 [그림 21]과 같이 곱셈 12×23을 수 모형으로 표현한다.

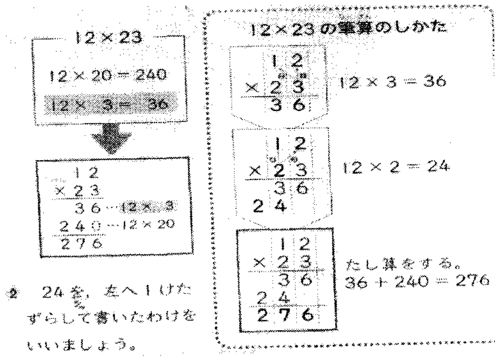


[그림 21] 12×23의 수 모형 표현

(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.55)

이는 12×23이 12×20[6]과 12×3의 합과 같음을 나타내는데 이는 12×23의 계산방법을 이해하는데 매우 중요한 단서이다. 이를 바탕으로 12×23의 세로셈 알고리즘 단계를 [그림 22]와 같이 나타낸다(杉山吉茂 외 2인, 2005b, p.56). [그림 22]의 오른쪽 네모에서는 12×23의 세로셈 알고리즘의 단계를 차례로 보여준 것이고 왼쪽의 두 네모에서는 앞서 수 모형에서 파악한 연산의 관계 -즉, 12×23이 12×20과 12×3의 합과 같다- 가 알고리즘의 원리가 됨을 적극적으로 나타낸 것이다. 3-하 교과서의 전반부에서 다룬 승수가 한 자리 수인 곱셈 방법의 원리로 피승수를 자릿값별로 나누어 곱하는 것을 다루었다면 후반부에서는 승수가 두 자리인 자연수의 곱셈에서 승수를 자릿값별로 나누어 곱하는 것을 다루면서 곱셈 계산의 기본 원리로 분배법칙이 사용되고 있음을 일관되고 적극적인 방식으로 드러내고 있는 것으로 판단된다.

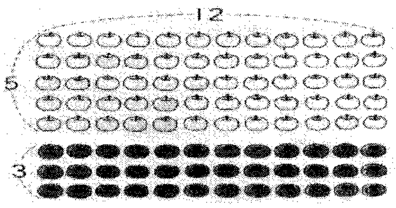
6) 12×20은 12×2(=24)의 10배이므로 240이다. 승수가 10, 20, 30, …, 90인 곱셈을 교과서에서는 앞서 다룬다(杉山吉茂 외 2인, 2005b, pp.53-54).



[그림 22] 12×23의 계산 알고리즘

3. 보다 일반적인 분배법칙의 이해

4-하 교과서에서는 사칙계산이 혼합된 계산과 괄호를 포함한 계산의 규칙을 다루는 단원에서 분배법칙을 다룬다. [그림 23]에서는 사과와 귤이 모두 몇 개인지를 파악하는 두 학생의 서로 다른 식에 대해 생각하도록 한다(杉山吉茂 외 2인, 2005c, p.49).



학생 1. $(5+3)\times12=96$

학생 2. $5\times12+3\times12=96$

[그림 23] 분배법칙의 맥락 1

학생 1의 식은 세로 한 줄당 (5+3)개의 사과와 귤이 있고 세로줄은 모두 12줄이므로 전체의 개수는 $(5+3)\times12$이라는 생각을, 학생 2의 식은 전체의 개수를 사과의 개수와 귤의 개수로 나누어 사과의 개수 5×12와 귤의 개수 3×12를 각각 구한 후 합하면 된다는 생각을 표현한다. 사과와 귤 전체의 개수를 뜻하는 두 식의 값은 같으므로 등호로 연결할 수 있음을 언급하며 등식 $(5+3)\times12=(5\times12)+(3\times12)$을 제시한다. 그리고 나서, 다음과 같은 괄호를 사용한 식의 계산에 대한 규칙을 제시한다.

