韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 05. 제 50권, 제 2호, 165-184.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2011, Vol. 50, No. 2, 165-184.

절댓값 기호를 포함한 일차함수와 그래프의 개념발달에 관한 수학적 모델링 사례연구

신 경 희 (아주대학교)
김 연 지 (아주대학교 대학원)

Ⅰ. 서 론

현대 사회는 학문이나 직업세계에서 뿐만 아니라 일상생활에서도 다양한 과학기술 정보를 자유롭게 의사소통하는 능력이 필요하며, 수학은 이러한 과학기술 정보를 소통하는데 기초적이고 필수적인 수단이다. 학생들은 수학수업을 통해 다양한 상황을 수학적 언어로 표현하고, 타인의 수학적 언어를 이해하는 능력을 기르며 수학적 언어를 사용하여 토론하는 능력을 기르는 것이 필요하다. 제7차 개정 교육과정(교육과학기술부, 2008)의 교수·학습목표는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동을 권장하고 있다. OECD가 주관한 1999년과 2003년 학업성취도 국제 비교 평가(PISA)는 '수학적 성향'을 학생들이 복잡하고 다양한 현실세계를 수학적으로 이해하고 판단하는 능력으로 정의하고 이의 학습을 강조하고 있다(OECD, 2003). 여기서의 현실세계는 개인이 처해있는 자연적이고 사회적이며 문화적인 상황을 일컬으며 이는 Freudenthal(1983)이 주장하는 물리적이고 사회적이며 정신적 세계의 현상을 조직하는 도구로서 수학적 개념, 구조 그리고 아이디어가 발명되어 왔다는 주장과 연결된다. 이와 같이 현대사회에서 요구되는 일생생활과 수학적 지식 연결을 위한 수학교육은 학생들로 하여금 문맥에서의 성공적인 문제해결 경험으로 수학적 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 논리적으로 사고하는 활동을 요구하고 있다(정영옥, 1997).

NCTM(1991)은 실생활 문제를 수학적으로 해결하는 능력의 개발과 신장을 위해 수학적으로 모델링할 수 있는 기회부여를 강조하고 있다. 수학적 모델링은 실생활 문제 속에서 필요한 조건을 추출하여 간단한 현실모델을 개발(Swetz, 1989, 19991)하고, 그것을 다시 수학적 요소로 바꾸어 수학적 모델을 개발한 다음 얻어진 수학적 모델에서 해를 도출하고 그것을 다시 실생활에서 적용하는 순환과정(Burghes, 1980; NCTM, 1991)을 뜻한다. 수학적 모델링은 실생활 문제 속에서 형식이나 관계를 발견하고 수학적으로 조직하고 해석하는 활동을 하는 것 뿐만 아니라 수학적 모델링 과정을 거치면서 학생 스스로 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 깨닫고 이해할 수 있게 된다(Swetz, 1989; Doerr & English, 2003; Blum W. et al, 2002). 또한 문제해결전략을 계획하고 실행하며 반성을 통하여 풀이과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기를 수 있다(성호금, 2000).

한편 '절댓값'은 주변 환경을 수학적인 눈으로 바라본다면 가장 먼저 찾을 수 있는 수학 내용 중의 하나(장효정, 2010)이고, 학교수학에서 절댓값은 좌표평면상에서 거리를 구하고 실수의 대소 관계를 설명할 때 이용되는 중요 개념이다. 절댓값과 관련한 최근연구에서 장효정(2010)은 학교수학에서의 절댓값에 대한 도입이 그 개념이해보다는 절차적 지식에 치중되어 있음을 지적하고 절댓값과 관련한 문맥에서의 문제해결 경험이 개념의 정확한 이해에 도움이 될 것임을 역설하고 있다. 절댓값 기호가 있는 식의 그래프를 그릴 때 나타나는 오류를 연구한 서희진(2009) 역시 학생들이 그래프를 그릴 때 원리를 생각하지 않은 채 기계적으로 그리려고 하며 함수의 그래프에 대한 기본적인 이해의 부족에 그 원인이 있음을 분석하였다. 절댓값은 정수와 유리수 등 실수의 대소

* 접수일(2011년 3월 10일), 수정일(2011년 5월 6일), 게재확정일(2011년 5월 15일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 문맥, 수학적 모델링, 절댓값기호, 수학적 개념발달

관계와 거리, 각종 식에서의 연산뿐만 아니라 함수 단원과 결합하여 도형의 변환, 부등식의 영역, 그래프 등 여러 단원에서 문제해결의 수단이 되므로 절댓값과 관련한 정의와 절댓값 기호가 있는 식과 그 그래프 등의 정확한 개념발달은 필수적이다.

이에 본 연구는 절댓값 기호가 있는 식과 그래프에 대한 유의미한 학습을 위하여 수학적 모델링 적용을 제안하며 이것이 학생에게 절댓값 기호가 있는 일차식과 그래프에 대한 개념, 원리, 법칙에 대한 수학적 개념발달에 미치는 영향에 대하여 살펴보고자 한다.

이를 위하여 NCTM(1991)에 수록된 자료를 학생들의 현실문맥에 맞도록 수정하여 수학적 모델링 수업에 사용하였으며, 두 명의 학생을 대상으로 문맥문제를 통한 수학적 모델링 수업을 진행하면서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프의 개념 발달을 고찰하는 것과 수학적 모델링 수업의 각 단계는 학생들의 개념 발달에 효과적으로 작용할 수 있는가를 모색하는데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 제7차 개정 교육과정에서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프

제7차 개정 교육과정에서 절댓값은 중학교 수학 1의 정수와 유리수단원에서 수직선위에서 두 점 사이의 거리의 개념으로 처음 도입된다. 이후 고등학교 수학 1의 실수와 복소수단원에서 다시 절댓값을 정의하고 절댓값의 성질을 제시하고 있으며 부등식단원에서는 절댓값의 정의를 이용하여 일차부등식의 풀이를 설명하고 있다. 도형의 방정식단원에서는 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 나타내기 위해 절댓값 기호를 사용하였으며 함수단원에서는 절댓값 기호가 있는 식과 그래프가 문제 속에 다양하게 활용되고 있다.

가. 중학교 수학 1

절댓값은 중학교 1학년 교과과정에서 처음 도입된다. 총 28종의 교과서 중에 비슷한 유형대로 분류하고 그 중 대표되는 5종의 교과서를 분석한 결과 절댓값은 수와 연산 영역에 정수와 유리수 단원에서 소단원 정수의 대소 관계의 도입부분에 제시되어있었다.

일반적으로 절댓값의 정의는 '수직선 위에서 어떤 수 a를 나타내는 점과 원점 사이의 거리'(정상권외, 2009), '수직선 위에서 정수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리.'(강신덕외, 2009), '수직선 위에서 어떤 수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리'(이영하외, 2009; 정광식외, 2009; 김부윤외, 2009) 등으로 제시되어 있다. 공통적으로 절댓값을 어떤 수와 원점까지 이르는 거리로 수직선을 사용해서 기하학적 의미로 정의하고 있다.

5종의 교과서에서는 절댓값을 정의한 후에 정수의 대소 관계를 설명하기 위해서 먼저 정수를 수직선 위에 나타내어 오른쪽으로 갈수록 수가 커진다는 것을 보인 후 대소 관계를 형식화하기 위해 절댓값을 사용하여 '두 양의 정수는 그 절댓값이 큰 수가 크다.', '두 음의 정수는 그 절댓값이 큰 수가 작다.'(강신덕외, 2009) 와 같이 정리하고 있다. 또한 수직선 위에서 정수의 덧셈을 보인 후 이것을 정리할 때 '절댓값'을 사용하여 '부호가 같은 두 정수의 합은 각 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙인다. 부호가 다른 두 정수의 합은 각 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인다.'와 같이 나타내면서 뺄셈과 곱셈 나눗셈에 대하여도 같은 방법으로 '절댓값'의 용어를 사용하여 형식화하고 있다. 유리수에서도 위와 같은 방법으로 유리수의 대소 관계와 사칙연산을 나타내고 있음을 확인할 수 있다.

위에서 살펴본 것처럼 절댓값은 정수와 유리수 단원에서 수직선 위에서 어떤 점과 원점사이의 거리라는 기하학적 의미로 도입되었으나 정수와 유리수의 대소 관계와 사칙 계산 방법을 형식화하여 정리하는데 절댓값이 도구로 사용되면서 절댓값은 '거리'라는 기하학적 의미보다는 대수적 계산을 위한 도구로 강조되고 있다.

