韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2011. 05. 제 50권, 제 2호, 213-231.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2011, Vol. 50, No. 2, 213-231.

초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 사례 연구

하 수 현 (부산효림초등학교)
이 광 호 (한국교원대학교)

I. 서 론

변수(variable)는 다양한 수학적 상황에서 여러 가지 의미로 나타나는 다면적인 개념이다. 즉 변수는 자리지기로서의 미지수, 다가이름으로서의 부정소, 함수식에서의 독립변수, 종속변수, 매개변수 등 다양한 측면을 갖는다(김남희 외, 2006). 따라서 변수는 다양한 상황을 바탕으로 다각도로 접근되어야 그 의미가 풍부하게 살아날 수 있다(Wagner & Parke, 1993).

이와 같이 다양한 의미를 갖는 변수는 수학에서, 특히 대수에서 중심 역할을 하는 개념으로, 학생들이 변수 개념에 대한 의미를 이해하는 것은 대수 학습, 더 나아가 수학 학습의 기초가 된다. 또한 변수 개념을 올바르게 이해하는 것은 산술에서 대수로의 원활한 이행을 위해 중요할 뿐만 아니라 다른 수학적 아이디어를 이해하기 위한 토대가 된다(Schoenfeld & Arcavi, 1988). 한편, Subramaniam과 Banerjee(2004)는 학생들이 대수 학습에서 직면하는 어려움의 많은 부분은 변수라는 중요한 개념에 대한 이해가 부족하기 때문이라고 보았으며, 김성준(2004)은 문자와 식에 관련된 대수적 사고의 핵심적 요소로서 변수 개념을 제시한 바 있다.

이처럼 변수 개념 지도가 매우 중요하며, 초등학교 수준에서의 초보적인 변수 사용 외에, 중학교 이후의 수학교육과정은 변수를 제외하고는 생각할 수 없을 정도로 변수 개념이 교육과정에서 차지하는 역할이 상당하지만, 실제 학교 현장에서 학생들은 변수의 의미에 대한 고려 없이 조작적인 측면에만 치중하고 있음이 다수의 연구를 통해 확인되었다(김남희, 1997; Küchemann, 1981). 즉 많은 학생들이 변수 기호에 대한 의미를 생각하지 않고, 기호 조작을 절차적으로 행하기만 하고 있으며, 학교 수학은 초기 대수 지도 시, 변수 개념을 구체화 할 수 있는 풍부한 상황을 충분히 제공하지 못하고 있다(Fujii & Stephens, 2001).

한편, 중등학교 학생들의 변수 개념에 대한 이해 수준을 분석한 몇몇 연구들은 많은 학생들이 변수 개념에 대해 바르게 이해하지 못하고 있음을 밝혔다(김남희, 1992; 이중권·이준세, 2008; Wagner, 1981). 이는 대수 학습의 준비 단계인 초등학교 수학에서부터 변수 개념에 대한 지도가 소홀히 이루어졌기 때문이기도 하다. 초등학교 수학에서 '변수'라는 용어가 명시적으로 도입되지는 않지만, 학생들은 교과서나 수학 수업을 통해 은연중에 변수 개념을 접하고 있으며, 따라서 초등학교 학생들은 변수에 대한 형식적인 정의가 도입되기 전에 다양한 변수 개념을 받아들일 수 있는 유연한 태도를 갖추어야 한다. 이 시기에 학생들이 얻게 되는 변수에 대한 초보적인 개념은 중학교 이후에 형식적인 정의가 도입되면서 변수가 본격적으로 사용될 때, 변수의 아이디어와 변수의 표현, 변수의 사용 방식을 이해하는 데 결정적인 영향을 주는 요인이 되기 때문이다(김남희, 1997).

변수 개념과 관련된 연구를 살펴보면 학생들의 변수 개념 이해 수준 및 실태를 분석하기 위한 연구가 몇 차례 수행되었으나, 중, 고등학교 학생들을 대상으로 한 연구가 대부분으로(김남희, 1992; 이중권·이준세, 2008), 초등학교 시기도 변수 개념을 정립하기 위한 준비 단계로서 변수 개념이 의미 있게 다루어져야 함에도 불구하고 변수 개념에 대한 학생들의 이해를 초등 수준에서 다룬 연구는 드물었다. 단, 변수가 표현되는 하나의 형태인, 문자에 대한 초등학생들의 이해 실태를 양적으로 조사한

---

* 접수일(2011년 3월 14일), 게재확정일(2011년 5월 15일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 초기 대수, 변수 개념, 미지수, 패턴의 일반화, 양 사이의 관계

연구가 있었는데(강소희·방정숙, 2008), 이는 학생들이 변수로서 문자를 사용하는지 여부에 대한 정보를 제공해 주기는 하지만, 학생들이 변수의 개념 중 어떤 측면을 잘 인식하는지, 또는 인식하지 못하는지, 어떤 개념적 측면을 다룰 때 오개념이 드러나고, 어려움을 겪는지에 대한 구체적인 답을 제시하지는 않으므로 이에 대한 충실한 답을 얻기 위한 심층적인 연구가 필요하다.

이와 같은 연구의 필요성을 바탕으로, 본 연구에서는 초등학교 학생들의 변수 개념 이해에 대한 상세한 정보를 얻고자 사례 연구를 통한 질적 분석을 시도하였으며, 이를 위하여 Usiskin(1988) 및 Trigueros와 Ursini(1999), Ursini와 Trigueros(2001)의 분류를 활용하였다. 먼저 Usiskin은 변수 사용을 기준으로 학교 대수를 다양한 측면에서 해석하여 '산술의 일반화 과정의 학습', '대수 문제 해결 과정의 학습', '양 사이의 관계 학습', '구조의 학습'의 측면으로 나누어 제시한 바 있다. 본 연구에서는 이 중 인수분해 활동으로 대표되는 '구조의 학습'은 초등학교 수준과는 거리가 멀다고 판단하여, 이를 제외한 나머지 3개의 관점을 활용하여 학교 대수 전반에서 널리 활용되고 있는 변수 개념에 대한 학생들의 이해를 좀 더 체계적으로 분석하였다. 또한 Trigueros와 Ursini는 변수를 이해한다는 것은 변수를 해석하고, 조작하며, 기호화하는 능력을 모두 포괄한다고 보았으며, Ursini와 Trigueros는 초기 대수에서 필요한 변수 개념을 미지수, 일반화하는 수, 함수적 관계를 나타내는 변수로 정의하고, 각각에 대해 변수 개념 이해의 구성 요소를 제시한 바 있다. 본 연구에서는 이들이 제시한 변수 개념 이해의 구성 요소를 학생들의 변수 개념 이해를 분석하기 위한 준거로 삼았다.

요약하자면, 본 연구의 목적은 초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 질적 분석을 통해 학교 수학의 변수 개념 지도와 관련하여 그 동안 간과되어 왔던 문제들을 제기하고, 학생들의 이해 실태를 바탕으로 이에 대한 지도상의 개선 방안을 찾기 위함이다. 더 나아가 초등학교 대수 교육이 변수 개념에 대한 학생들의 이해를 촉진시킬 수 있는 의미 있는 기회를 제공할 수 있도록 시사점을 주는 데 그 목적이 있다.

II. 이론적 배경

1. 변수 개념

가. 학교 대수의 관점에 따른 변수 개념

Usiskin(1988)은 변수 사용을 기준으로 학교 대수의 다양한 측면을 구체화하여 제시하였다. 곧, 학교 대수는 문제 해결 과정의 학습, 산술의 일반화 학습, 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습의 4가지 관점으로 나누어 볼 수 있으며, 각 관점에 따른 변수 사용의 의미를 간단히 제시하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 학교 대수의 관점에 따른 변수 사용

학교 대수의 관점	변수 사용 의미
문제 해결 과정의 학습	자리지기로서의 미지수(unknown)
산술의 일반화 학습	패턴을 일반화하는 인자 다가이름으로서의 부정소(indeterminate)
양 사이의 관계 학습	독립변수, 종속변수, 매개변수
구조의 학습	임의의 대상, 기호(형식적 조작의 대상)

첫째, 문제 해결 과정에 대한 학습으로서 대수를 볼 때, 변수는 방정식의 해에 대한 자리지기인 미지수로 사용된다. 예를 들어, '어떤 수를 5배하여 3을 더하면 40이다. 어떤 수를 구하여라'와 같은 문제는 $5x+3=40$이라는 대수식으로 간단히 나타낼 수 있으며, 이 식은 양변에 3을 빼는 조작을 통해 $5x+3-3=40+(-3)$, 곧, $5x=37$과 같이 해결할 수 있다. 이와 같은 관점에서 변수 x는 미지수로서의 역할을 한 것이다.

둘째, 산술의 일반화 학습 과정에서 변수는 패턴을 일반화하는 인자로서의 역할을 한다. 예를 들어, 임의의 실수에 대해 성립하는 덧셈의 교환법칙을 $a+b=b+a$로 일반화하거나, 일차 방정식의 일반형을 $y=ax+b$로 표현하는 경우, 이 때 사용된 문자 a, b는 패턴을 일반화하는 요소 또는 아직 정해져 있지 않은 상수를 나타내는 부정소로 쓰인 것이다(김남희 외, 2006). 단, Usiskin(1988)이 언급한 학교 대수의 관점 중, '산술의 일반화 과정의 학습'을 본 연구에서는 '패턴을 일반화하는 과정

에 대한 학습'으로 그 의미를 확대하여 적용하였다. 이는, Usiskin이 학교 대수의 측면을 구분할 때 기준으로 한 것이 바로 변수 사용이며, 산술의 일반화 과정의 학습과 관련된 변수 개념은 패턴을 일반화하는 인자로서의 변수이기 때문에 산술의 일반화를 패턴의 일반화로 확대 적용하는 데 큰 무리가 없다고 판단했기 때문이며, 또 산술의 일반화뿐만 아니라 초등 수학 교육과정에서 자주 등장하는 주제인 모양 패턴이나 수 패턴의 일반화에 대한 내용을 모두 포괄하기 위해서였다.

셋째, 대수를 양 사이의 관계에 대한 학습으로 볼 때, 변수는 독립변수, 종속변수, 매개변수로 고려된다(김남희 외, 2006). 예를 들어, 직사각형의 넓이를 구하는 공식 A=L×W(A:넓이, L:가로, W:세로)는 세 양 사이의 관계를 나타내고 있다. 양 사이의 관계에 대한 학습 과정에서 사용된 변수들은 어떠한 관계를 유지하면서 변화한다는 점에서 다른 변수 개념과 구별된다.