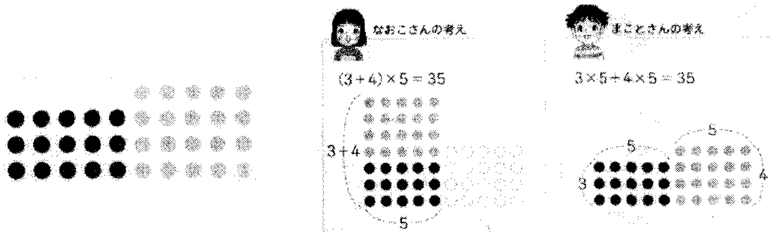
$$(■+●)\times▲=■\times▲+●\times▲$$
$$(■-●)\times▲=■\times▲-●\times▲$$

(杉山吉茂 외 2인, 2005c, p.49)

이는 특정한 사례를 통해 두 수의 합이나 차에 어떤 수를 곱한 것은 두 수 각각에 어떤 수를 곱하여 더하거나 뺀 것과 같다는 규칙을 발견한 후 이러한 규칙의 성립을 ■, ●, ▲ 등을 사용하여 보다 일반적으로 표현한 것이다. 이전까지는 다양한 수 모형의 그림을 통해서 특정한 사례에서 분배법칙의 아이디어를 파악하는 것에 그쳤다면 4-하 교과서에서는 분배법칙을 보다 일반적이고 통합적으로 이해할 수 있도록 시도하는 것으로 보인다. 그러나 아직 이 시기의 학생들은 ■, ●, ▲ 등을 임의의 수로 이해하지는 못하고 구체적인 수

들을 대신하는 것이라고 생각할 뿐이다(김남희, 1997, p.85).

5-상 교과서의 분배법칙은 계산규칙 단원에서 다음과 같이 다룬다. 우선 [그림 24]에서 ●와 ○의 전체 개수를 세는 두 사람의 생각을 비교한다(杉山吉茂 외 2인, 2005d, p.68).



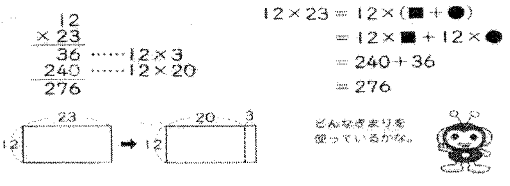
[그림 24] 분배법칙의 맥락 2

왼쪽 학생의 생각은 수 모형의 배열을 이동한 후 한 번에 계산하는 것이고 오른쪽 학생의 생각은 ●과 ○의 개수를 따로 계산하여 합하는 것으로, 두 식이 나타내는 개수는 같으므로 '$(3+4)\times5=3\times5+4\times5$'와 같이 두 사람이 제시한 식은 등호로 연결할 수 있음을 다룬다. 그리고 수 모형을 통해 $(7-3)\times5$ 와 $7\times5-3\times5$ 도 같음을 다룬 후 4-하 교과서에서도 제시한 바 있는 '(■+●)×▲=■×▲+●×▲' 과 '(■−●)×▲=■×▲−●×▲'를 반복적으로 제시한다. 또한 문제를 통해 109×5, 98×6의 계산에 위의 규칙을 이용하는 것을 다룬다. 즉,

$$109\times5=(100+9)\times5=100\times5+9\times5=500+45=545$$
$$98\times6=(100-2)\times6=100\times6-2\times6=600-12=588$$

와 같이 계산 가능함을 다루는 것으로 분배법칙을 적절히 선택적으로 적용하면 매우 효율적인 계산이 될 수 있음을 보인다.

또한, 앞서 다루었던 곱셈의 세로셈 계산 원리 또한 (■+●)×▲=■×▲+●×▲ 의 한 예가 됨을 [그림 25]와 같이 되돌아보는 기회도 갖는다.



[그림 25] 곱셈 알고리즘에 내재된 분배법칙

(杉山吉茂 외 2인, 2005d, p.69)

즉, 5-상 교과서에서는 구체적인 예를 통해 괄호안의 두 수가 뺄셈으로 연결되어 있는 경우에서 분배법칙을 다루고, 효율적인 계산을 위해 학습자가 분배법칙을 선택적으로 사용하는 것과 3학년에서 다룬 곱셈의 세로셈 계산도 분배법칙의 한 예가 됨을 다룬다.