나. 고등학교 수학

1) 실수와 복소수단원에서 절댓값

총 17종의 고등학교 수학1 교과서 중에서 비슷한 유형대로 분류하고 그 중 대표되는 7종의 교과서를 분석한 결과 실수와 복소수 단원에서 절댓값의 정의는 중학교 수학에서 제시된 것과 마찬가지로 '수직선 위에서 원점

으로부터 실수 a를 나타내는 점까지의 거리' 와 같이 제시되어 있거나 실수 a의 범위를 나누어 '실수 a에 대하여 $|a|=\begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ 일 때}), \\ -a & (a < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$' 와 같이 제시하였다. 실수와 복소수 단원에서는 절댓값의 정의를 제시하면서 절댓값의 성질을 함께 나타내고 있다. 여기서 절댓값은 절댓값을 포함한 문자식을 해결하기 위해 도입된 것으로 절댓값 성질을 이용하여 절댓값 기호 안의 문자의 범위에 따라 값이 달라지는 것을 대수적으로 설명하고 있다. 이는 절댓값의 정의로써 수직선 위에서 한 점으로부터 원점까지의 거리라는 기하학적 의미보다는 절댓값의 성질로써 문제 해결을 위한 대수적 풀이과정으로 절댓값을 사용하고 있다.

2) 부등식 단원에서 절댓값

부등식 단원에서 절댓값 기호가 포함된 일차부등식의 풀이를 설명하기 위해서 절댓값이 다음과 같이 나타나 있다. 실수 x에 대하여 $|x|$는 수직선 위의 원점으로부터 x에 대응하는 점까지의 거리로 나타내고 있고 이 정의를 이용하여 양수 1을 예로 들어 $|x|<1$과 $|x|>1$을 만족시키는 x의 범위를 수직선을 이용하여 거리로 설명하고 있다. 장난영(2006)에 따르면 절댓값이 있는 일차부등식의 해를 구하는 방법은 수직선 위에서 직관적으로 설명하고 있지만 일반적인 일차부등식의 풀이 방법은 절댓값의 정의를 써서 식을 변형하여 해결하도록 설명하고 있다. 절댓값 기호가 있는 식의 대수적인 조작을 하기 위해 절댓값 기호가 없는 식으로 변형하는 데 수직선을 이용한 직관적인 설명보다는 형식적인 정의를 이용하여 변수의 범위에 따라 식을 변형하고 각각의 범위에 맞는 해를 구하는 일반적인 풀이방법을 제시하고 있다.

3) 도형의 방정식 단원에서 절댓값

도형의 방정식 단원에서 절댓값은 평면좌표에서 수직선 위에서와 좌표평면의 경우를 나누어 두 점 사이의 거리를 나타내는데 사용되고 있다.

첫째로, 수직선 위에서 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$가 있을 때, $x_1<x_2$와 $x_2<x_1$의 경우로 나누어 큰 수에서 작은 수의 차가 두 점사이의 거리임을 나타내고 있다. 이것은 수직선 위에서 두 점 사이의 거리는 두 수의 차가 항상 양수가 되어야한다는 의미로 절댓값 기호를 사용하여 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$로 나타내고 있다.

둘째로, 좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 선분AB을 빗변으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스의 정리를 이용하여 구한다. 밑변의 길이는 $|x_2-x_1|$, 높이는 $|y_2-y_1|$ 나타내며 빗변의 길이, 즉 두 점 사이의 거리는 피타고라스의 정리의 의하여 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 으로 나타낸다. 여기에서 직각삼각형의 밑변의 길이와 높이의 길이를 나타내기 위해서 절댓값 기호를 사용한다. 하지만 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리를 절댓값 기호인 $|\ |$ 대신 피타고라스 정리를 사용하여 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 로 나타낸 것은 서희진(2009)에 따르면 절댓값이 '거리'의 의미를 가진다는 것을 상기시키지 못한 채 절댓값의 대수적 조작에 치중될 소지가 있다.

이상에서 절댓값에 대한 정의는 중학교 수학 1학년 과정에서 수직선위에서 어떤 점과 원점사이의 거리라는 기학학적 의미로 도입되었으나, 절댓값은 정수와 유리수의 대소 관계와 사칙계산을 형식화하는데 사용되어지면서 기학적 의미보다 대수적 조작의 의미가 강조되었다. 고등학교 수학 1학년 과정에서 실수와 복소수 단원에서 절댓값은 중학교 과정에서 사용한 정의와 함께 절댓값 성질을 제시하고 있으며 절댓값성질을 이용하여 절댓값 기호가 있는 문자식을 절댓값 기호가 없는 문자식과 동치로 만드는 절차에 대수적인 조작의 수단으로 나타내고 있다. 도형의 방정식단원에서 기학학적 의미로 수직선 위에서와 좌표평면위에서 절댓값을 두 점사이의 거리로 설명하고 있다.

4) 절댓값 기호가 있는 식의 그래프

절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프를 그리는 설명은 위에서 언급한 7종의 고등학교 수학1 교과서와 총 4종의 고등학교 수학 익힘책 중에서 단 2종의 수학 익힘책의 심화부분에서 확인할 수 있다(계승혁 외, 2009; 양승갑, 2009). 절댓값 기호를 포함한 일차나 혹은 이차함수의 $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$의 꼴의 그래프를 대칭성을 이용하여 그리는 방법을 설명하고 구체적인 예나 자세한 설명 없이 형식화된 절차적인 방법만이 제시되어있어 그

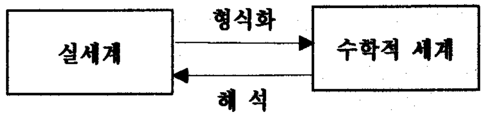
의미와 그래프에 대한 이해는 충분하지 않다. 대부분의 교과서와 수학 익힘책에서 그래프를 그리는 설명을 찾아보기 힘들었지만 절댓값 기호가 있는 식의 그래프는 함수 단원에서 전형적인 예로 많이 이용되고 있음을 확인할 수 있다.

2. 수학적 모델링

Blum 외(2002) ICMI 의 연구 보고서에 따르면 수학적 모델을 현실 모델에서 그 속에 포함된 대상, 데이터, 관계와 조건들을 수학으로 번역한 것의 결과로 설명하고 있다. 여기서 현실 모델이란 앞에서 설명한 현실세계 문제를 단순화하고 구조화하여 체계적으로 정리한 것이며, 현실 모델은 수학적인 구조를 갖기 전단계로 현실 문제 속에 포함된 것이라 할 수 있다. Burghes(1980)는 현실 문제에서 변수와 변수들 간의 법칙을 가정한 것을 수학적 형식으로 바꾼 결과를 수학적 모델이라고 하였다. 이러한 수학적 모델을 얻기 위한 조건으로 권기석·박배훈(1997)은 다음 두 가지를 제시하고 있다. 하나는 수학적 모델은 현실적으로 실세계 상황을 나타낼 만큼 충분히 상세해야하는 것이고, 또 다른 하나는 수학적 분석이 가능하도록 충분히 간단해야 하는 것이다. 이것은 모순된 조건이지만, 만약 모델이 너무 간단하다면, 그 결과는 현실성이 떨어질 수도 있고, 반대로 모델이 너무 상세하여 물리적인 상황을 완전히 나타낸다면, 수학적인 분석을 행하기가 어려울 것이므로 두 가지 조건이 잘 조화를 이루어야 함을 강조하고 있다.

대부분의 수학적 모델링을 연구한 보고서에는 수학적 모델링을 과정으로써 설명하고 있다. Swetz(1989)는 수학적 모델링을 수학적 모델을 개발하는 과정 활동으로 설명한다. Blum 외(2002) 역시 ICMI의 연구 보고서에서 수학적 모델링이란 문제 상황에서 수학적 모델에 이르기까지의 전 과정으로 나타낸다.