넷째, 대수를 구조에 대한 학습으로 볼 때, 변수는 어떤 성질을 만족하는 임의의 대상을 나타내는 기호로서의 역할을 하며, 이러한 문제 상황에서는 변수가 어떤 대상을 나타내고 있는지를 생각하는 것이 아닌, 변수 위에서의 조작만이 의미를 갖는다(Usiskin, 1988). 예로, 'x^2+5x+6을 인수분해 하여라'와 같은 문제에서 변수는 임의의 기호에 불과하며, 따라서 변수 x가 나타내는 대상이 무엇인지를 생각하는 것은 무의미하다.

나. 변수 개념 이해의 구성요소

Ursini와 Trigueros(2001)는 초기 대수에서 나타나는 주요 변수 개념을 미지수, 일반화하는 수, 양 사이의 관계를 나타내는 변수의 3가지로 나누어 보았으며, 이는 Usiskin(1988)이 제시한 변수 사용에 따른 학교 대수의 관점 중 대수 문제 해결 과정, 산술의 일반화 과정, 양 사이의 관계 학습 과정에 각각 대응될 수 있다.

또한 Ursini와 Trigueros(2001)는 초기 대수에서 변수 개념과 관련된 진단적 분석을 하거나 교수 활동을 계획하기 위한 도구로서 3UV 모델(Three Uses of Variable model)을 제안하였다. 3UV 모델은 변수 개념을 이해한다는 것의 의미를 미지수에 관한 이해 요소 5가지(U1~U5), 일반화하는 수에 관한 이해 요소 5가지(G1~G5), 양 사이의 관계를 나타내는 변수에 관한 이해 요소를 6가지(F1~F6)로 나누어 제시한 모델로, 각각의 이해 요소는 Trigueros와 Ursini(1999)가 사용한 해석(interpreting), 조작(manipulating), 기호화(symbolizing)의 3가지 카테고리로 범주화시켜 <표 2>와 같이 나타낼 수 있다.

<표 2> 변수 개념 이해의 구성 요소-3UV 모델

변수 개념 (학교 대수의 관점)		구성 요소	
미지수 (문제 해결 과정 학습)	해석	U1	문제의 조건을 고려함으로써 미지수의 존재를 인지하고, 발견하기
		U2	방정식에 나타난 기호를 특정한 값을 표현하는 것으로 이해하기
	조작	U3	방정식이 참이 되도록 하는 값을 변수에 대입하기
		U4	대수적, 산술적 연산을 수행함으로써 방정식에 나타난 미지의 양을 결정하기
	기호화	U5	특정한 상황에서 발견된 미지의 양을 기호화하고, 이를 방정식으로 나타내기 위해 사용하기
일반화하는 수 (패턴을 일반화하는 학습)	해석	G1	수열이나 문제의 집합에서 패턴을 인지하고, 규칙과 체계를 생각하기
		G2	기호를 임의의 값을 나타낼 수 있는 일반적이고, 결정되지 않은 값으로 이해하기
	조작	G3	수열이나 문제의 집합에서 일반적인 규칙, 체계를 추론하기
		G4	기호화된 변수를 조작하기(간단히 하기, 전개하기)
	기호화	G5	일반적인 서술, 규칙, 체계를 기호화하기
양 사이의 관계를 나타내는 변수 (양 사이의 관계 학습)	해석	F1	표, 그래프, 문장제, 식에 사용된 변수 사이의 대응 관계를 인지하기
		F4	표, 그래프, 문장제, 식에 나타난 변수들 간의 종속적인 변화를 이해하기
	조작	F2	독립변수의 값이 주어졌을 때 종속변수의 값을 결정하기
		F3	종속변수의 값이 주어졌을 때 독립변수의 값을 결정하기
		F5	한 변수의 변화 구간이 주어졌을 때 다른 변수의 변화 구간 결정하기
	기호화	F6	문제의 데이터를 분석하여 양 사이의 관계를 기호화하기

2. 변수 개념 관련 인지적 어려움

변수 개념과 관련하여 학생들이 겪는 인지적 어려움

은 <표 3>과 같이 5가지로 요약될 수 있다.

<표 3> 변수 개념 관련 인지적 어려움

변수 개념 관련 인지적 어려움	관련 연구
변수 기호의 임의성을 이해하지 못함	Wagner(1981)
임의의 대상이 아닌 특정한 대상을 대신하는 것으로만 변수를 이해함	Booth(1988)
변수가 포함된 식을 불완전한 것으로 여김	Collis(1975)
변수가 나타내는 대상을 수에만 국한시킴	Usiskin(1988)
독립·종속 변수 개념을 정확히 이해하지 못함	김남희(1992)

Wagner(1981)는 변수를 나타내는 기호가 바뀔 때 학생들이 방정식과 함수를 보존시킬 수 있는가를 알아본 결과, 변수에 대해 학생들이 흔히 보이는 2가지 오류, 즉 변수 기호가 바뀌면 변수가 나타내고 있는 대상도 바뀔 것이라는 오류, 알파벳 순서가 수의 순서와 대응한다는 오류가 있음을 설명하였다.

Booth(1988)는 학생들이 임의의 대상이 아닌 특정한 대상만을 대신하는 것으로 변수를 이해하는 오류가 있음을 밝혔다. 즉 산술의 법칙을 일반화하는 대수식(예, $a+b=b+a$)에 사용된 변수, 직사각형의 넓이를 구하는 공식(A=L×W)에 사용된 변수를 임의의 수나 양을 대신하는 것으로 보지 못한다는 것이다. 우리나라 학생들을 대상으로 한 연구에서도 임의의 대상을 대신하는 것으로 변수를 보지 못하는 학생들이 많음이 나타났다(김남희, 1992). 초등학교 교과서에서도 분수의 나눗셈 방법을 기호를 사용하여 나타내기도 하며, 덧셈의 교환법칙과 같은 간단한 연산 법칙을 명시적으로 표현하지는 않아도 자주 사용하고 있으므로 초등학교 학생들도 임의의 대상을 나타내는 변수 개념에 대한 이해를 충실히 할 필요가 있다.

Collis(1975)는 연산을 행하지 않은 대수적 표현 그 자체를 대상으로 받아들이는 능력을 '완결성 결여의 수용(acceptance of lack of closure, ALC)' 능력이라고 하였으며, 이와 관련된 연구에서 학생들은 연산 기호가 포함된 대수적 표현을 다소 불완전한 것으로 여겨, 그 자체를 있는 그대로 받아들이지 못함을 확인하였다. x에 3을 더하는 연산(x+3)을 단지 과정으로 인식할 뿐, 그 자체가 대상이 될 수는 없다고 생각하여 무리하게 간단히 하거나 다른 알파벳으로 대체하는 경우가 이에 해당한다.

Usiskin(1988)에 따르면 학생들은 모든 변수를 수를 대신하는 문자로 생각하며, 변수는 항상 문자여야 한다고 믿는 경향이 강하다. 즉 변수는 종종 점, 명제, 함수, 행렬, 벡터 등을 나타내기도 하지만 많은 학생들은 이를 간과하며, $3+x=7$에서 x는 변수로 간주하는 반면, 3+_=7, 3+?=7에서 _ 혹은 ?가 x와 같은 역할을 하고 있음을 인지하지 못한다.

김남희(1992)는 중, 고등학교 학생들을 대상으로 변수 개념과 대수식의 이해 정도를 조사하였다. 그 결과, 앞서 Wagner(1981)의 연구에서 드러난 것과 같이 학생들은 변수를 나타내는 기호가 다르면 그 대상까지 다르다고 생각하며, 변수를 변하는 대상이 아닌 변하는 수로 인식하는 경향이 강함을 확인하였다. 또 독립과 종속의 관계를 나타내는 변수 인식, 부정소로서 변수 개념, 집합의 모든 원소를 대표하는 변수에 대한 이해 능력이 부족함을 밝혔다. 이는 변수 계산의 조작적인 측면을 지도하는 것에 선행하여 변수의 의미에 대한 본질적인 이해에 보다 관심을 기울일 필요가 있다는 문제를 제기한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 방법 개관

본 연구는 다양한 대수 문제 상황에서 나타나는 초등학생들의 변수 개념 이해의 양상을 심층적으로 분석하기 위해 질적 사례 연구 방법을 적용하였다. 사례 연구는 개인이나 프로그램 또는 한 집단과 같은 제한된 체계나 단위에 대해 집중적으로 묘사, 분석하는 방법으로(Merriam, 1998), 단순한 수치 이면에 나타나는 사실들, 의도하지 않은 영향, 양적으로 나타나기 어려운 결과들을 찾을 수 있게 한다(Patton, 2002). 본 연구에서는 일반적인 대수 문제 상황에서 자연스럽게 나타나는 학생들의 변수 개념 이해 과정을 분석하고자 하며(김영천, 2006), 학생들의 변수 개념 이해에 대해 추상적이기 보다 좀 더 생생하고, 구체적인 정보를 얻는 것을 목적으로 하기 때문에(Merriam, 1998), 또 학생들이 변수 개념을 어떻게 이해하는지, 그러한 이해를 보이는 이유가 무엇인지를 파악하는 것에 초점을 두어 양적으로 나타나지 않는 심층적인 분석을 추구하므로 사례 연구 방법이 적

합하다고 판단하였다(Yin, 1994). 본 연구에서의 사례는 학생들이 변수 개념을 이해하는 현상으로 정의될 수 있으며, 구체적으로 대수 문제 해결 과정, 패턴의 일반화 과정, 양 사이의 관계 학습이라는 각각의 제한된 맥락 안에서 일어나는 변수 개념 이해의 현상이 본 연구의 사례가 된다.

2. 연구 대상

본 연구에서는 초등학교 학생들의 변수 개념 이해의 특징을 분석하기 위해 6학년 학생 중 연구 대상자를 선정하였다. 초등학교 1학년 교과서에서부터 변수의 일종인 도형 기호(예, □, △, ○)를 사용하며, 또 변수 개념에 대한 형식적인 지도는 어느 학년에서도 이루어지지 않기 때문에 1~6학년 중 어느 학년을 연구 대상으로 정하여도 큰 무리는 없으나, 6학년 학생들은 초등학교 교육과정을 통해 교과서에 나타난 변수와 관련된 경험을 충분히 한 상태로, 나머지 학년에 비해 변수 개념 이해에 관해 가장 많은 정보를 제공해 줄 수 있을 것이라 판단했기 때문이다.