본 연구에서 살펴본 일본 초등교과서의 경우도 분배법칙의 용어를 사용하지는 않으나, 분배법칙의 아이디어는 한 자리 수의 기본 곱셈에서 다루기 시작하여 두 자리 이상 수들의 곱셈 알고리즘의 기본 원리로 사용됨을 일관되며 적극적인 방식으로 드러내고 있다. 나

아가 특정한 수의 곱셈 계산 원리로 이해한 분배법칙을 하나의 규칙으로 파악하고 그 규칙을 ■, ●, ▲ 등을 사용하여 다음과 같이 일반화의 초보적인 표현을 구성한다.

(■+●)×▲=■×▲+●×▲　　　　(■−●)×▲=■×▲−●×▲

그리고 효율적인 계산을 위한 분배법칙의 선택적 사용의 예를 다룸으로써 분배법칙의 외연을 넓히며 동시에 지금까지 자연수 곱셈의 세로셈 알고리즘의 원리로 이해한 것 또한 제시한 계산 규칙의 한 예가 됨을 다룸으로써 지금까지 구체적인 곱셈 계산에서 다양하게 사용하던 분배법칙의 아이디어를 통합적으로 바라볼 수 있도록 한다.

Ⅳ. 결 론

한국과 일본의 초등교과서는 모두 분배법칙의 용어를 도입하지는 않으나 그 아이디어를 본질을 손상시키지 않으면서 다루고 있음을 확인하였다. Ⅱ, Ⅲ장의 분석결과를 바탕으로 두 나라 교과서에서 분배법칙을 다루는 방식의 중요한 특징을 비교하면 다음과 같다.

첫째, 분배법칙을 다루는 맥락을 비교하면 한국교과서의 경우 자연수의 곱셈과 자연수와 대분수 곱셈에서 다루어지나, 일본 교과서의 경우 주로 자연수의 곱셈에서만 다루어진다. 특별히 분배법칙의 아이디어가 처음 도입되는 상황을 살펴보면 한국 교과서는 (두 자리 수)×(한 자리 수)의 계산 원리를 드러내는 과정에서 처음 다루나 일본 교과서의 경우 기본셈에 속하는 한 자리 자연수의 곱셈에서도 셈돌의 배열을 통해 분배법칙을 직관적으로 파악하도록 하고 이를 두 자리 이상의 자연수의 곱셈 계산 원리로 확장하여 이해하도록 한다. 이와 같이 두 교과서는 분배법칙의 아이디어를 처음 파악하는 계산의 단계와 분배법칙을 적용한 곱셈 방법을 다루는 수의 범위에 차이를 보인다.

둘째, 두 자리 이상인 자연수 곱셈의 원리로서 다루어지는 분배법칙을 자세히 들여다보면 한국 교과서의 경우 수모형을 통해 피승수 또는 승수를 자릿값별로 나누어 곱한 후 더할 수 있음을 이해하도록 하고 이를 기초로 '(두 자리 수)×(두 자리 수)'의 단계까지는 머리셈과 필산을 동시에 다루면서도 지도서에서는 올림이 없는 경우 세로셈으로 계산하는 것이 바람직하지 않음을 언급하기도 한다. 머리셈의 방법은 수 모형에서 파악한 자릿값별로 계산하는 분배법칙을 적용하는 것 그 이상의 다른 것이 요구되지 않는다. 그리고 교과서에서는 세로셈으로 표현되는 필산의 방법을 상세히 언급하지 않고 계산 결과도 제시하지 않음으로써 많은 부분 학생들이 발견해야 할 몫으로 남겨둔다. 지도서에서는 처음부터 곱셈의 필산 알고리즘을 형식화하는 것은 바람직하지 않음을 언급하기도 한다. 이러한 것을 종합해보면 한국 교과서에서 곱셈 알고리즘과 관련한 서술방식은 형식화된 알고리즘의 습득보다는 곱셈 계산의 기본 원리인 분배법칙을 이해하는 것에 더욱 비중을 두기 때문인 것으로 생각된다. 비교하여, 일본 교과서의 경우 기본셈을 넘어서는 곱셈의 첫 단계인 (두 자리 수)×(한 자리 수)에서 바로 세로셈의 알고리즘화를 시도하는데 이 때 알고리즘 이면의 계산원리인 분배법칙은 다양한 수 모형을 통해 파악하도록 한다. 또한 세로셈의 각 단계를 수 모형에서 파악한 계산 원리와 지속적으로 연결지어 상세하게 설명함으로써 분배법칙을 바탕으로 한 형식화된 세로셈 곱셈을 학생들이 의미있게 이해하도록 하는 노력으로 판단된다. 또한 일본 교과서에서는 필산인 세로셈을 집중적으로 다루고 난 후 자릿값별로 계산하는 필산의 원리를 기초로 암산도 가능함을 별도로 다룬다(杉山吉茂 외 2인,