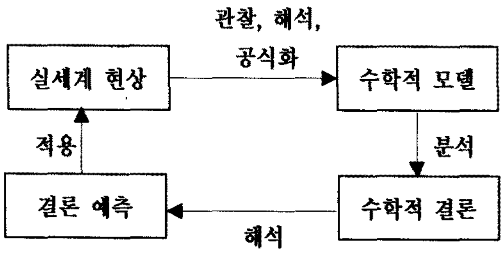
Burghes(1980)는 아래의 <그림Ⅱ-1>로 수학적 모델링을 나타내었다. 해결해야할 실세계문제에서 수학적 개념을 발견하여 변수를 도입하고 변수들 사이의 관계를 수학적 형식으로 바꾸어야 한다. 이것이 수학적 모델이고 복잡한 현실세계의 문제를 수학적 문제로 번역하는 단계이다. 오른쪽 부분은 수학적 세계로써 수학적 도구를 사용하여 현실세계 문제에서 수학적 모델로 번역된 문제를 푼다. 그리고 그 결과를 원래의 현실 상황 속에서 다시 해석한다. 만약 모델이 목적에 알맞지 않다면 모델을 수정하거나 위의 순환과정을 다시 반복할 수 있다. 이때에 얻어지는 모델은 좀 더 정교화 될 것이다. 이와 같이 Burghes는 실세계상황에서 수학적 모델을 만들고 그것의 수학적 답을 구한 후, 그 답을 다시 원래 상황 속에서 해석하는 과정을 수학적 모델링이라고 보고 있다.



<그림Ⅱ-1> Burghes의 수학적 모델링 과정

Swetz(1991)는 위 Burghes의 수학적 모델링 과정보다 정교한 모델링 과정을 제시하고 있다. 첫째단계는 문제를 확인하고 문제 속에 포함된 조건과 제약점을 확인하고 둘째단계는 문제를 수학적으로 해석하는 단계, 셋째단계는 문제의 해답을 얻기 위해서 수학적 도구와 이론을 사용하는 단계, 넷째단계는 문제의 원래 상황 속에서 해답을 실험하고 해석하고 마지막 다섯째단계는 좀 더 나은 해답을 얻기 위해서 필요할 경우 해답기술을 다듬는 단계이다. 이 다섯 단계를 거침으로써 수학적 모델링은 실세계상황에 알맞도록 수학적 이론을 추측, 변경, 적용을 하게 된다.

NCTM(1991)의 연구 보고서에도 위와 비슷한 과정으로 주요한 4가지 단계로 구성된 수학적 모델링을 소개하고 있다. 첫째, 현상을 관찰하고, 현상에 나타난 문제 상황의 묘사한다. 그리고 문제에 영향을 주는 중요한 요소들을 인식한다. 둘째, 요소들 사이의 관계를 추측하고 그 현상에 대한 모델을 얻기 위해 요소들을 수학적으로 해석한다. 셋째, 적절한 수학적 분석을 모델에 적용한다. 넷째, 수학적 결과를 얻는다. 그리고 얻어진 결론을 현상의 문맥 안에서 재해석한다. 필요한 경우 마지막 단계로 모델이 원래 상황에서 의미가 있는 것인지 실험하고 세련되게 정제하는 과정을 추가할 수 있다. 이것의 과정을 그림으로 나타내면 아래와 같다.

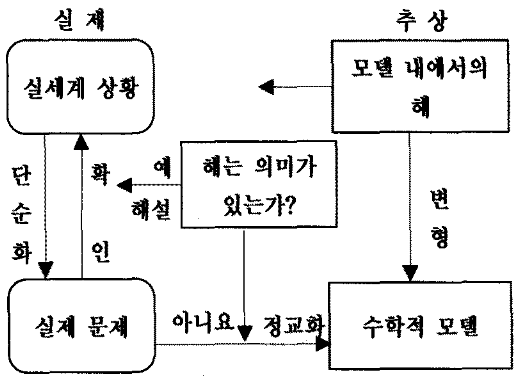


<그림 II-2> NCTM의 모델링 과정

이후 2002년 ICMI의 연구보고서에는 Blum 외(2002)의 수학적 모델링 과정을 다시 다섯 단계로 세분화하고 있다. 첫째. 실세계 상황을 관찰자의 지식과 흥미에 따라서 단순화, 구조화, 명료화한다. 그리고 이것의 결과를 현실모델이라 한다. 현실모델은 문제를 체계적으로 정리할 수 있게 한다. 둘째, 현실모델을 만든 후 이것의 대상, 데이터, 관계와 조건들을 수학으로 번역한다. 이것을 수학적 모델이라 한다. 셋째, 수학적 도구를 이용하여 수학적 결론을 도출한다. 넷째, 도출된 결론은 원래 상항에서 재해석한다. 그리고 결론이 관찰자의 목적에 적합하고 의미가 있는 것인지 해석하여 모델의 정당성을 입증한다. 다섯째, 필요할 경우 모델을 수정하거나 변경하여 과정을 다시 반복할 수 있다.

한편, 모델을 해석한 결과가 실세계 상황을 충분히 설명하지 못할 때는 이를 보다 잘 설명할 수 있는 섬세한 모델이 필요하다. 손홍찬·류희찬(2007), 강옥기(2010)는 이 과정을 정교화 과정이라고 하였다. 수학적 모델링의 정교화란 수학적 모델을 구한 다음 변인의 수를 점차적으로 늘리면서 더욱 정교한 해를 구할 수 있도록 변형하는 것과, 어떤 상황에서 얻은 자료들의 분포 경향을 나타내는 수학적 모델을 더욱 정밀한 해를 구할 수 있는 수학적 모델로 변형하는 것이라고 말한다. 정교화 과정을 반영한 모델링의 과정은 강옥기(2010)는 다음 <그림 II-3>같이 나타내고 있다.

그림과 같이 네 번째 단계에서 수학적 모델에서 얻어진 해가 실제 문제에 의미가 있는지 조사해 보고 의미가 만족할 정도가 아니면 수학적 모델 단계로 돌아가서 가정을 수정하거나 같은 가정 하에서 정교화 된 새로운 수학적 모델을 구성하게 된다. 그리고 강옥기(2010)의 모델링의 정교화 과정을 반영할 경우 실제로 변수의 조정뿐만 아니라 동일한 가정하에서도 여러 유형의 수학적 모델을 생각할 수 있게 된다.



<그림 II-3> 강옥기의 수학적 모델링 과정

한편, 김민경·홍지연·김은경(2009)은 초등 수학 수업에서의 수학적 모델링 과정을 제시하면서 그 목적을 현실상황의 문제에 포함된 수학적 개념이나 원리, 법칙을 모델을 통하여 발견하고 이를 다시 다른 문제 상황에 적용함으로써 하나의 문제를 해결할 수 있다고 주장하였다. 구체적인 교수학습 활동 내용으로 준비활동, 모델유도활동, 모델탐색활동, 모델적용활동을 통한 모델링과정을 보여주고 있다(홍지연, 2007).

본 연구는 위와 같은 이론적 배경을 고찰한 결과 ICMI의 연구보고서에서 Blum 외(2002)의 수학적 모델링과정 속에 강옥기(2010)의 정교화 과정을 추가하여 다음과 같은 5단계의 수학적 모델링 과정을 고안할 수 있었다.

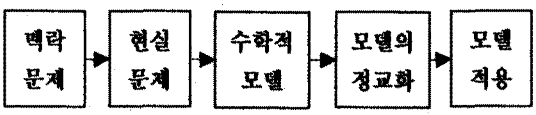
첫째, 맥락 문제(문제 이해하기)단계는 준비활동을 하는 단계로서 맥락문제가 제시되고 학생들로 하여금 문제 상황에 직면하도록 하는 단계이다. 문제를 확인하고 이해할 수 있도록 주어진 조건들과 구해야할 것을 구별하며 필요하다면 문제의 답이 무엇이 될지 가정해볼 수 있다.

둘째, 현실모델(문제해결전략 모색)단계로 전 단계에서 예상한 답이 맞는지 확인하기 위해서 맥락문제를 단순화하고 구조화하여 체계적으로 정리한다. 이 단계는 문제를 간결한 형태로 표현함으로써 자신들이 해결해야 할 문제 상황에 적절한 모델을 유도하고 개발하는 단계이다. 이 단계에서는 아직 문제가 실세계 상황에 있는 것으로 일상용어와 비수학적 형식으로 표현된다.

셋째, 수학적 모델(집이 홀수 채 일 때 문제해결)단계로 현실 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 이전 단계에서 만든 현실모델의 요소들 간의 관계를 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 수학적 모델은, 표, 방정식, 부등식, 그래프 등 다양한 방법으로 표현될 수 있다. 구해진 수학적 모델에서 수학적 해를 도출한다.