또한 본 연구는 연구의 결과를 일반화하는 것을 목적으로 하지 않으므로 연구자가 접근하기 용이한 부산시 소재 J 초등학교 6학년 1개 학급을 대상으로 변수 개념 검사를 실시하였다. 검사지에 나타난 변수 개념 이해의 특징을 분석한 후, 최종 연구 대상자로 2명을 선정하였으며, 이와 같이 두 학생을 선정하는 데 사용된 대상 표집 방법은 집중 표집 방법(intensity sampling)이다. 이는 연구 현상에 대해 풍부한 정보를 제공해 줄 수 있는 결정적인 사례를 선정하는 방법이며, 수학적 기초가 매우 부족하여 수학 개념 이해에 큰 어려움이 있는 학생과 수학 개념 이해에 있어 일반적인 것 이상의 탁월한 능력을 보이는 학생을 제외한 나머지 학생들 중에서 수준이 낮은 학생과 수준이 높은 학생을 동시에 포함시키는 방법이다(Patton, 2002). 곧, 본 연구에서는 검사지 문항에 대한 학생들의 반응을 변수 개념 요소별로 분류하고 각각에서 나타나는 오류를 추출해 낸 결과, 개념 오류가 거의 나타나지 않아 변수 개념 이해의 수준이 높다고 판단되는 학생 A와 오류가 빈번하게 나타나는 것으로 보아 개념 이해 수준이 낮은 학생 B를 면담대상자로 선정하였다. 담임교사의 의견을 참고한 결과 두 학생은 모두 학년 수준에 적합한 기본적인 수학 교과 내용을 잘 수행할 수 있다는 측면에서 일반적인 수학 문제 해결 능력에 있어서는 큰 차이가 없다고 볼 수 있으므로 변수 개념 이해와 관련하여 본 연구에 더욱 풍부한 결과를 제공해 줄 수 있을 것이라 판단된다. 연구 대상의 일반적인 특성에 대한 정보를 덧붙이자면, 두 학생 모두 사교육을 받지 않으며, 수학 교과를 좋아한다고 하였고, 모든 문제 해결에 있어 자신의 생각을 솔직하고 명확하게 표현하고자 노력하는 모습을 보였다. 단, 학생 A는 차분하게 문제를 해결하는 반면, 학생 B는 급하게 문제를 해결하여 실수가 나타나는 경우가 더러 있었다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 다양한 대수 문제 상황에서 나타나는 학생들의 변수 개념 이해의 양상을 심도 깊게 관찰하고, 분석하기 위해 검사지와 심층면담을 통해서 자료를 수집하였다.

가. 검사지 제작

본 연구의 검사 도구는 선행 연구(강소희·방정숙, 2008; 김남희, 1992; Küchemann, 1981; Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009; Wagner, 1981) 분석 및 교과서 분석 결과를 토대로 작성되었으며, 두 차례의 예비검사를 통해 최종 완성된 검사 도구의 유형과 문항의 예는 <표 4>와 같다.

<표 4> 검사 도구 문항의 예

변수 개념	문항의 예
미지수	• C=5×A-B에서 A=3, B=7일 때, C의 값 구하기 • 7×A+22=109, 7×B+22=109에서 A, B의 크기 비교하기 • 8+△-7+△=9에서 △의 값 구하기
일반화하는 수	• a+b=5일 때, b+a-2의 값 구하기 • $\frac{\square}{\triangle} \div \frac{☆}{\bigcirc} = \frac{(\quad)}{(\quad)} \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = \frac{(\qquad)}{(\qquad)}$ • a 보다 3 큰 수 표현하기
양사이의 관계를 나타내는 변수	• 규칙 맞히기 게임에서 규칙 찾기 • G단계 타일의 수를 N이라 할 때, N을 G에 관한 식으로 나타내기 • H=3×B 식에 알맞은 문제 상황 만들기

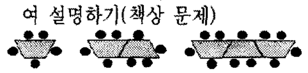
나. 심층 면담

학생들의 변수 개념 이해 양상을 심층적으로 분석하기 위한 면담은 매 회마다 30~40분씩 대수 학습 상황별로 총 3회 실시하였으며, 개별 면담의 형태로 진행되었다. 면담 과제는 매 회마다 5문항씩 총 15문항을 제시하였으며, 각 변수 개념 간 차이에 대한 이해 정도를 알아보기 위해 이전 면담에서 활용한 문항을 이후 면담에서 다시 활용하기도 하였다. 면담 내용 및 과제는 <표 5>와 같으며, 면담 과제를 작성하기 위해 변수 개념 관련 선행 연구를 참고하였다(예, 김남희, 1992; Carraher, Schliemann, & Schwart, 2007; Fujii & Stephens, 2008; Moss, Beatty, Barkin, & Shillolo, 2008; Wilson, Ainley, & Bills, 2003).

1차 면담에서는 미지수를 구하기 위해 대수 문제를 해결하는 동안 나타나는 학생들의 변수 개념 이해의 특징을 살펴보고자, 식에 나타난 미지수를 구하는 문제 3개를 난이도 순으로 제시하였으며, 또 미지수가 1개인 경우와 2개인 경우로 구분되는 문장제 2개(용돈 문제, 연필 문제)를 제시하였다. 2차 면담에서는 패턴의 일반화 상황과 관련하여 학생들이 가장 흔히 접하는 덧셈의 교환법칙 문제, 대수식을 간단히 하고 전개시킬 수 있는지를 알아보기 위한 문제, 주어진 식이 참이 되는 이유를 밝혀 이와 유사한 식을 만들고, 이를 일반화시키는 문제, 수 패턴과 기하 패턴에서 N번째 수나 모양을 찾는 문제를 제시하였다. 3차 면담에서는 주어진 문제 상황에 관계없이 학생들이 두 변수 사이의 종속적인 변화를 인지하고, 이를 기호화할 수 있는지를 알아보기 위해 표, 그림, 그래프, 문장, 식의 다양한 문제 상황을 제시하였으며, 연속적인 변화와 이산적인 변화, 정비례 상황과 반비례 상황을 모두 포함하여 문제를 제시하였다.

면담 과정은 모두 오디오로 녹음되었으며, 각각의 면담이 끝난 후 학생의 활동지와 함께 녹음 자료를 1차 분석하였다. 1차 분석 시, 학생들의 개념 이해 정도가 자세히 드러나지 않는 부분을 기록하였고, 이는 후속 면담에 반영되었다. 3차의 면담이 모두 완료된 후, 녹음 자료를 전사해 각각의 변수 개념 이해 구성 요소별로 특징을 자세하게 분석하였다.

<표 5> 변수 개념에 따른 면담 주요 과제

변수 개념		면담 주요 과제
미지수 (1차 면담)	해석 조작	• 23=27-□ • 2×t=t+3 • 7+4×△=70-3×△
	기호화	• [용돈 문제] 형은 어머니께 받은 용돈 중 800원은 주머니에, 나머지는 지갑에 두었다. 동생은 형이 지갑에 넣어 둔 돈보다 3배 많은 돈을 용돈으로 받았다. 형과 동생이 받은 용돈이 같을 때, 형이 지갑에 넣어 둔 돈을 구하기 위한 식을 세워라. • [연필 문제] 파란 연필 한 자루 가격은 200원, 빨간 연필 한 자루 가격은 300원이다. 영희가 각 연필을 몇 자루씩 사고, 2400원을 지불하였다. 영희가 산 파란 연필과 빨간 연필의 자루 수를 구하기 위한 식을 세워라.
일반화하는 수 (2차 면담)	해석	• A+B=B+A에서 A, B에 대해 설명하기
	조작	• '5×□에 2를 더한 것'과 같은 식 찾기 ① (5+2)×□ ② 5×□+2 ③ 7×□ ④ 10×□ ⑤ 2+□×5 ⑥ 7 ⑦ 3×□+2×□+2
	기호화	• [산술 패턴] 78-49+49=78을 a-b+b=a의 형태로 일반화하기 • [수 패턴] 1, 3, 5, 7, 9, … 에서 N번째 수 표현하기 • [모양 패턴] 아래의 패턴에서 책상 수와 의자 수 사이의 관계를 일반화하여 설명하기(책상 문제) 
양 사이의 관계를 나타내는 변수 (3차 면담)	해석 조작 기호화	• [표] 입력 값과 출력 값을 표로 제시하고, 두 값 사이의 관계 나타내기 • [그림] 직사각형의 넓이, 가로, 세로 사이의 관계 나타내기 • [그래프] 용수철에 매단 추의 무게와 용수철이 늘어난 길이에 관한 그래프를 보고, 변하는 두 양 사이의 관계 나타내기 • [문장] 전체 100쪽인 책에서 지금까지 읽은 책의 쪽수와 앞으로 읽어야 할 책의 쪽수 사이의 관계 나타내기 • [식] Y=X×3에 어울리는 문제 상황 만들기

Ⅳ. 연구 결과

1. 대수 문제 해결 과정에서 나타난 변수 개념 이해

가. 해석하기

다양한 형태의 미지수(□, t, △)가 포함된 방정식 문제를 제시하였을 때 학생 A는 미지수의 존재를 곧바로 인지하였으며, 기호로 표현되든, 문자로 표현되든 관계없이 방정식에 나타난 미지수를 정해질 수 있는 특정한 값을 대신하는 것으로 해석하였다. 학생 A는 방정식에서 미지수는 수를 기호로 나타낸 것이라고 보았으며, 수를 기호로 나타내는 이유를 질문하자 문장제를 예로 들며 기호를 사용하면 간단히 표현할 수 있다고 설명함으로써 변수 기호의 필요성에 대해 인지하고 있음을 드러내었다. 이를 통해 학생 A는 변수가 포함된 식을 수학의 심미성과 관련하여 자연스럽게 받아들이고 있음을 알 수 있다. 또한 학생 A는 변수의 기호가 바뀐다고 해서 기호가 나타내는 값이 변하는 것은 아니라는 변수 기호의 임의성에 대해서도 정확히 설명할 수 있었다(<에피소드 1>).

<에피소드 1 - 미지수로서 변수에 대한 의미 이해 (학생 A)>

학생 A: (23=27-□의 식에서) □를 구하려면 일단은 27에서 □를 빼면 23이니까 27에서 23을 빼도 □가 되잖아요. 그러니까 4가 나왔어요.
연구자: 그럼 여기서 □는 뭘 의미해?
학생 A: □는 4를 기호로 나타낸 거요.
연구자: 그럼 □에 다른 수가 오면 안 돼?
학생 A: 네. 왜냐면 여기서는 (23과 27을 가리키며) 숫자가 둘 다 나와 있으니까 다른 숫자가 오면 안 되고, □는 정해져 있어요.
(중 략)
연구자: 여기에 □, t, △가 있잖아. 이런 것들은 뭐라고 생각해?
학생 A: 정해져 있는 숫자를 기호로 나타낸 거요.
연구자: 그럼 이 기호는 바꿀 수 없어?
학생 A: 기호는 바꿀 수 있는데 숫자는 바꿀 수 없어요.