2005b, p.59). 즉, 일본교과서의 경우 처음부터 곱셈의 형식화된 알고리즘을 시도하나 알고리즘의 각 단계와 원리가 되는 분배법칙을 일관되고 적극적인 방식으로 연결지어 드러내는 노력을 하는 것으로 볼 수 있다.

셋째, 분배법칙과 관련한 계산 규칙의 일반화 정도에 차이를 나타낸다. 한국 초등교과서에서는 특정한 수의 곱셈을 나타내는 모형에서 분배법칙의 아이디어를 파악하고 이를 특정한 수의 곱셈 계산 원리로서 다루는 것에서 그치는데 반하여 일본 초등교과서에서는 특정한 사례를 통해 이해하고 암묵적으로 사용하던 분배법칙을 하나의 계산 규칙으로 파악하며 그 규칙에 관한 일반화의 초보적인 표현을 다루기도 한다.

이상의 분석 결과를 토대로 분배법칙 지도에 관한 다음과 같은 교육적 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 두 자리 이상인 자연수의 곱셈원리로 다루어지는 분배법칙의 개념 서술방식에 관한 것으로 한국교과서는 수 모형에서 직관적으로 파악한 것을 곱셈 알고리즘과 연결하는 것에 대해서는 학생들이 발견해야 할 몫으로 남겨두고 자세히 설명하지 않으나 일본 교과서는 그 연결성을 매우 상세하게 설명한다. 이는 우리나라 교과서의 경우 학생 스스로 개념과 원리를 발견하면서 이해하도록 구성되어 있는 것이라면 일본 교과서의 경우 학생 스스로 읽어서 개념을 이해할 수 있도록 구성된 것으로 볼 수 있다. 수업 상황에서 개념과 원리를 탐색할 수 있는 충분한 시간과 여건이 허락되고 학생들도 의지와 역량을 가지고 있다면 학생들 스스로 개념과 원리를 발견해 나가도록 짜여진 교과서를 이상적으로 볼 수 있다. 그러나 그렇지 못한 수업 상황에서는 수업에서 다룰 개념과 원리에 대한 설명없이 발견에 필요한 활동과 간접적이고 암묵적인 방식으로 제시된 계산 원리는 자칫 학생 스스로 탐구하기도 어렵고 스스로 읽어서 개념을 이해하기는 더욱 힘들 수도 있다는 가능성을 고려하는 것이 필요할 것으로 보인다. 덧붙여 두 서술방식의 차이가 학생들의 학습에 미치는 효과에 관한 보다 실증적인 연구가 필요한 것으로 판단된다.