넷째, 모델의 정교화(집이 짝수 채 일 때 문제해결)단계에서 이전 단계에서 얻은 수학적 해가 문제 상황에서 유의미한지 확인하고, 필요할 경우 모델을 변경하거나 수정하여 이전 단계들을 반복한다. 또는 얻어진 해가 문제 상황에 유의미하더라도 더 섬세하고 정교한 수학적 모델을 얻기 위해, 수학적 모델을 수정하여 이전 단계들을 반복한다. 모델의 정교화 과정을 거치면 한 가지 문제 상황 속에서 여러 유형의 수학적 모델을 개발할 수 있고, 일반화된 수학적 모델도 얻을 수 있다.

마지막, 모델 적용(일반화시키기, 다른 문제에 적용)단계는 얻어진 결론을 일반화된 법칙이나 규칙으로 설명할 수 있으며, 맥락상황 속에서 재해석하는 단계이다. 또한 이 단계에서는 얻어진 결론을 다른 맥락상황에서 적용해 볼 수 있다. 이 단계들을 <그림 II-4>처럼 나타내면 다음과 같다.



<그림 II-4> 본 연구의 수학적 모델링 과정

3. 선행 연구 고찰

절댓값 기호가 있는 함수에 관한 선행연구는 국내외로 별로 많지 않다. 문제해결과정에서 나타나는 학생들의 오류를 분석하고 그 결과로 드러난 문제점을 지적하는 몇 개의 연구가 있을 뿐이다. 장난영(2006)은 절댓값이 가지고 있는 '거리'라는 기하학적인 의미가 결여된 채 교육과정과 교과서에 명시된 형식적인 정의로써 대수적인 관점인 '양수화' 의미만을 이해하고 있다고 하면서 절댓값의 기하학적 '거리' 의미를 좀 더 부각해야 할 필요성을 제시하였다. 또한 절댓값이 있는 함수의 그래프의 진정한 의미와 그래프를 그리는 방법의 형식적 접근 등의 문제점을 지적하고 절댓값의 의미가 담긴 구체적인 생활 문제의 도입의 필요성을 주장하고 있다(서희진, 2009), 장효정(2010)).

한편 1990년대 수학적 모델링에 관한 초기 연구는 전통적인 강의식 수업과 수학적 모델링을 활용한 수업사이의 유의미한 차이를 조사하여 교육과정 속에 수학적 모델링 수업의 도입을 강조하는 데에 집중되어 있다. 2000년대에 들어서면서 수학적 모델링에 관한 폭넓은 자료개발이 이루어졌고 헬리콥터, 화물수송, 버스정류소 위치선정, 달력 만들기에 대한 한정된 문제들로 양적연구를 하였다면, 이후는 수학의 내용별로 모델링을 적용하게 되었다. 대수와 함수, 이산수학, 확률과 통계 등에서 모델링 연구가 이어졌는데 학습 자료개발이 주를 이루었다(백은정(2000), 최항철(2000), 조원주(2002), 이희정(2004), 황혜정(2007)).

또한 수학적 모델링은 문제해결과도 관련되어 연구되었다. 수학적 모델링을 이용한 수업이 문제해결력에 미치는 영향과 수학적 모델링과 협동학습을 통한 문제해결력 연구 방안을 교수-학습지도안으로 제시하며 바람직한 학습 지도 방향을 모색하였고, 도구조작을 통하여 문제해결력을 높일 수 있는 가능성을 연구하였다(신은주·권오남(2001), 이희정(2004), 신은주·이종희(2004), 김선희·김기연(2004), 김선희(2005)). 최근 들어 엑셀과 스프레드시트 등 공학을 이용한 모델링 자료개발이 활발해졌으며 특히 공학 자료가 수학적 모델링의 정교화 과정에 어떻게 긍정적인 영향을 줄 수 있는가에 대한 연구가 진행되었다(황혜정(2007), 손홍찬·류희찬(2007)). 이러한 모델링의 정교화 과정은 강옥기(2010) 연구에서도 나타나는데 이론적으로 정교화 과정이 필요함을 역설하고 이를 활용한 수학적 모델링을 구체적으로 제시함으로써 수학적 모델링의 정교화를 보다 쉽게 접근할 수 있게 하였다(강옥기, 2010).

이전의 연구들이 대부분 수학적 모델링 자료 개발과 그를 적용한 양적연구의 형태를 취한 반면 모델링 수업을 실연하여 질적 연구를 통한 학생의 개념형성과정을 분석한 자료의 수는 부족하다.

이에 본 연구는 NCTM(1991, 29쪽)에서 개발한 수학적 모델링 자료를 학생들의 현실에 맞게 수정하여 학생에게 적용하고 수학적 개념의 형성과정과 발달과정을 살

펴보는 정성적 연구를 계획하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 수원시에 위치한 한 인문계 고등학교 1학년 학생 2명을 대상으로 2010년 7월 셋째 주부터 2010년 7월 넷째 주까지 2차시에 걸쳐 시행하였으며 첫 번째 차시에서는 1시간 30분, 두 번째 차시에서는 1시간이 소요되었다. 두 명의 학생은 자발적 참여자로 학생과 학부모로부터 사전에 실험 동의를 구두로 받았다. 본 연구는 수학적 모델링 활동을 통해 단계적으로 개념이 형성되는 과정을 알아보는 것이므로 특별히 학생들의 사전 학업성취도에 제한을 두지 않았으나 두 명의 교내 수학성적은 전체 9등급 중 5등급으로 중하위권에 속한다.

본 연구는 수학적 모델링 활동으로써 맥락문제에서 비 구조화된 현실모델을 수학적 모델로 발달시키면서 새로운 수학적 개념과 원리를 점진적으로 학습하게 하는데 그 목적이 있다. 학생들은 수학적 모델링 활동을 통해서 거리의 개념과 절댓값 기호의 사용을 이해하고 절댓값 기호가 포함된 함수의 식을 세우고 그래프로 나타낼 수 있게 된다. 일반적으로 활동지에서 학습하게 되는 내용을 연구 대상이 배우지 않은 상태여야 하지만 연구대상자들이 갖고 있는 거리 개념을 간단히 확인해 본 결과 그들은 그저 형식적인 개념으로 이해하고 있으므로 거리의 개념을 새롭게 인식할 필요성이 있었다. 이에 거리의 개념과 절댓값 기호가 포함된 함수의 과정이 제 7차 개정 교육과정에서는 고등학교 1학년 2학기 과정에 처음 도입 되므로 본 연구의 성격상 고등학교 1학년 1학기를 마친 학생들을 대상으로 하였다.

두 명의 학생을 2차시 동안 관찰한 결과 학생 A는 문제풀이에 적극적이고 자신의 생각을 주저 없이 표현하고 대화에 적극적인 반면, 학생 B는 학생 A의 의견을 반영하여 생각을 한 후에 자신의 의견을 말하였다. 그리고 자신이 만든 모델을 학생 A와 비교하는 성향을 보였다.

2. 연구방법 및 절차

본 연구는 '절댓값 기호가 있는 일차식과 그래프'에 대한 개념 형성을 위하여 수학적 모델링 활동을 통하여 실세계 문제에서 수학적 모델과 정교화 모델로 개발되는 각 단계를 살펴보는 정성연구이다.

모델링활동에서 본 연구자는 문제를 선택하고 제시하고 학생들을 안내하고 고무하고 질문함으로써 상호작용을 하고 토론에 기여하여, 학생들의 정신 과정을 돕고 반응에 대한 응답을 주는 역할을 하면서도 심층 있는 연구를 위해 능동적인 참여를 했고, 주관적 감정과 동기가 연구 성과에 중요한 영향을 미치게 되는 것을 최소화하려고 노력했다.

또한 두 학생의 사고 과정에 대한 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리 내어 사고하기 과정을 사용하여 연구대상자의 관점을 추적하고 이해하였다.

본 연구는 2010년 4월부터 2010년 6월까지 NCTM (1991, 29쪽)의 과제를 선정하여 문제를 재구성, 2010년 7월 첫째 주와 둘째 주까지 연구 대상 선정, 2010년 7월 셋째 주부터 7월 넷째 주까지 2차시에 걸친 수업, 2010 7월 넷째 주에는 학생 면담의 순으로 진행되었다.

본 연구자는 첫 번째 차시부터 두 번째 차시까지 모델링 활동을 오디오에 녹음하였고, 녹음한 녹취록과 학생들의 활동지, 연구자의 관찰일지, 매 차시마다의 학생일지와 반 구조화된 면담 내용을 토대로 자료를 수집하고 분석하였다.