한편, 학생 B는 문자가 포함된 식을 매우 불편해 했으며, 기호 □로 표현된 미지수는 결정될 수 있는 특정한 값으로 인지하는 반면, 문자 t로 표현된 미지수에 대해서는 일관된 의미를 부여하지 못했다. 또한 2×t=t+3에서 식을 만족하는 t의 값을 찾지 못하자 문자 t는 정해지지 않는 자유로운 수라는 설명을 하였다(<에피소드 2>). 기호 □와 문자 t가 왜 다른 의미를 갖는지 질문하자, □는 많이 풀어봤고 t는 풀어보지 못했다는 답변을 했는데, 이는 수학적으로는 의미 없는 답변일지도 모르나, 학교 교육에서 일률적으로 기호 □만 접해 왔기 때문에 □와 동일한 역할을 하는 다른 기호나 문자에 대해 □와 같이 이해하지 못한다는 것을 알려주므로, □뿐만 아니라 다른 기호나 문자를 사용하여 지도할 필요가 있음을 시사한다고 볼 수 있다.

<에피소드 2 - 미지수로서 변수에 대한 의미 이해 (학생 B)>

학생 B: (2×t=t+3의 식을 보고 의아해하며) 2 곱하기 t? (등호 양쪽의 식을 가리키며) 이게 둘 다 같다는 말이죠? (t에 수를 1부터 대입하며 등호가 성립하는 t의 값을 찾는다.)
연구자: 이 식에서는 t가 의미하는 게 뭘까?
학생 B: t는 □를 의미하는 것 같은데요. 잠시 만요. (잠시 뒤) 이건 t를 □로 생각하면 못 풀 것 같아요. 다른 개념이 있나 봐요.
(중 략)
연구자: t가 1이 될 수도 있고, 2가 될 수도 있고, 3이 될 수도 있어?
학생 B: 네, 그럴 것 같아요.
연구자: (23=27-□의 식을 가리키며) 여기서도 □가 1이 될 수도 있고, 2가 될 수도 있고, 3이 될 수도 있어?
학생 B: 아니오. 이건 □를 빼서 같은 수니까, 이건 제한된 수에요. 지정된 수가 있는 거죠.
연구자: 그럼 t는 지정된 수가 없어?
학생 B: □라 생각 안 하니까 지정된 수가 없을 것 같아요. t는 자유로운 것 같아요.
연구자: 자유롭다는 말이 무슨 말이야?
학생 B: 지정된 수가 아니라는 것 같은데…. (23=27-□의 식을 가리키며) 이런 건 뭐 □에 들어갈 수가 달라지면 27 빼기 5라 하면 22니까 이건 23이랑 같지 않잖아요. 그래서 □는 바꿀 수가 없는데 t는 바꿀 수가 있을 것 같아요.
연구자: 왜 그렇게 생각해?
학생 B: □는 풀어봤고 t는 안 풀어봤으니까요.

이 외에도 Küchemann(1981)이 지적한 바 있는 변수의 기호가 다르면 결코 같은 값을 가질 수 없다고 생각하는 오류는 학생 A와 B 모두에게서 공통적으로 발견되

었으며(예, 가+나=16을 만족하는 해의 순서쌍으로 (8, 8)은 될 수 없다고 생각함), 특히 학생 B는 연산 기호가 포함된 식을 연산 과정이 아닌 대상 그 자체로 받아들일 수 있는 완전성 결여의 수용 능력(Collis, 1975)이 매우 부족하였는데, 이는 <에피소드 3>에서 확인할 수 있다.

<에피소드 3 - 연산 기호가 포함된 식을 그 자체로 수용하지 못함(학생 B)>

학생 B: (□+3을 표현해야 하는 과제에서) □는 구할 수가 없으니까 □에 더하기 3을 해도 구할 수가 없잖아요. 그럼 □3인 것 같아요.

현진이가 무조건 +3을 했지 그러면 □+3=□3 결국은 □3 이야

연구자: 그렇다면 □-3은 어떻게 나타낼까?
학생 B: □-3? 이것도 □3인 것 같은데요.

이와 같이 학생 B는 연산 기호나 변수가 포함된 대수식 그 자체를 수용하는 데 큰 어려움을 겪었으며, 식에서 연산 기호를 생략하여 무리하게 간단히 하려는 모습을 보였다. 이러한 노력이 지나쳐 의미가 다른 대수식(□+3과 □-3)도 같은 형태(□3)로 표현하였는데, 이는 초등학교 이후에 대수식을 대상 그 자체로 받아들여 조작하고 구조화하는 학습 단계에서 학습을 방해하는 요소가 될 수 있다. 이러한 어려움을 완화시키기 위해서는 1960년대 새 수학을 강조하던 시기, 2+3을 5의 다른 이름으로 가르쳤듯이, 산술 단계에서부터 충분히 간단히 할 수 있는 연산식도 그 자체로 받아들일 수 있도록 학습 경험을 제공하는 것이 필요하다(김남희, 1992).

나. 조작하기

□, t, △가 포함된 방정식을 풀어 각각의 값을 구하도록 요구했을 때, 두 학생은 모두 미지수를 구한 다음 그 값을 다시 대입하여 등식을 만족하는지를 검산해 보는 조작 능력은 있었지만, 대수적 또는 산술적 연산을 수행함으로써 방정식에 나타난 미지의 값을 구하는 능력, 즉 대수식을 자유자재로 조작하는 능력에서는 차이를 보였다. 학생 B는 23=27-□와 같이 간단한 문제를 해결할 때는 별 무리 없이 □의 값이 4라고 말할 수 있었지만, 미지의 값에 상수가 곱해진 형태의 문제(예, 2×t)에서는 연산의 성질을 이용해 대수식을 조작하기보다 문자나 기호에 특정한 값을 대입하여 등호를 만족하는 값을 찾는 데 급급한 모습을 보였다. 이에 반해 학생 A는 <그림 1>과 같이 2×t를 t+t로, 4×□를 □+□+□+□로 식을 조작하는 나름의 전략을 활용하여 미지의 값을 구했다.

2×t=t+3	7+4×△=70−3×△
t+t=t+3	7+□+□+□+□=70−□−□−□
t=3	□=8

<그림 1> 학생 A의 대수식 조작

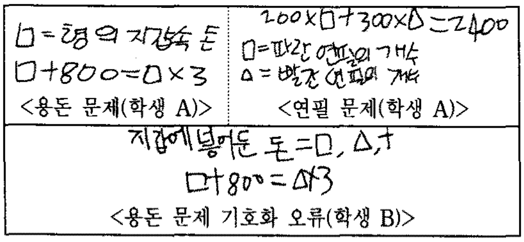
<그림 1>에서 학생 A는 문제에서 주어진 기호 △ 대신 □를 사용하였는데, 이에 대해 <에피소드 1>에서도 확인하였듯이 기호는 달라져도 답을 구하는 데는 문제가 되지 않음-변수 기호의 임의성-을 정확히 설명할 수 있었지만, 동일한 역할을 하는 기호를 굳이 □로 바꾸어 문제를 해결하는 것은 □ 기호를 제외한 다른 기호를 사용하는 데 불편을 느끼기 때문인 것으로 풀이된다. 따라서 일본의 초등학교 수학 교육과정에서처럼 특정한 값을 대신하는 자리지기로서 변수를 사용할 때, □, △, a, x 등 다양한 기호 또는 문자를 순차적으로 도입하여 활용할 필요가 있으며, 이렇게 다양한 기호를 활용한다면 지금까지 선행 연구를 통해 자주 지적된 바 있는, □+3=□와 같은 교과서의 기호 사용 오류도 개선할 수 있을 것이다. 실제로 일본의 교과서에서는 이와 같은 식을 □+3=○로 표현하고 있다(Watanabe, 2008).

다. 기호화하기

학생들이 주어진 문제 상황에서 발견된 미지의 양을 기호화하고, 방정식을 세우기 위해 사용할 수 있는지를 알아보기 위해 2가지 문장제가 주어졌다. 하나는 미지수가 1개인 용돈 문제, 다른 하나는 미지수가 2개인 연필 문제이다.

이 두 문제에서 학생 A는 문제의 의도를 파악하고 [그림 2]에서와 같이 미지의 양을 기호화하여 올바른 대수식을 만든 반면, 학생 B는 미지의 양을 어느 하나의 기호로 나타내는 것을 어려워하였으며, 용돈 문제에서는 형이 지갑 속에 넣어 둔 돈을 □, 동생의 용돈을 △라 둔 후, 동생의 용돈을 다시 △×3이라고 기호화하는 오류를 보였다. 즉 학생 B는 미지의 양을 표현하기 위해 처음 사용한 기

호(□, △)가 나타내는 것이 무엇인지 문제를 해결하는 동안 깊이 고려하지 않았으며, 문제에 주어진 조건을 적당히 나열하는 것에만 관심을 기울임으로써 문장제를 대수적 언어로 기호화하는 데 성공하지 못했다. 이와 같이 미지의 값을 기호로 나타낼 때 그 기호가 의미하는 바를 명확히 인지하지 못하는 것은, 학생들이 미지의 값이 포함된 문장제를 변수가 포함된 방정식으로 표현하고 미지의 값을 구하는 과제를 해결하는 데 큰 방해 요소가 된다.



<용돈 문제(학생 A)> <연필 문제(학생 A)>
<용돈 문제 기호화 오류(학생 B)>

<그림 2> 미지수로 사용된 변수의 기호화

<에피소드 4 - 용돈 문제 기호화 오류(학생 B)>

학생 B: 만약에 □나 △나 t라 치면 나올까 안 나올까 잘 모르겠는데. (지갑에 넣어 둔 돈=□, △, t 라고 적음, 문제를 다시 읽어 보고 난 후) 지갑에 넣어 둔 돈이 또 나오네요. 그럼 □×3=△라고 나타낼 수 있을 것 같은데요.

연구자: 여기서 □랑 △는 뭐야?

학생 B: □는 형이 지갑에 넣은 돈이고, △는 동생이 받은 돈이요.

연구자: 그럼 800원은 어디 있어?

학생 B: 아! 800원은 주머니에 있으니까 지갑에 넣어 둔 돈이랑 이거 두 개 더하면 형이 받은 용돈이 되잖아요. 그럼 동생도 용돈이 같으니까 이렇게 부호를 붙여서….(□+800=△×3이라 적음)

연구자: 이 식을 다시 설명해 줄래?

학생 B: □는 형이 지갑에 넣은 돈, 800은 주머니에 넣은 돈, 동생은 3배 많은 돈을 받았으니까 곱하기 3을 하면 이게(△×3) 동생의 용돈이 돼요.