둘째, 분배법칙의 일반화에 관한 것으로 현재 우리나라의 경우 초등학교에서는 곱셈 알고리즘과 자연수와 대분수의 곱셈에 분배법칙의 개념을 사용하나 분배법칙을 하나의 계산 규칙으로서 주목하지는 않는다. 그리고 중학교에서 분배법칙의 용어를 처음 도입하며 그 내용은 문자 변수를 사용하여 '세 정수 a, b, c에 대하여 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ ' 과 같이 나타낸다(우정호 외, 중학교 1, p.65). 이는 특정한 수에서만 성립하는 것이 아니고 덧셈과 곱셈 사이에 일반적으로 성립하는 계산 규칙을 통합적으로 나타내는 것이다. 그러나 초등학교에서 구체적인 수들 각각의 곱셈에서 사용한 계산 원리로서의 분배법칙 개념과 이를 연결시키지 못한다면 중학교에서 다루는 분배법칙은 일반화의 맥락에서 의미 있게 이해하기 어렵다. 즉, 초등학교에서 구체적인 사례에서 다루어지는 분배법칙의 개념을 학생들이 보다 풍부하게 이해하는 것이 일반화된 분배법칙의 이해에 꼭 필요한 것으로 보인다. 그런데 현재 한국 초등교과서의 자연수 곱셈에서 다루어지는 분배법칙은 곱셈 알고리즘을 이해하기 위해 꼭 필요한 상황에서만 다루어지므로 자칫하면 곱셈의 형식적인 알고리즘 습득에 분배법칙의 아이디어가 가려질 가능성도 배제할 수 없다. 따라서, 곱셈 알고리즘을 정당화하기 위한 원리로서 분배법칙의 개념을 다루는 것 이외에 효과적인 곱셈 계산에 결정적인 힘을 갖는 다양한 예를 다룸으로써 학생들이 분배법칙의 개념에 주목할 수 있도록 하는 것이 필요한 것으로 여겨진다. 일본 초등교과서에서 분배법칙을 하나의 계산 규칙으로 다루며 초보적인 일반화의 표현을 다루는 것도 분배법칙의 일반화를 보다 의미 있게 하기 위한 또 다른 노력으로 볼 수 있다.

참 고 문 헌

강홍규, 심선영 (2010). 알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 287-314.

교육과학기술부 (2010a). **수학 3-1**. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010b). **수학 3-2**. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010c). **수학 4-1**. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010d). **초등학교 교사용 지도서 수학 3-1**. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010e). **초등학교 교사용 지도서 수학 3-2**. 서울: 두산동아(주).

교육인적자원부 (2006). **수학 5-가**. 서울 : (주)천재교육.

김남희 (1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

신은주 (2002). **7단계 수학교과서의 용어 정의방식과 중학생들의 용어 이해에 관한 연구.** 건국대학교 대학원 석사학위논문.

심선영 (2010). **Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 초등수학 3학년 곱셈 단원 재구성.** 공주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호 (2000). **학교 수학의 교육적 기초.** 서울대학교 출판부.

우정호 외 9인 (2010). **중학교 수학 1.** 서울: 두산동아(주).

정해원 (2006). 중등학교에서의 분배법칙 지도 방안. 부산대학교 대학원 석사학위논문.

杉山吉茂, 飯高 茂, 伊藤説朗 (2005a). *新しい 算數 3 上*. 東京: 東京書籍.

杉山吉茂, 飯高 茂, 伊藤説朗 (2005b). *新しい 算數 3 下*. 東京: 東京書籍.

杉山吉茂, 飯高 茂, 伊藤説朗 (2005c). *新しい 算數 4 下*. 東京: 東京書籍.

杉山吉茂, 飯高 茂, 伊藤説朗 (2005d). *新しい 算數 5 上*. 東京: 東京書籍.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Authors. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

<Abstract>

A Comparative Analysis on the Distributive Property in Korean and Japanese Elementary Textbooks

Byun, Heehyun[7]

In 7th grade textbooks, the distributive property is generalized as in algebraic forms, and it seems that the students have not so good grip on this property. To get a good stock of knowledge on that generalized property, full understanding of it in concrete context should take precedence. This study would aim to propose some educational implications for better understanding of that property, through analysing the contents of it comparatively in Korean and Japanese elementary textbooks.

Keywords: distributive property, multiplication algorithm, generalization

논문접수: 2011. 03. 08
논문심사: 2011. 04. 03
게재확정: 2011. 04. 14

7) bhhmath@kice.re.kr