3. 연구 설계

본 연구는 고등학교 1학년 함수 단원에 알맞은 수학적 모델링 지도를 위한 자료를 개발하기 위하여 다음과 같은 절차로 이루어졌다.

가. 예비연구

2010년 3월부터 8월까지 진행된 예비 연구 단계에서는 수학적 모델링에 관한 문헌과 선행연구를 고찰하면서 연구관점이 설정되었으며, NCTM(1991, 29쪽)의 자료를 토대로 제 7차 개정 교과과정의 함수단원에서 절댓값 기호를 포함한 함수에 대한 교과서 분석하고 절댓값에 관한 선행연구를 고찰함으로써 수학적 모델링 학습에 대한 연구내용을 설계하였다. 학습자의 개념발달을 목표로 모델링 과정을 사고실험하면서 1차로 만들어진 자료는 수

학전공 동료와 전문가에게 검증과정을 거쳐 타당도를 높였다. 또한 동료에게 실제와 같은 상황을 연출하여 실험을 실시한 결과 내용은 그대로 시간은 약간 늘려 본 연구에 임하였다.

나. 본연구

1) 수학적 모델링을 활용한 수업 설계

선택한 문맥문제에 본 연구에서 고안한 5단계의 수학적 모델링을 적용하여 <표 Ⅲ-1> 같이 수업 설계를 하였다.

첫째, 맥락 문제(문제 이해하기)단계에서 실생활문제로 버스정류장의 위치 선정에 관한 문제 상황을 제시한다. 실생활문제 속에는 절댓값의 대한 직접적인 제시는 되어있지 않다. 7명의 학생들이 사는 각각의 집이 있을 때 버스정류장 위치는 어디로 선정하는지 묻는 맥락 문제이다. 학생들은 이 단계에서 문제를 처음 직면한다. 연구자는 학생들에게 문제를 읽도록 한 후 문제 속에서 주어진 조건과 구해야 하는 것이 무엇인지 묻는다. 학생들은 이 과정에서 버스정류장의 위치를 선정하기 위해서 각각의 집에서부터 버스정류장까지 걷는 거리의 합이 최소가 되는 지점을 찾아야 함을 인식한다. 그런 다음 문제해결전략을 세우기 전, 정답을 가정해보고 문제 상황 속의 그림에 표시해보는 활동을 한다. 이 활동은 문제에

<표 Ⅲ-1> 수학적 모델링을 활용한 수업 설계

<모델링 과정>	<교수·학습 활동 내용>	<수학적 도출>
맥락 문제 (문제 이해하기)	1) 과제이해 -문제에 주어진 정보 확인 -구해야 할 것 확인 2) 문제의 해답 가정	
현실모델 (문제해결전략 모색)	1) 현실모델유도 -필요한 조건 추출 -문제의 그림 단순화 2) 현실모델 형성 -그림에서 버스정류장이 될 수 있는 서로 다른 지점 비교	▸더하기, 나누기. ▸두 점 사이의 거리 ▸거리들의 합
수학적 모델 (집이 홀수 채 일 때 문제해결)	1) 집을 1채, 3채, 5채, 7채로 나누어 풀이 2) 표를 사용한 수학적 모델 형성 3) 그래프를 사용한 수학적 모델 형성 4) 관계식 사용한 수학적 모델 형성 -절댓값의 기하학적 개념 이해	▸수직선의 필요성인식 ▸수직선위의 원점 ▸표 ▸수직선위에서 두 점 사이의 거리 ▸거리들의 합 ▸그래프 ▸변수사용(x, y) ▸물결선 ▸절댓값 기호 ▸절댓값 기호가 있는 식
모델의 정교화 (집이 짝수 채 일 때 문제해결)	집이 6채일 때 문제 상황으로 이전 단계 활동 반복하여 모델을 정교화	
모델 적용 (일반화시키기, 다른 문제에 적용)	1) 집이 홀수 채 일 때 버스정류 장의 위치 알기 2) 집이 짝수 채 일 때 버스정류 장의 위치 알기	▸절댓값 기호가 있는 식의 일반화

대한 지적탐구심과 흥미를 유발시키기 위함이며 이 후에 정답을 확인하는 과정에서 자신이 가정한 답의 오류를 발견하며 문제를 정확히 이해할 수 있다.

둘째, 현실모델(문제해결전략 모색)단계에서 학생들이 이전단계에서 가정한 답이 정답이 될 수 있는지 확인해 보는 활동을 한다. 학생들은 가정한 답이 정답이 되는지 확인하기 위해 문제 상황 속에 주어진 조건을 더욱 간결하게 하여 문제해결전략을 세운다. 또한 맥락 문제 속에 제시된 그림도 수직선과 비슷한 형태의 그림으로 나타낼 수 있다. 학생들은 버스정류장의 위치를 선정하기 위해 이전 단계에서 가정한 버스정류장의 위치로부터 각각의 집까지의 거리의 합을 구해본다. 또한 구한 거리의 합이 최소가 되는 지를 생각해본다. 학생들은 각각의 집에서부터 버스정류장까지의 거리의 합이 최소가 되는 위치를 구하기 위해 이전 단계에서 가정한 답 이외에 다른 지점을 가정하여 거리의 합을 구해본다. 이 단계에서는 아직 문제가 실세계 상황에 있는 것으로 일상용어와 비수학적 형식으로 표현된다.

셋째, 수학적 모델(집이 홀수 채 일 때 문제해결)단계는 현실 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 현실문제에서의 그림은 수직선과 숫자로 대체된다. 집이 1채, 3채, 5채, 7채로 늘어날 때마다 표를 이용하여 합이 최소가 되는 지점을 확인하고 집이 늘어날 때마다 규칙을 발견할 수 있도록 한다. 학생들은 자신들이 알아낸 버스정류장의 위치가 정확한지 의문을 갖도록 한다. 학생들은 좀 더 정확한 답을 얻기 위해, 표 이외의 수학적 모델을 개발할 필요성을 느끼도록 유도한다. 방안지를 이용하여 완성한 표를 보고 그래프를 그린다. 이 때, 그래프의 x축과 y축이 나타내는 것이 수직선위에 버스정류장의 위치가 될 수 있는 지점과 총 이동의 합임을 알 수 있도록 한다. 완성한 그래프를 이용하여 집이 1채일 때 그 1채의 집이, 집이 3채일 때 가운데 위치한 두 번째 집이, 집이 5채일 때 가운데 위치한 세 번째 집이, 집이 7채일 때 가운데 위치한 네 번째 집이 버스정류장의 위치가 됨을 확인한다.

마지막으로 연구자는 학생들이 완성한 그래프에 관계식을 세우도록 유도한다. 이때 학생들이 버스정류장의 위치를 x로 나타낼 때, x부터 각각의 집까지의 거리는 양수가 되어야하므로 절댓값 기호를 사용해야 하는 것을 인식할 수 있다.

넷째, 모델의 정교화(집이 짝수 채 일 때 문제해결)단계에서는 이전단계의 홀수 채일 때 모델과 비교하여 집이 짝수 채 일 때 수학적 모델을 개발하여 문제 상황에 유의미한 해를 얻는 과정이다. 연구자는 학생들이 사는 집이 6채일 때 문제 상황을 학생들에게 제시하여, 위와 동일한 과정을 반복하도록 한다. 학생들은 집이 2채, 4채, 6채 일 때, 표, 그래프, 관계식을 완성하여 수학적 해를 도출한다.

마지막, 모델 적용(일반화시키기, 다른 문제에 적용)단계는 얻어진 결론을 맥락 속에서 재해석하는 단계로 학생들이 사는 집이 6채와 7채 일 때 뿐 만 아니라 집이 짝수 채, 홀수 채 일 때를 일반화하여 짝수 채일 경우는 가운데 두 집과 그 사이 지점과 홀수 채일 때는 가운데 집이 버스정류장이 될 수 있음을 말할 수 있다.

이러한 수학적 모델링 과정은 순환적 과정이며 이 과정을 거치면 학생들은 실세계상황에서 수학적 개념이나 원리, 법칙을 모델을 통하여 스스로 발견할 수 있다. 또한 정교화 과정을 거치게 되면 한 가지 수학적 개념이나 원리, 법칙뿐만 아니라 다른 개념, 원리, 법칙을 발견할 수 있게 되고 서로간의 관계를 연결시켜 이해할 수 있다.