연구자: 동생은 형이 지갑에 넣어 둔 돈보다 3배 많은 돈을 받았다고 했지 않아?

학생 B: 아, 그럼 이 곱하기를 가져와 가지고 이렇게 (□+800×3=△) 적으면 돼요.

앞서 살펴보았듯이 두 학생은 대수문제해결 과정에서 나타난 미지수로서의 변수 개념 이해에 있어 질적으로 큰 차이를 보였다. 학생 A는 미지수를 특정한 값을 나타내는 기호로 이해하고 결정될 수 있는 정해진 값이라고 해석하는 데 반해, 학생 B는 미지수가 기호로 표현될 때와 문자로 표현될 때 의미를 다르게 부여하였다. 구체적으로 □ 기호에 대해서는 미지수로서 인지하는 것처럼 보였으나, t로 표현된 문자는 □와 다른 역할을 하며, 값이 정해지지 않을 것이라고 생각하였는데, 이는 미지수로서 변수가 사용되는 상황 및 그 의미에 대해 명확한 개념이 정립되어 있지 않음을 드러내는 부분이라고 볼 수 있다. 미지수 조작에 있어서도 학생 A는 미지수를 구하기 위해 나름의 전략을 가지고 대수식을 변형, 조작할 수 있었지만, 학생 B는 문자나 기호에 적당한 값을 대입하여 그 결과를 확인하는 것에만 치중하였고, 또 미지수를 기호화하여 대수식을 만드는 과정에서도 학생 B는 미지의 값을 기호로 나타내고, 이를 문제 해결 과정 중에 일관되게 적용하지 못해서 적지 않은 오류를 보였다.

2. 일반화하는 수로서 변수 개념 이해

가. 해석하기

일반화하는 인자로서 변수의 의미를 해석하는 데 가장 핵심적인 요소는 학생들이 대수식에 사용된 문자나 기호를 임의의 값을 나타내는 일반적인 변수로 이해할 수 있는가이다. Carraher, Brizuela와 Schliemann(2001)은 어린 학생들이 임의의 값을 대신하는 것으로서 변수를 이해해 나가는 과정을 연구하면서 9세 학생들도 '임의의'라는 용어를 자주 사용하게 되었음을 발견했다. 이는 임의의 대상을 이해하는 데 까다로운 인지적 발달 상태가 전제되어야 함을 의미하는 것이 아니므로 초등 수준에서 충분히 의미 있는 이해가 가능함을 시사하며, 본 연구에서도 두 학생 모두 문자의 값이 '정해지지 않았다', '아무 수나 가능하다' 등의 표현을 통해 패턴을 일반화하는 인자로서 사용된 변수를 일반적이고, 결정되지 않은 값으로 해석하고 있음을 확인할 수 있었다.

두 학생에게 1차 면담에서 과제로 활용되었던 23=27-□에서의 기호 □와 덧셈의 교환법칙을 나타내는 식 A+B=B+A에서 문자 A, B의 차이를 설명하도록 요구하자, 학생 B는 'A, B는 각각 다른 숫자를 넣어도 되고, □

는 똑같아야만 답이 나온다'라는 나름의 설명을 통해 □는 미지수로서 결정될 수 있는 값으로, A, B는 임의의 수의 집합을 나타내는 것으로 이해하고 있음을 보여주었고(<에피소드 5>), 학생 A 역시 두 변수 개념의 차이에 대해 유사한 방식으로 근거를 제시하였다(<에피소드 6>).

<에피소드 5 - 미지수와 일반화하는 인자로서의 변수 의미 비교(학생 B)>

연구자: 어제 23=27-□ 문제 풀었잖아. 여기에 있는 □랑 (A+B=B+A에서) A, B랑은 뭐가 다른 것 같아?

학생 B: A, B는 각각 다른 숫자를 넣어도 되고, □는 똑같아야만 답이 나와요.

연구자: 다시 설명해 줄래?

학생 B: □는 만약에 3이라 한다면 27 빼기 3은 (23이 아니라) 24잖아요. 이건 다른 수가 나오면 틀리잖아요. 그래서 □는 4 하나 밖에 없는 거고, 그리고 또 (A+B=B+A를 가리키며) 이거는 다른 숫자들이 들어가도 =이 되는 거니까 저는 다르게 생각했어요.

<에피소드 6 - 패턴을 일반화하는 인자로서의 변수 의미 이해(학생 A)>

연구자: (A+B=B+A에서) A, B는 뭘 나타내는 거야?

학생 A: 숫자요.

연구자: 어떤 숫자?

학생 A: 아무 거나 다요.

연구자: 그러면 A가 가질 수 있는 값이 몇 개야?

학생 A: 무한해요.

연구자: 어제 풀었던 23=27-□ 문제에서 □랑 이 식의 A, B는 어떻게 달라?

학생 A: □는 숫자가 정해져 있는데, 왜냐하면 나머지 숫자가 둘 다 나와 있으니까 27에서 23 빼면 바로 □가 나오잖아요. A, B는 전부 모르는 숫자라서 아무거나 넣어도 돼요. 그니까 □는 정해져 있고, A, B는 안 정해져 있어요.

이와 같이 두 학생은 미지수로서 변수 개념과 일반화하는 인자로서 변수 개념, 즉 두 상황에서 변수가 대신하고 있는 것의 범위와 변화 가능성에 대해 잘 인지하고 있으며, 특히 학생 B는 올바른 미지 값을 대입하지 않고 다른 값을 대입했을 때 나타나는 오류를 들어 미지수로서 변수가 패턴을 일반화하는 인자로서의 변수와 다른 이유를 자세히 설명할 수 있었다. 학생 A도 식의 구조를 통해 미지수를 구할 수 있는 상황과 구할 수 없는 상황에 대한 나름의 근거를 제시할 수 있었다.

나. 조작하기

패턴을 일반화하는 인자로서 변수를 조작할 수 있는 능력은 대수식을 간단히 하거나 확장시켜 전개할 수 있는가와 관련되며, 이를 확인하기 위해 '5×□에 2를 더한 것'과 같은 식을 찾는 문제를 제시하였다. 대수식을 간단히 하거나 덧셈과 곱셈의 교환법칙을 이용하여 주어진 조건과 같은 식을 찾는 과제를 두 학생 모두 능숙하게 해결하였고, 교환법칙이 성립되는 근거를 들어 논리적인 설명을 제시할 수 있었다. 그러나 5×□를 3×□+2×□로 확장시키는 것에 관해 학생 A는 □에 적당한 수를 대입하는 방법을 사용함으로써 대수식을 능숙하게 조작하는 능력을 보여주지 못했으며(<에피소드 7>), 학생 B는 오히려 두 식이 다른 식이며, □가 2개라서 같지 않다는 비합리적인 설명으로 자신의 의견을 정당화하였다(<에피소드 8>).

<에피소드 7 - 대수식을 간단히 하거나 확장하기(학생 A)>

연구자: (5×□+2와 2+□×5가 같다는 학생 B의 설명을 듣고) 5×□랑 □×5는 순서가 다르잖아.

학생 A: 그건 똑같아요. 왜냐하면 나누기랑 빼기 말고 더하기랑 곱하기는 두 개 순서가 바뀌어도 똑같아요.

연구자: '5×□에 2를 더한 것'과 '3×□+2×□+2'는 왜 같다고 생각해?

학생 A: 아무 숫자나 넣어서 계산해 보니까, 3을 넣으니까 둘 다 17이 됐어요.

연구자: □에 아무 숫자나 넣는다고 했는데 □에는 아무 숫자나 넣어도 돼?

학생 A: 네. 왜냐하면 뭐라고 안 써져 있어서 숫자가 정해져 있는 게 아니라서 넣었어요.

연구자: 그럼 아무 수나 어떤 수?

학생 A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 같은 거요. 분수하고 소수도 돼요.

연구자: '5×□에 2를 더한 것'과 '3×□+2×□+2'가 같은지를 알아보려면 이렇게 아무 숫자나 넣어서 구하는 방법 말고는 없을까?

학생 A: (잠시 생각하다가) 잘 모르겠어요.

<에피소드 8 - 기호화된 변수를 확장하는 과제에서의 오류(학생 B)>

연구자: '5×□에 2를 더한 것'과 '3×□+2×□+2'는 왜

다르다고 생각해?
학생 B: 문제에 5로 나타나 있는데 3으로 해서 안 되는 것 같아요.
연구자: 그런데 문제에서는 □가 1개 있는데, 여기는 □가 2개잖아.
학생 B: 네, □가 2개라서 더 안 돼요.

이와 같이 학생들이 주어진 대수식을 간단히 할 수는 있으나 다양한 형태로 대수식을 확장시키지 못하는 것은, 식을 간단히 하여 간결한 형태의 답을 찾는 수학 문제만을 주로 다루어 본 데서 그 원인을 찾을 수 있을 것이다. 초등학교 저학년에서 처음 수를 다룰 때 수를 모으는 것과 가르는 활동을 반복하여 지도함으로써 수에 대한 감각을 키우듯, 대수식을 가르는 것(확장하기)과 모으는 것(간단히 하기)에 대한 반복적인 학습이 이루어진다면, 대수식을 상황에 맞게 자유자재로 다룰 수 있는 학생들의 조작 능력 또한 향상될 수 있을 것이다.

다. 기호화하기

패턴을 일반화하는 인자로서 변수를 사용하여 기호화함으로써 주어진 식이나 패턴을 일반화할 수 있는지를 알아보기 위해 78-49+49=78의 식을 a-b+b=a의 형태로 일반화하는 문제, 1, 3, 5, 7, 9, … 의 수 패턴에서 N번째 수를 기호화하는 문제, 주어진 모양 패턴에서 책상 수와 의자 수 사이의 관계를 일반화하는 문제가 제시되었다.

학생 A는 78-49+49=78의 식을 □-○+○=□의 형태로 일반화하여 자신의 풀이를 정당화 할 수 있었으며, 학생 B는 주어진 식의 구조를 인지하기보다 직접 계산에 의존함으로써 식의 패턴을 발견하는 것에 실패했지만, 연구자의 도움을 받아 패턴을 인지한 후에는 □-△+△=□의 형태로 식을 일반화할 수 있었다.

또 학생 A가 수 패턴 또는 모양 패턴(책상 문제)을 주어진 문자 N을 사용하여 정확하게 일반화하고 이에 대해 명확한 근거를 제시한 데 반해, 학생 B는 수 패턴과 모양 패턴을 모두 일반화하지 못했다. 학생 B는 N번째 수, 책상이 N개 있을 때 의자 수를 표현하는 데 어려움을 겪은 것은 물론, 기호를 사용한 일반화 이전에 '큰 수'로서 제시된 50번째, 100번째 수나 모양을 추론하는 데도 오류를 보였다. 학생 B가 패턴의 일반화 문제를 해결하면서 사용한 일관된 전략은, 문제에 주어져 있는 1단계, 2단계, 3단계 정도의 초기 단계 수와 구하고자 하는 단계 수와의 비례 관계를 따져, 수 패턴에서 수나 모양 패턴에서 모양의 수도 그대로 비례할 것이라는 전제를 바탕으로 문제를 해결하는 것이었다(<표 6>). 면담 과정에서 학생 B는 이러한 전략이 오류가 있음을 알아채고 다른 전략으로 수정하여 문제 해결을 시도했지만, 여전히 오류를 가진 전략을 사용하였고, 따라서 각 단계에 맞는 수를 찾는 데 성공하지 못했다.

<표 6> 패턴을 일반화하는 인자로서 변수를 사용한 기호화

과제		패턴을 일반화하는 인자-기호화	
		학생 A	학생 B
수 패턴	10번째 수	1+18=19	1, 3, 5, 7, … 하나씩 헤아리기
	50번째 수	1+(2×49) =1+98=99	5번째 수 → 9 50번째 수(5×10) → 90(9×10)
	100번째 수	1+(2×99) =1+198=199	5번째 수 → 9 100번째 수(5×20) → 180(9×20)
	N번째 수	1+{2×(N-1)}	A→B→C→D→E⋯→N 1 2 3 4 5 14
모양 패턴	책상 10개	2+(3×10) =2+30=32	책상 1개 → 의자 5개 책상 3개 → 의자 11개 책상 10개(3×3+1) → 38(11×3+5)
	책상 50개	2+(3×50) =2+150=152	책상 2개 → 의자 8개 책상 50개(2×25) → 200(8×25)
	책상 N개	2+(3×N)	A→B→C→D→E⋯→N 1 2 3 4 5 14

주어진 패턴에서 한 단계가 다음 단계로 갈 때의 변화를 대수적으로 표현하는 과제 역시 학생 A는 쉽게 해결하였지만, 학생 B는 큰 어려움을 겪었으며, 이 과정에서 학생 B는 면담 전반에 걸쳐 반복적으로 보였던 오류 중 하나인 문자로 사용된 알파벳의 순서를 자연수와 대응시키는 오류를 결정적으로 드러내었다. 이는 Wagner (1981)가 지적한 바 있는 오류로, 이에 대한 학생 B의 사고 과정은 <에피소드 9>를 통해 확인할 수 있다.

<에피소드 9 - 알파벳 순서를 자연수와 대응시키는 오류(학생 B)>

연구자: 1, 3, 5, 7, 9, 11, … 이렇게 계속되는 수 중 하나를 골라 A라고 하자. A 다음에 오는 수는 어떻게 쓸 수 있어?
학생 B: 아, 알파벳으로 보면 B 같은데요.
연구자: 왜?

학생 B: A 다음이 B니까요.
연구자: 그럼 그 다음 수는?
학생 B: C라고 쓸 수 있을 것 같은데….
연구자: 이 수들 중에 하나가 A라면, A 다음에 오는 수는 A보다 얼마 큰 수야?
학생 B: A보다 1 큰 수요. 1씩 늘어나니까.
연구자: 1씩 늘어나?
학생 B: 알파벳을 숫자로 보면 A에서 B로 가면 1씩 늘어나잖아요.(아래와 같이 적음)

A→B→C→D→…
1→2→3→4→…

학생 B는 수 패턴에서 A 다음에 오는 수를 알파벳 문자 A 다음에 오는 B라고 답하였으며, 연구자가 수 패턴의 규칙을 다시 상기시키고자 A 다음에 오는 수는 A보다 얼마 큰 수인지 물었을 때, 2씩 커지는 수 패턴의 규칙을 무시하고 1 큰 수라는 설명을 했다. 이는 A 다음에 오는 수가 B라는 자신의 설명을 정당화하기 위한 것으로, 이를 통해 학생 B는 수로만 주어진 수 패턴의 규칙을 말할 수 있다 하더라도, 수에 대해 적용되는 규칙을 동일한 패턴에 등장하는 문자에 대해서는 확대 적용하지 못함을 알 수 있다.

요약하자면, 패턴을 일반화하는 인자로 사용된 변수 개념에 대한 두 학생의 이해 역시 질적인 차이가 있었다. 구체적으로, 두 학생 모두 일반화하는 인자로 사용된 변수에 대해 임의의 값을 나타낼 수 있는 결정되지 않은 값으로 이해하고 있었으며, 미지수로서 결정될 값을 나타내는 기호와의 차이를 설명할 수 있었으므로 변수 해석에는 큰 차이가 없다고 볼 수도 있다. 그러나 학생 B가 미지수로서의 변수 개념을 해석할 때 완전한 이해를 보여주지 못했음을 고려한다면 두 학생 모두 변수 개념을 바르게 해석하고 있다고 섣불리 판단하기에 다소 무리가 있다. 또한 두 학생은 변수 조작과 기호화, 특히 변수를 사용하여 주어진 패턴을 일반화하여 표현하는 기호화 능력에서는 큰 차이를 드러냈다.

3. 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념 이해

가. 해석하기

양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념의 해석적 측면, 즉 변수 사이의 대응 관계 및 종속적인 변화를 인지하는 것에 대해, 학생 A와 B는 문제의 표현 형태에 관계없이 대응 관계를 잘 말할 수 있었다. 예를 들어 입력 값과 출력 값이 주어진 표에서는 대응하는 값끼리 선으로 연결함으로써, 그래프에서는 주어진 점의 x값과 y값을 찾아 선으로 연결하는 등의 방법으로 그 대응 관계를 적절히 설명하였다.

또한 학생 A와 B는 독립변수와 종속변수라는 용어를 사용하지는 않았지만, 이 두 가지 변수의 역할 및 변수들 간의 종속적인 변화에 대해서도 자신의 언어로 잘 설명할 수 있었다. 학생 A의 경우 x(독립변수)는 문제 상황에 적합하다면 얼마든지 임의의 값을 가질 수 있지만, y(종속변수)는 x에 주어진 연산을 수행한 결과가 되어야 한다는 타당한 설명을 제시하였다. 학생 B는 x에는 '수가 통틀어서 들어간다'는 설명을 통해 x가 임의의 값을 가질 수 있다는 것을 자신의 언어로 표현하였고, x가 미리 정해져야 y를 결정할 수 있으며 y는 x에 따라 변한다는 설명을 통해 변수 사이의 종속적인 변화를 인지하고 있음을 드러냈다.

Y=X×3이라는 식에서 두 변수의 의미 및 관계를 파악하여 식에 적합한 문장을 구성하는 과제에서 학생 A는 <그림 3>과 같이 적절한 상황을 구성하였지만, 이산적인 변화가 아닌 연속적인 변화를 표현하는 문장을 제시할 것을 요구하자 이산적인 양(바나나, 피자)을 조각으로 나눔으로써 연속적인 것을 표현할 수 있다는 적절하지 않은 설명을 하였다. 이를 통해 학생 A가 연속적인 변화를 표현하는 것을 어려워함을 알 수 있다(<에피소드 10>). 이 또한 연속적인 양을 수학적으로 보는 경험이 많이 부족한 데서 그 원인을 찾을 수 있으며, 따라서 학생들이 연속적인 변화와 관련된 문제 상황을 많이 다루어 보게 할 필요가 있다.

$y = x \times 3$

원숭이가 한우리에 X만큼있고 그우리가 3개있다. 원숭이는 모두 Y마리이다

<그림 3> 주어진 식을 보고 학생 A가 만든 문제 상황

<에피소드 10 - 연속적인 변화 상황 구성에서의 오류(학생 A)>

학생 A: (Y=X×3에 적절한 문장을 <그림 3>과 같이 구성한다.)

연구자: 그러면 여기서 X가 뭐야?
학생 A: 한 우리에 들어 있는 원숭이 수요.
연구자: X에 어떤 게 들어갈 수 있지? 몇 개나 들어갈 수 있어?
학생 A: 아무 숫자나 다 들어갈 수 있어요. 소수랑 분수 빼고요.
연구자: 그러면 소수랑 분수도 들어갈 수 있는 문장을 만들 수 있겠어?
학생 A: (잠시 뒤) 한 접시에 바나나가 X 조각만큼 있고, 아, 피자가 X 조각만큼 있고 그게 세 접시가 있으면 Y개.
연구자: 피자가 X 조각이면 X가 0.5라고 해도 돼?
학생 A: 네. 자르면요.
연구자: 자르면 돼? 0.001 조각은?
학생 A: 자를 수는 있어요.

동일한 과제에서 학생 B는 <에피소드 11>에서처럼 연구자의 도움을 받아 오류를 수정함으로써 적절한 문장을 제시할 수는 있었지만, 학생이 구성한 문제 상황을 바탕으로 사과의 값으로 얼마를 주어야 하는지 질문하자, y 또는 x의 3배 등과 같은 문자가 포함된 식을 말하지 못하고, x에 특정한 값 7을 대입하여 21원을 주어야 한다고 응답함으로써 여전히 문자를 다루는 데 어려움이 있음을 드러내었다.

<에피소드 11 - 식에 적합한 문제 상황 만들기에서 오류 수정 과정(학생 B)>

학생 B: (Y=X×3에 적절한 문장을 다음과 같이 구성한다.)

사과가 X개가 있는데, 물가가 세 배로 뛰어 올라서 사과 파는 상인이 Y를 달라고 합니다. 그럼 얼마를 줄까요?

연구자: 그럼 얼마를 주어야 해?
학생 B: 네. 7 곱하기 3은 21. 21원을 달라는 소리죠.
연구자: 어, 아저씨가 7개 달라고 얘기 안 했는데.
학생 B: 그게 아니고, 사과가 X개 있는데 물가가 세 배로 뛰어올라서 장사 아저씨가 Y를 달라고 하니까 어떤 사과를 사려는 사람이 만약에 7개를 달라고 하면 그 아저씨가 요새 물가가 세 배로 뛰어올라서 곱하기 3 해 가지고 Y 만큼 줘요. 그러면 21이잖아요.
연구자: 지금 봐봐. 7개를 달라고 했어. 물가가 뛰어올랐는데 세 배로 21개를 주면 더 많이 주는 거네?
학생 B: 그러면 이거 어떻게 해야 되지? X를 사과의 개수라고 해 볼까요?
연구자: 처음에 X를 사과의 개수라고 했잖아. 사과가 X개 있는데 그랬잖아.
학생 B: 사과의 돈을 X. 다시 할게요(아래와 같이 적음).