2) 수학적 모델링의 수업 적용

위의 설계에 따른 수학적 모델링 수업을 2차시로 나누어 <맥락 문제>-<현실모델>-<수학적 모델>-<모델의 정교화>-<모델 적용>의 과정에 따라 두 명의 대상에게 적용하였다.

권기석·박배훈(1997)에 따르면 수학적 모델을 얻기 위한 두 가지 조건으로 하나는 현실적으로 실세계 상황을 나타낼 만큼 충분히 상세해야하고 또 다른 하나는 수학적 분석이 가능하도록 충분히 간단해야 한다고 말한다. 이것은 모순적이지만 두 조건이 잘 조화를 이루어야 함을 강조하고 있다. 황혜정(2007) 역시 수학적 모델링에 사용하는 수학적 모델은 기본적인 수학적 지식을 보유하는 것만으로는 충분하지 않으며 판단력과 논리적 접근 방법으로 긍정적이고 적극적인 학습이 가능하도록 교육과정에 제시된 수학내용 뿐만 아니라 그 이외 또는 그 이상의 것을 수반해야함을 지적하고 있다.

이에 본 연구는 위와 같은 조건을 만족하는 수학적

모델로 NCTM 자료를 선정하여 학생들의 상황에 맞는 실제문맥으로 수정하였고, 절댓값 기호가 있는 일차식에 대한 효과적인 개념발생을 위해 단계별 수학적 모델링으로 재구성 하여 실제 수업에 사용하였다.

첫 번째 차시는 함수 속에 절댓값의 기호가 홀수개가, 두 번째 차시는 함수 속에 절댓값의 기호가 짝수개가 있는 내용과 관련된 맥락이다. 2차시 모두 수학적 모델링의 5단계로 구분하여 수업을 진행하였고 두 번째 차시는 첫 번째 차시에서 개발한 수학적 모델을 정교화하기 위한 단계에 속한다.

가) 수학적 모델링 과제 1 (1차시)

총 이동거리의 합이 최소가 되는 정류장의 위치는?

동백마을에는 같은 고등학교에 다니는 7명의 친구가 산다. 매일 버스를 타고 등·하교를 하는 학생들을 위하여 학교버스가 운행될 예정이다. 7명의 학생들이 각자 집에서부터 정류장까지 걷는 거리의 합이 최소가 되는 지점에 학교버스정류장을 세우기로 한다면 학교버스정류장의 위치는 어디가 되겠는가?

각 학생의 집의 위치는 아래 그림과 같다.

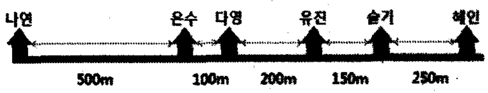
이 과제는 간단한 거리를 구하는 계산에서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프로 점진적으로 학습하기 위해서 개발된 과제이다. 이 과정 속에서 자연스럽게 표를 이용하는 수학적 모델을 개발하게 된다. 그리고 개발한 수학적 모델을 좀 더 정확하게 하기 위해 그래프를 그리고 이것의 관계식을 세우도록 유도한다. 이때 관계식을 세우는 과정에서 절댓값 기호를 사용하게 되고 거리에 대한 절댓값 기호의 사용의 정확한 개념을 알게 된다. 또한 학생들이 세운 관계식과 그래프를 비교하면서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프의 모양을 알 수 있다. 또한 집이 홀수 개일 때의 버스정류장의 위치를 정확하게 찾을 수 있고, 이때의 그래프의 모양과 식을 일반화할 수 있다.

나) 수학적 모델링 과제 2 (2차시)

집이 짝수 채 일 때 정류장의 위치는?

여섯 채의 집이 아래와 같이 존재할 때 학교버스 정류장은 어느 지점이 되겠는가?

모든 조건은 위 과제1과 같다.



이 과제는 1차시의 홀수 채와 비교되는 짝수 채인 맥락으로 정교화 과정을 염두에 둔 문제이다. 이 경우 학생들은 1차시의 경험으로 현실모델과 수학적 모델을 쉽게 개발할 수 있다. 표를 이용하고 그래프를 그리고 관계식을 세움으로써 짝수 채인 경우의 절댓값 기호가 있는 식과 그래프의 개념을 점진적으로 학습하게 된다. 집이 홀수 채 일 때와의 차이를 인지하고 두 경우를 비교하면서 일반화시킬 수 있다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

이 장에서는 질적 연구에서 보여준 학생들의 모델링 활동을 맥락문제 단계, 현실모델 단계, 수학적 모델 단계, 정교화 모델 단계, 모델 적용 단계로 구분하여 각 단계에서 나타나는 학생들의 개념 형성 과정을 수집한 자료에 기초하여 분석하였다. 각 차시마다 모델링의 5단계로 수업이 설계되고 진행되었지만 2차시의 경우 앞부분은 집이 홀수 채인 경우와 짝수 채인 것만 차이가 있기 때문에 1차시와 접근 방법이 비슷하여 맥락문제 단계, 현실모델 단계, 수학적 모델 단계는 1차시의 내용을 중심으로 분석하였으며 정교화 모델 단계는 2차시의 내용 중 수학적 모델 단계를 분석하였으며, 모델 적용 단계는 1차시와 2차시의 내용을 종합하여 마무리하였다. 학생들이 학습한 내용을 수학적 모델링의 각 단계로 구분하는 비선형적인 방법으로 사례 연구를 분석하였다.

가. 맥락 문제 단계(문제이해 및 결과 예상하기)

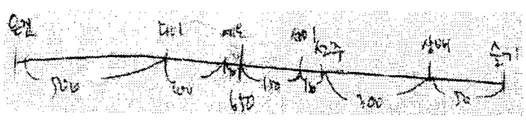
이 단계에서는 학생들에게 버스정류장과 관련된 실생활문제가 제시되고 문제 속에서 주어진 조건과 구해야 하는 것을 파악해서 그 해답을 가정해보는 활동이 포함된다. 두 학생은 문제를 읽은 후 주어진 조건과 구해야 하는 것이 무엇인지 쉽게 답을 하였다. 다음은 학생들이 문제를 이해하고 그 해답을 가정해보는 과정이다.

연구자: 너희들 생각에는 학교 버스정류장의 위치는 어 디가 될 것 같니? ㉠
학생A: 가운데요.
연구자: 가운데... 가운데 어디~? ㉡
학생A: 500이니깐 500나누기 2해서 250...아~여기 간격이 500이라는 거구나... 그럼 다 더해서 가운데요.

㉠은 연구자가 학생들이 문제를 풀기 전에 문제의 해답을 가정해보기 위한 발문이다. 이 발문에 학생 A는 주저 없이 '가운데'라고 답을 하였고, 연구자는 구체적으로 그 지점을 표시하도록 하기 위해서 ㉡에서 학생 A의 대답을 재확인하였다. 학생A는 첫 번째 집부터 마지막 집까지의 거리의 중간 지점으로 정답을 가정하였다. 학생 B는 자신의 의견을 먼저 제시하지 않고 학생 A와 연구자의 대화내용을 들은 뒤 연구자가 의견을 물었을 때 학생 A와 같은 의견을 말했다.

나. 현실모델 단계(문제해결전략 모색)

이 단계는 이전 단계에서 예상한 지점이 정확한 정답인지 확인해보는 과정 속에서 문제를 간결한 형태로 표현함으로써 자신들이 해결해야 할 문제 상황에 적절한 모델을 유도하고 개발하는 현실모델 단계이다. 다음은 학생 A가 문제 상황 속의 그림을 간단하게 나타내고 이 전단계에서 예상한 지점, 즉 650m을 표시한 그림이다.



<그림 Ⅳ-1> 학생 A의 문제 속 그림을 간단히 나타낸 그림

이 그림은 수직선의 형태를 취하고 있으나 원점이 없고 각 지점들의 위치를 수로 나타내지 않고 있으므로 아직 정확한 수직선이라고 할 수는 없다. 단지 그림을 간단하게 나타낸 현실모델이라고 할 수 있다. 학생들은 위와 같은 그림을 그린 후 예상한 지점이 정답이 되는지 알기 위한 문제해결전략을 구상하였다. 다음은 학생들이 자신들이 그린 그림을 보고 버스정류장부터 각각의 집의 거리가 최소가 되는 위치를 찾아가는 과정 중의 대화내용이다.

학생A: 다 더했을 때, 정류장의 위치를 기준으로 양옆에 학생들을 다 더했을 때 오른쪽이랑 왼쪽이 같아지면 그 지점이 최소에요. ㉠

학생 A는 ㉠에서 버스정류장의 위치로 예상했던 가운데 지점을 기준으로 왼쪽과 오른쪽으로 집을 구분하고 양쪽으로부터 버스정류장까지의 각각의 거리의 합이 같을 것이라는 가정을 하였다. 자신이 가정한 것과 다른 결론을 얻자 이번에는 다른 지점을 선택하여 위의 과정을 반복하였다. 이것으로 학생 A는 문제 상황 속에서 각각의 집들로부터 버스정류장까지의 거리가 최소가 된다는 것은 '버스정류장을 기준으로 양쪽에 있는 집들과 버스정류장까지의 거리의 합이 같아진다.' 라는 현실모델을 개발하였음을 알 수 있다.

다. 수학적 모델 단계(집이 홀수 채 일 때 문제해결)

현실 모델을 수학적 기호와 표현 등 수학적 모델로 바꾸는 단계로 수직선, 표, 그래프의 필요성을 인식하고 관계식을 세우는 과정에서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프를 표현할 수 있게 된다.

1) 수직선을 사용한 수학적 모델 형성

다음은 문제 상황속의 그림을 수직선으로 변환하는 과정에서 원점 위치 잡기의 어려움이 나타나는 대화이다.

학생A: 수직선이면 원점이 있어야 돼요?
연구자: 어떻게 생각해?
학생A: 그러면 여기가 0이에요?(수직선 위에 성미집을 가리키며) 아까 성미를 기준으로 했으니까...㉠

학생B: 이거 그냥 그대로 하면 되는 거 아냐?(원점 없이) ㉡
(중략)
연구자: 둘이 의견이 다른데, 뭐가 더 좋을까? 너희들 생각에는?
학생B: 0써요~(잘 모르겠다라는 듯)
연구자: 그럼 어디를 0이라고 할꺼야?
학생A: 0의 위치가 이름인 데가 아니어도 돼요? 중간에다 해도돼요?
연구자: 그렇게 하면 어떻게 될까?
학생A: 그러면 아까 한 대로 그 점을 정류장이라고 생각하고 양쪽이 같아지게 해요. ㉢
연구자: 그런데 지금은 그림을 수직선으로 나타내는 거거든~㉣
학생B: 그냥 전 원점 안할래요.
학생A: 아...어떻게 해야 해요? 그냥 원점 안하는 게 편한 것 같아요.(다시 수직선을 그린다.) 그럼 아까 그림에서 집모양만 없어진 거네요. ㉤

연구자는 학생들에게 이전 단계에서 그린 그림을 수직선으로 나타내도록 하였다. 학생 A는 수직선을 그리는 것이므로 원점이 존재해야하고 그 원점은 ㉠에서 기준이 되는 점이라고 인식하고 있었다. 연구자가 원점의 위치를 묻자 학생 A는 ㉢에서 수직선의 중간지점을 원점으로 표시하여 원점을 버스정류장의 위치로 정하여 원점을 기준으로 양 옆의 각각의 집에서부터 버스정류장까지 거리의 합이 같아지게 한다고 답하였다. 이에 연구자는 학생 A가 문제 상황의 그림을 수직선으로 나타내는 활동을 잘못 인식한다고 판단하여 ㉣에서 상황을 정리해 주었다. 학생 B는 ㉡에서 수직선을 나타낼 때 원점의 필요성을 인식하지 못하였고 연구자와 학생 A의 대화를 들은 후, 자신의 의견이 틀렸다고 판단하여 원점을 사용하기로 한다. 그러나 학생들은 수직선위에서 원점의 위치를 쉽게 결정하지 못하자 원점 없는 수직선을 완성한다. 다음은 버스정류장이라고 예상한 지점부터 각각의 집들로부터의 총 이동거리를 구하는 과정에서 학생들과 연구자가 나눈 대화 내용이다.

학생A: 아...계산기 쓰면 안돼요? (총 이동거리의 합을 구하기 힘들어한다.)
학생A,B: (서로 나온 값을 비교한다.)
연구자: 만약 수직선을 이렇게 그리면 어떻게 됐을까?(원점이 있는 수직선) 은진이를 기준으로 한다면? ㉠
학생A: 은진이는 0. 다미는 500, 예은이는 600...
연구자: 수직선을 이렇게 했다면 풀기 더 좋았을까?
학생A,B: 네...하하(웃음)
학생A: 내가 아까 수직선 그렇게 할걸~ ㉡

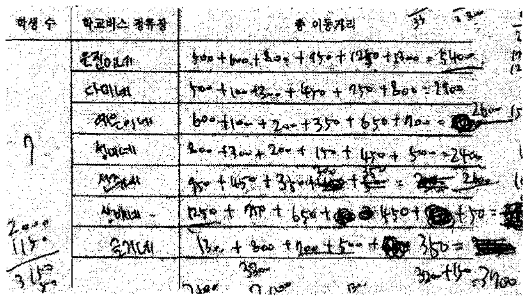
연구자는 학생들이 총 이동거리를 구할 때 숫자가 복잡하여 계산이 어려워하자 ㉠에서 연구자가 의도적으로 개입하여 수직선위에 원점을 나타내도록 하였다. ㉡에서 학생들은 수직선위에 원점을 나타낼 때 이전보다 거리를 구하는 계산이 수월해졌음을 인식하고 기준점이 필요한 이유와 평소 무의식적으로 써넣는 원점의 발생과정을 경험하였다.

2) 표를 사용한 수학적 모델 형성

이전 단계에서 학생들이 개발한 현실모델은 문제해결에 적절한 현실모델이 되지 않으므로 집이 1채일 때부터 사고하도록 유도하였다.

연구자: 만약에 집이 딱하나 밖에 없다면, 은진이만 있다면, 어떻게 될까? 학생 수는 몇 명이지? ㉠
학생B: 한명. ㉡
연구자: 그럼 정류장의 위치는 어디가 될까?
학생A: 은진이네.
연구자: 그럼 총 이동거리가 어떻게 돼?
학생A: 0...
학생B: 뭐야~ (생각했던 것보다 쉽다는 듯) ㉢
(중략)
학생B: 이렇게 하니깐 뭔가 쉽지 않나? ㉣
학생A: 아까 우리가 한 거는...(조금 전 활동이 뭔가 잘못된 것이라고 생각한다.) ㉤

이전단계까지 모델링 학습에 소극적으로 참여하였던 학생B는 문제 상황이 간단해지자 ㉡, ㉢처럼 활동에 자신감을 갖게 되는 모습을 보였다. 또한 ㉣, ㉤에서 학생들은 이전 단계에서 자신들이 개발한 현실모델의 문제점을 자연스럽게 발견한 것으로 볼 수 있다. 한편 학생들은 집이 세 채일 때, 다섯 채일 때에도 표를 사용하여 위의 과정을 반복하여 버스정류장의 위치를 찾았다. 다음은 원래 문제 상황이었던 집이 7채 일 때 학생 B가 완성한 표이다.



<그림 IV-2> 학생 B의 집이 7채일 때 표

이 과정에서 각각의 집으로부터 버스정류장까지의 거리를 구하여 숫자로 나타내고 그것을 덧셈기호를 사용하여 거리의 합을 나타내는 수학적 모델을 형성하였다. 또한 복잡한 문제 상황을 체계적이고 간단하게 정리할 수 있는 표의 필요성을 이해하게 되었다. 다음은 원래 문제 상황이었던 집이 7채 일 때 표를 사용한 수학적 모델을 형성한 후 나눈 연구자와 학생들의 대화내용이다.