사과의 시가는 원래 X입니다 그런데 물가가 3배나 뛰어올라 Y를 달라합니다. 얼마를 줘야 될까요?

연구자: 그러면 얼마를 줘야 돼?
학생 B: X가 다 통틀어서라고 말했잖아요. 통틀어서 모든 수를 말하는데 만약에 시가가 원래 7원이라고 하면 세 배가 뛰어올라서 7 곱하기 3은 21이니까 Y는 21원이요.

또한 학생 B는 Y=X×3이라고 주어진 식을 X×3=Y로 굳이 바꾸어 문제를 해결함으로써 등호의 오른쪽에 식이 있는 것을 매우 불편해 했는데, 이는 등호 개념에 대한 의미 이해가 완전하지 않은 것, 곧 등호를 연산의 결과로만 국한시켜 보는 것으로부터 기인한 결과라 할 수 있다.

이전의 면담 과제를 다시 제시하며 미지수, 패턴을 일반화하는 인자, 양 사이의 관계를 나타내는 변수 사이의 차이를 질문하자, 학생 A는 미지수로 사용된 변수는 값을 구할 수 있도록 수가 주어져 있기 때문에 그 값이 정해지고, 패턴을 일반화하는 인자로서 사용된 변수는 아무 값이나 가질 수 있으며, 양 사이의 관계를 나타내는 변수는 어떤 하나의 변수가 아무 값이나 가질 수 있는 데 반해 이 변수의 값에 따라 나머지 변수의 값이 정해진다고 말함으로써 자신의 언어를 사용하여 수학적으로 타당한 설명을 제시하였다. 학생 B는 동일한 질문을 하였을 때 나름의 언어로 타당한 설명을 하는 듯 보였지만, 완전한 이해 여부를 확인하기 위해 다른 상황에서 재차 질문하였을 때는 개념적 오류를 드러내었는데, 이를 통해 학생 B는 3가지 변수 개념의 차이에 대한 지식이 완전히 내면화되어 있다고 보기 어렵다(<에피소드 12>).

<에피소드 12 - 변수 개념의 차이에 대한 잘못된 설명(학생 B)>

연구자: (a×2=b 과제 해결 후) 지금까지 a, b가 어떻게 변하는지 설명했잖아. 여기서 a, b랑 23=27-□에서 □는 뭐가 다른 것 같아?
학생 B: b는 똑같고, a는 다른 것 같은데요.
연구자: 어떻게?
학생 B: b는 자꾸 (2의) 배수가 나오잖아요. 2, 4, 6,

8, …, 100까지도 나오잖아요. □도 4로 나타내면 2의 배수로 똑같잖아요.
연구자: 그래서 무엇과 같고, 무엇과 다르다는 말이야?
학생 B: 27이 a고, □가 b인 것 같아요.
(중 략)
연구자: (23=27-□와 W×L=24에서의 변수를 가리키며) 이 둘은 어떻게 달라?
학생 B: 너무 단순한데 이거. 등호(=)가 하나는 앞에 있고, 하나는 뒤에 있어요.
연구자: 그래? 등호가 앞에 있고 뒤에 있고 하는 것 말고는?
학생 B: 똑같은 것 같기도 하고 아닌 것 같기도 하고….

나. 조작하기

학생들의 양 사이의 관계를 나타내는 변수 조작 능력은 하나의 변수 값이 주어졌을 때 나머지 변수 값을 결정할 수 있는가, 또 한 변수의 변화 구간이 주어졌을 때 나머지 변수의 변화 구간을 종속적인 관계에 의거하여 설명할 수 있는가의 관점에서 분석되었다.

학생 A와 B 모두 한 변수의 값이 주어졌을 때 이 값을 적합한 변수 자리에 대입하여 나머지 변수의 값을 구하는 과제를 쉽게 해결하였다. 또 한 변수의 변화 구간이 주어졌을 때 나머지 변수의 변화 구간을 결정하는 과제에서, 두 학생은 모두 나머지 변수의 값을 각각 계산하지 않고도 비례적인 개념을 활용하여 변수의 변화 구간을 잘 찾을 수 있었다(<에피소드 13>).

<에피소드 13 - 변화 구간 설명하기(학생 B)>
연구자: (W×L=24에서) W가 2에서 6으로 변했어. 얼마만큼 변한거야?
학생 B: 세 배요.
연구자: 그럼 L은 얼마만큼 변해야 돼?
학생 B: 3으로 나누는 거요.
연구자: 만약에 W가 2에서 1로 바뀌었어. 그럼 어떻게 바뀐 거야?
학생 B: 두 배를 나눈 거요.
연구자: W가 이렇게 바뀔 때 L은 어떻게 바뀌어야 해?
학생 B: 이렇게 커지는 것도 두 배로요.

다. 기호화하기

구체적인 데이터를 분석하여 두 양 사이의 관계를 문자를 사용한 식으로 표현할 수 있는 능력, 즉 양 사이의 관계를 나타내는 변수를 사용한 기호화 능력은 방정식을 풀고, 패턴을 일반화하는 상황에 비해 두 학생 간 차이가 드러나지 않았다. <표 7>에서 확인할 수 있듯이, 표와 그림 문제에서는 두 학생이 동일한 문자식으로 양 사이의 관계를 기호화했다. 또 그래프 문제에서 두 학생은 2개의 축에 나타난 양이 서로 다른 것을 의미함에도 불구하고 다른 변수를 사용하지 않고, 수를 부여하면 같은 값을 가진다는 이유로 같은 변수를 사용하여 기호화하는 동일한 오류를 범했다. 문장으로 제시된 문제에서는 두 학생의 식이 동일하지는 않지만, 2개의 적절한 기호를 사용하여 두 변수 사이의 관계를 정확하게 표현하였다.

면담 과제에서 문제에 나타난 두 변수 간의 관계 유형으로, 정비례 관계(표, 그래프), 반비례 관계(그림), 합이 일정한 관계(문장) 등 다양한 유형을 제시하였는데, 두 학생은 양 사이의 관계가 어떤 유형인가에 관계없이 각각의 변화 관계를 적합한 식으로 기호화할 수 있었다. 이를 통해 양 사이의 관계가 어떤 유형인가는 양 사이의 관계를 기호화하는 두 학생의 능력에 큰 영향을 주지 않음을 알 수 있다.

또한 문제의 표현 형태(예, 그림, 표, 식 등)에 따라 변수를 사용하여 양 사이의 관계를 기호화하는 능력에 차이가 있는지를 알아보기 위해 다양한 표현 형태를 제시하였지만, 표현 형태에 따른 두 학생의 기호화 능력에도 차이가 없었다. 그래프 문제에서 두 학생 모두 오류를 범하기는 했지만, 이러한 오류가 나타나는 원인은 문제의 표현 형태가 아닌 두 가지 변수가 동일한 값을 갖는 독특한 관계를 제시한 데 있으므로, 문제가 어떤 표현 형태로 주어졌는가는 두 학생의 기호화 능력과 큰 관련이 없다고 볼 수 있을 것이다.

<표 7> 두 양 사이의 관계를 나타내는 변수를 사용한 기호화

과 제		양 사이의 관계를 나타내는 변수-기호화	
		학생 A	학생 B
표	입력 값과 출력 값의 관계	a×2=b	a×2=b
그림	직사각형의 넓이	W×L=24	W×L=24
그래프	추의 무게와 용수철이 늘어난 길이	□g=□㎜ (오류)	$x=x$ (오류)
문장	읽은 쪽수와 읽어야 할 쪽수	100-△=○	A+B=100

요약하자면, 두 학생 모두 표, 그림, 그래프, 문장제, 식에 사용된 변수 사이의 대응 관계를 인지하며, 두 변수가 종속적으로 변함을 자신의 언어로 설명할 수 있었다. 또 이러한 종속적인 변화를 염두에 두고, 독립변수와 종속변수 중 어느 한 값이 주어졌을 때 나머지 값을 구하는 과제를 쉽게 해결하였으며, 한 변수의 변화 구간이 주어졌을 때 비례적인 사고를 이용하여 다른 변수의 변화 구간을 결정할 수 있었다. 양 사이의 관계를 기호화하는 과제에서는 미지수 또는 패턴을 일반화하는 인자로서 사용된 변수를 기호화하는 것에 비해 두 학생의 기호화 능력에 있어 차이가 드러나지 않았다. 또한 문제의 표현 형태(예, 그림, 표, 식 등)나 주어진 양 사이의 관계(예, 정비례, 반비례 등)가 어떠하냐에 따라 변수 사이의 관계를 기호화하는 능력에 있어서도 차이가 나타나지 않았다.

V. 논의

본 연구는 초등학생들의 변수 개념 이해의 양상을 심층적으로 분석하기 위해 초등학교 6학년 학생 2명을 선정하여 면담을 실시하였으며, 면담 과정에서 드러난 학생들의 이해 과정을 질적으로 분석하였다. 본 연구의 결과로부터 얻을 수 있는 논의점은 다음과 같다.

첫째, 면담에 참여한 두 학생은 일반적인 수학 문제 해결 능력에 있어 큰 차이가 나타나지 않았으나, 변수 개념 이해에 있어서는 의미 있는 차이를 보였다. 한편, Trigueros와 Ursini(1999)는 학생들의 변수 개념 이해의 발달에 학교 교육과정이 얼마나 기여하는지를 연구한 결과, 학생들이 갖는 변수 개념은 그들이 이수한 대수 교육과정만큼 실질적으로 향상되지 않음을 확인하였으며, 따라서 학생들이 변수 개념을 이해하는 데 있어 느끼는 어려움의 많은 부분은 학생 고유의 인지적, 인식론적인 특성 때문이 아니라 현재의 교수학적 접근법의 문제에 기인한다는 결론을 내렸다. 이러한 결과들은 기존에 이루어지던 일반적인 수학 수업만으로 학생들의 변수 개념 이해를 보장할 수 없으며, 일반적인 수학 문제 해결 능력이 우수하다고 해서 변수 개념 또한 잘 이해하고 있을 것이라 판단할 수 없음을 시사한다.

한편, 초등 수학 교육과정에서도 일반화를 학습하고, 함수적 관계와 변수에 대해 사고하며, 대수적 기호를 사용하여 표현할 기회는 매우 풍부하다(Carraher & Schliemann, 2007). 단, 초기 대수 단계에서는 대수 교육과정이 따로 존재한다기보다 다른 내용 영역에 자연스럽게 녹아들어 지도가 이루어져야 하지만, 현재 일반적인 초등 수학 교육과정을 통해 변수 개념을 비롯한 대수적 사고를 다룰 기회가 학생들에게 충분히 보장되지 않고 있다. 따라서 초등학교 수학 내용을 다루는 중 곳곳에 나타나는 변수 개념을 비롯한 대수적 사고 요소를 명확히 하고, 이를 의식적으로 지도하기 위한 노력이 필요하다.

둘째, 학생들은 기호 □는 매우 친숙하게 생각했지만 다른 기호나 문자에 익숙하지 못하여, 변수로 사용될 때 같은 역할을 하는 여러 가지 기호나 문자에 대해 다른 의미를 부여하기도 했다. 이는 초등학교 수학 교과서에 등장하는 문자 기호가 제한되어 있는 것에서 그 원인을 찾아볼 수 있다. 곧, 중학교 이후의 교과서에서는 기호보다 대부분 문자로 변수를 표현하지만, 초등학교에서 제시되는 변수는 □가 대부분이며 이 또한 문제의 결과나 답으로 활용되는 경우가 많다. 이와 같은 기호의 제한적인 사용으로 인해 현재의 초등학교 교과서에서는 변수 사용 규칙이 전혀 고려되지 않은 □+3=□와 같은 오류가 나타나기도 한다. 이러한 오류는 이후 형식적인 대수 학습에서 문자식을 다룰 때 성공적인 학습을 방해하는 요소로 작용할 것이므로 이에 대한 세심한 지도가 필요하며, 또한 중학교 이후의 대수 학습을 촉진시키기 위해, 초등학교에서부터 □ 외에 다양한 기호 및 문자를 도입하는 것과 관련하여 심도 깊은 논의가 필요하다.

셋째, 임의의 값을 나타내는 문자에 무리하게 특정한 값을 부여하는 등 일반화하는 인자로서 사용된 변수에 대한 학생들의 이해가 불완전하며, 일관성이 없었다. 이러한 오류가 나타나는 것은 학교 수학에서 주로 다루는 변수는 미지수와 관련된 것이 대부분이며, 일반적인 수 또는 패턴의 일반화로 문자를 이용하는 활동이 거의 이루어지지 않기 때문이다(Fujii & Stephens, 2001). 따라서 학생들이 다양한 측면의 변수 개념을 경험할 수 있도록 풍부한 기회가 제공되어야 한다.

넷째, 학생들은 식에 나타난 문자를 하나의 대상으로 간주하여 문자 간 조작을 통해 연산할 수 있는 능력이 부족하였다. 또한 연산 기호가 포함된 대수식을 그 자체

로 수용하지 못하고 이를 대신하기 위해 다른 알파벳을 쓴다든지, 대수식에서 연산 기호를 무리하게 생략하는 오류를 보이기도 했다. 산술에서는 수 개념이 근간이 되듯, 대수에서는 변수 개념이 대수의 바탕을 이루는 본질적인 개념이므로 수를 지도하는 것에 준하여 변수 개념을 지도할 필요가 있으며, 그 대표적인 예로 수를 가르고 모으는 활동과 유사하게, 변수가 포함된 식 자체를 다양하게 가르고 모으는 활동을 한다면 학생들의 대수식 조작 능력은 향상될 수 있을 것이다.

다섯째, 학생들은 다양한 측면의 변수를 사용하여 기호화하는 데 어려움을 느꼈다. 우선, 대수 문제 해결 과정의 학습에서 학생들은 미지의 값이 포함된 문장제를 보고 미지의 값을 구하는 과제는 쉽게 해결하나, 문장제를 하나의 식으로 만드는 기호화 과정을 어려워함을 본 연구에서 확인할 수 있었다. 또한 고등학생들도 문장제를 수학적 언어로 전환하는 능력이 부족하다는 이중권과 이준세(2008)의 연구 결과는 이후의 대수 교육과정을 이수한다 하더라도 그 능력이 효율적으로 나아지지 않음을 의미한다. 따라서 주어진 문장제를 대수식으로 번역하는 것과 관련된 지도는 매우 단순한 문장제를 다루는 초등학교 저학년에서부터 꾸준히 이루어져야 한다.

또한 패턴을 일반화하는 학습에서 학생들은 규칙이나 패턴을 잘 인지하는 데 반해, 패턴을 추론하고 문자를 사용하여 기호화하는 능력이 부족하였다. 대수적 사고의 발달에 있어 일반화는 매우 중요한 요소이며(김성준, 2003; Fujii & Stephens, 2001), 어린 학생들도 수학적 일반화를 할 수 있고 이를 대수적인 표기법으로 표현할 수 있지만(Carraher et al., 2007), 우리나라 초등학교 수학에서 일반화에 대한 학습은 거의 이루어지지 않으므로 초등학교 학생들에게도 패턴의 변화 규칙을 일반화하여 표현하는 학습 경험이 제공될 필요가 있다. 이 때, 구체적인 경우에 대한 경험을 충분히 제공하고, 성급한 형식화가 아닌 체계적인 추론을 통해 특수한 사례로부터 일반화 단계로 서서히 나아갈 수 있도록 지도해야 한다(김성준, 2003). 또한 비형식적으로라도 일반화된 표현을 구성해 보는 것이 중요하며, 일반화된 표현을 구성했다면 이를 다시 특수한 경우에 적용해 보는 과정, 즉 특수에서 일반, 일반에서 특수로의 상호전환 과정을 학생들이 체험할 수 있도록 해야 한다(김남희, 1997).

여섯째, 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념과 관련하여 학생들은 양 사이의 관계를 나타내는 식을 보고 문제 상황을 구성하는 과제를 해결하는 데 어려움을 겪었으며, 학생들이 바르게 구성한 문제 상황도 실제적이고 연속적인 변화가 아닌 가상적이고 이산적인 변화 상황을 바탕으로 한 것이 대부분이었다. 이에 대한 원인을 찾기 위해 교과서에서는 양 사이의 관계에 대해 어떤 소재를 활용하고 있는지 확인해 보았더니, 책상 수와 의자 수 사이의 관계, 세발자전거 수와 자전거 바퀴 수 사이의 관계, 색 테이프를 자른 횟수와 도막 수 사이의 관계 등 가상적이고 이산적인 변화를 소재로 하는 것들이 대부분이었다. 두 양 사이의 관계를 나타내는 문제 상황은 실세계의 변하는 경험적 대상으로부터 출발해야 하며, 따라서 변화를 함의하는 실세계의 대상(예, 시간, 길이, 무게, 온도)을 다루는 풍부한 경험이 요구되므로(김남희, 1997), 이러한 학습 경험이 충분히 이루어질 수 있도록 교수학적인 노력이 필요하다.

제언을 덧붙이자면, 본 연구에서는 일반적인 수학 문제 해결 능력에 있어 양적인 차이는 거의 없으나 변수 개념 이해에 있어서는 질적으로 큰 차이를 드러내는 2명의 학생을 대상으로 하였지만, 이 사례를 바탕으로 나온 결과만으로 수학 문제 해결 능력과 변수 개념 이해 사이의 상관관계를 일반화하여 설명하기는 어렵다. 따라서 수학 문제 해결 능력 또는 대수 문제 해결 능력과 변수 개념 이해의 각 요소별 상관관계를 분석하는 연구가 진행된다면 의미 있는 시사점을 제공할 수 있을 것이라 생각된다.

마지막으로 본 연구를 통해 앞으로 초등학교 학교 수학의 내용을 지도할 때 다양한 변수 개념과 관련하여 변수를 해석하고, 조작하며, 기호화하는 경험을 충분히 제공함으로써 변수 개념 자체에 대한 이해를 도울 뿐만 아니라 이러한 경험이 산술에서 대수로의 이행 과정에서 학생들이 겪는 어려움을 완화시키는 데 조그만 역할을 할 수 있기를 기대해 본다.

참 고 문 헌

강소희 · 방정숙 (2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사. 학교수학 **10(2)**, 139-154.

김남희 (1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문.

_____ (1997). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습 지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. 학교수학 **5(3)**, 343-360.

_____ (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문.

김영천 (2006). 질적연구방법론Ⅰ. 서울: 문음사.

이중권 · 이준세 (2008). 고등학교 1학년 학생들의 변수 개념에 관한 이해도 조사. 자연과학논문집 **9**, 25-45.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12: 1988 yearbook* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In H. P. Marja (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 1*, 130-140.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning.* Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variable. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* 1, 258-264.

_____ (2008). Using numbers sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 70th yearbook* (pp. 127-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, & D. E. Küchemann (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* 강윤수 외 8인 공역 (2007). 정성연구방법론과 사례연구. 서울: 교우사.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., & Shillolo, G. (2008). "What is your theory? What is your rule?" Fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 70th yearbook* (pp. 155-168). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics. Hoboken,* NJ: John Wiley & Sons.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher,* **81(6)**, 420-427.

Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference,* **3**, 121-128.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference,* 4, 273-280.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In H. P. Marja (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 4*, 327-234.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12*: 1988 yearbook (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal of Research in Mathematics Education,* **12(1)**, 107-118.

Wagner, S., & Parke, S. (1993). Advancing algebra. In P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom/high School* mathematics (pp. 119-139). NY: Macmillan.

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 70th yearbook* (pp. 127-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2003). Comparing competence in transformational and generational algebraic activities. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference,* 4, 427-434.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Case Study on the 6th Graders' Understanding of Concepts of Variable

Ha, Su Hyun
Hyorim Elementary School
Jangpyung-ro, Saha-gu, Busan 604-845, Korea
E-mail : gktngus@lycos.co.kr

Lee, Gwang Ho
Dept. of Elementary Education, Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

The purpose of this study is to analyze the 6th graders' understanding of the concepts of variable on various aspects of school algebra. For this purpose, the test of concepts of variable targeting a sixth-grade class was conducted and then two students were selected for in-depth interview. The level of mathematics achievement of the two students was not significantly different but there were differences between them in terms of understanding about the concepts of variable. The results obtained in this study are as follows:

First, the students had little basic understanding of the variables and they had many cognitive difficulties with respect to the variables. Second, the students were familiar with only the symbol '□', not the other letters nor symbols. Third, students comprehended the variable as generalizers imperfectly. Fourth, the students' skill of operations between letters was below expectations and there was the student who omitted the mathematical sign in letter expressions including the mathematical sign such as $x+3$. Fifth, the students lacked the ability to reason the patterns inductively and symbolize them using variables. Sixth, in connection with the variables in functional relationships, the students were more familiar with the potential and discrete variation than practical and continuous variation. On the basis of the results, this study gives several implications related to the early algebra education, especially the teaching methods of variables.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : early algebra, variable, unknown, general number, variables in functional relationships