연구자: 7개일 때를 마지막으로 하게 될 텐데, 해보기 전에 너희들은 정류장의 위치는 어디가 될 것 같아? 1채 일때는 그 집이 정류장을 세우면 되는 거였고 3채일 때는... ㉠
학생A,B: 다미집
연구자: 5채 일 때는~?
학생A,B: 예은이네...
연구자: 그러면 7채 있다면? ㉡
학생A,B: 성미네요. ㉢
연구자: 둘 다 예상은 성미네?
(중략)
학생A,B: (집이 7채일 때 예상한 정류장부터 집까지의 거리의 총합을 구한다. 다른 곳을 정류장이라고 예상해보고 비교해본다. 더하는 숫자가 커지고 많아지면서 힘들어 한다.)
학생B: 우리가 예상한 게 맞는 것 같지?
학생A: 웅, 하나씩 오른쪽으로 가고 있어. ㉣

연구자는 ㉠에서 학생들이 집이 1채, 3채, 5채 늘어나면서 집이 홀수 채일 때 버스정류장의 위치를 찾는 규칙을 발견하도록 유도하기 위한 발문을 하였다. 학생들의 대답에서 집이 1채, 3채, 5채일 때 버스정류장의 위치를 정확하게 안다는 것을 확인하였다. 그리고 ㉡의 발문을 하였을 때 학생들은 처음 맥락문제 단계에서 예상하였던 버스정류장의 위치는 '가운데'였으나 수학적 모델을 형성하는 과정에서 두 학생 모두 ㉢처럼 '성미네' 라고 답을 하였다. 연구자가 학생들이 처음 예상했던 지점과 다른 의견을 말하였다는 것을 지적하지는 않았지만 이 과정을 통해 처음 예상했던 '가운데'지점이 아니라는 것을 인지하였음을 알 수 있었다. 또한 학생들은 ㉣에서 집이 1채, 3채, 5채, 7채씩 늘어날 때마다 규칙을 암묵적으로 이해하였다고 볼 수 있다.

3) 그래프를 사용한 수학적 모델 형성

수학적 모델은 여러 형식으로 개발될 수 있으므로 본 연구자는 학생들이 표 이외의 다른 형식의 수학적 모델을 개발하도록 유도하기 위해 다음과 같은 발문을 하였다.

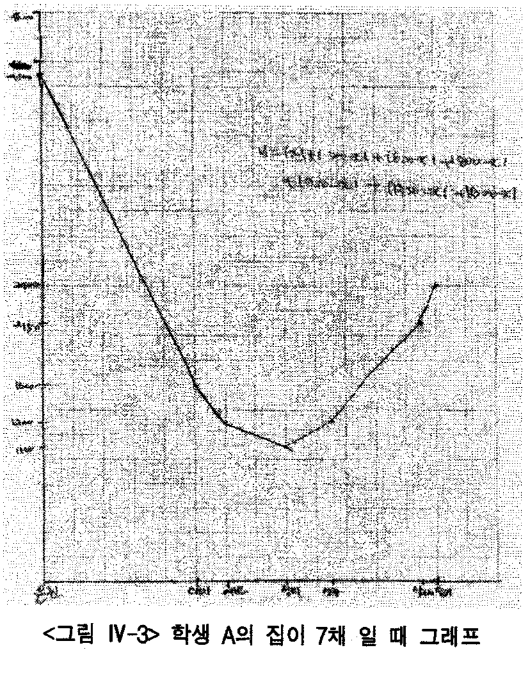
연구자: 정말 성미네가 (정류장의 위치가) 맞을까? 우리가 안해 본 지점이면 어떡하지? ㉠
학생B: 그러게~
연구자: 우리가 좀 더 확실하게 (정류장의 위치를) 알 수 있는 방법이 없을까?
학생A,B: ...(생각)

㉠에서 연구자는 학생들에게 표에서 확인하지 않은 지점이 버스정류장의 위치가 될 수 있다는 의문점을 제기하였다. 이는 학생들에게 주의를 환기시키고 문제 상황에서 좀 더 확실하고 명확한 답을 얻기 위해서는 다른 수학적 모델이 필요하다는 것과, 문제 상황을 직면했을 때 여러 가지 문제해결 전략을 세울 수 있다는 것을 인식시키기 위해서이다. 학생들은 연구자가 제기한 문제점에 수긍하였지만, 다른 해결전략을 생각하지 못하고 주저하는 모습을 보였다. 이에 연구자는 활동에 적극적으로 개입할 필요성을 느껴 학생들에게 연구자가 준비해온 방안지를 나눠주고 버스정류장의 위치와 그 지점부터 각각의 집까지의 거리의 총합을 한눈에 볼 수 있도록 그래프를 그리는 활동을 유도하였다. 학생들은 그래프를 그리는 활동을 하는 것이므로 그동안의 경험으로 x축과 y축이 있어야 한다는 것을 쉽게 생각해냈다. 다음은 표의 내용을 그래프로 나타내기 위해서 x축과 y축이 나타내는 것을 결정하는 과정의 대화내용이다.

연구자: 그럼 x축과 y축은 뭘 나타내는 거지~?
학생A: x축은 이 지점(집의 위치).

연구자: y축은?
학생B: 거리?
연구자: 거리라고 한다면? 아까 구했던 합한 거리? ㉠
학생A,B: ...(생각)
연구자: 우리가 지금 뭘 알고 싶은 거지? ㉡
(중략)
연구자: 그 최소가 그냥 최소가 아니라...? 그럼 지금 좀 어려운 것 같으니까 아까 했던 표에서 집이 하나라고 생각하고 그래프를 그린다고 생각하자. x축이 있고, y축이 있고. ㉢
(중략)
연구자: 그럼 y축을 뭐라고 할꺼야?
학생A: 총 이동 거리요. ㉣

㉠, ㉡처럼 내용을 확실하게 깨닫게 하기 위해 여러 차례 발문할 필요가 있었고 학생들의 사고활동을 돕기 위해 처음 문제 상황 속으로 되돌아가서 구해야 할 것이 무엇인지 기억할 수 있게 하였다. 학생들이 쉽게 답을 하지 못하자 연구자는 학생들에게 ㉢처럼 문제 상황을 간단히 하여 생각하게 하였다. 이후 연구자가 준비한 방안지에 학생들은 이전 단계에서 완성한 표를 보면서 좌표에 점을 표시하여 집이 1채, 3채, 5채, 7채 일 때 차례대로 그래프를 완성하였다.



<그림 IV-3> 학생 A의 집이 7채 일 때 그래프

4) 관계식을 사용한 수학적 모델 형성

학생들이 그래프를 그린 후 연구자는 표와 그래프를 활용하여 관계식으로 나타내도록 유도하였다.

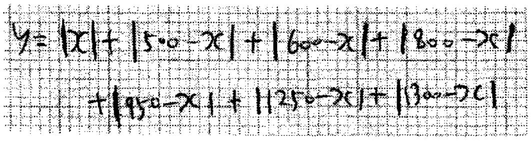
연구자: y는 총 이동 거리였잖아~근데 아까 총 이동 거리의 합 을 어떻게 구했었지? ㉠
(중략)
학생A: y는 x.($y=x$) ㉡
연구자: 여기서부터 여기까지 거리를 구했잖아~? 그 때 거리 어떻게 구했지? 여기서부터 0을 빼줬던 거지? 그럼 y는 0빼기 x라고 하면 돼? ㉢
학생A: 거리니깐 그냥 x.
연구자: 근데 x가 여기일수도 있고 여기일수도 있으니깐, 그냥 x가 아니라? ㉣
학생A: 절댓값 x.($|x|$) ㉤

㉠에서 연구자는 관계식을 세우기 전에 y는 각각의 집부터 정류장까지의 거리의 합이라는 것을 확인시켜주는 발문을 하였다. ㉡에서 학생 A는 집이 1채일 때 집부터 버스정류장의 거리의 합은 그 집의 위치와 같다고 생각하여 $y=x$라는 관계식을 세웠다. 연구자는 학생 A가 세운 식이 정확해지기 위해 ㉢과 같은 발문으로 학생들이 거리의 개념을 정확히 인식하도록 적극적으로 대화에 참여하였다. 그 후 ㉣에서 x가 수직선상에서 음수나 양수의 위치에 있다고 생각했을 때, 학생 A는 ㉤에서처럼 x부터 원점까지의 거리를 나타내기 위해서는 절댓값 기호가 필요하다는 것을 인식한 것으로 볼 수 있다. 따라서 학생 A는 $y=|x|$ 관계식을 완성하였다. 한편 학생 B는 연구자와 학생의 대화를 모니터하여 관계식으로 나타내는 것을 이해하는 모습을 보였다. 다음은 집이 3채일 때 관계식으로 나타내는 과정에서 연구자와 학생들이 나눈 대화내용이다.

학생A: 그럼 답을 이렇게 써요? ($x+500-x+600-x$) ㉠
연구자: 음... 그런데 정류장이 여기일수도 있고 여기일수도 있 는 거잖아~(수직선위에서 x될 수 있는 지점들을 가리키며)근데 거리기 때문에, 아까 뭐라고 했지? ㉡
학생A,B: 절대값을 붙여준다...㉢

처음에 학생들은 ㉠에서 각각의 집으로부터 버스정류

장까지의 총 이동거리 y를 $x+500-x+600-x$로 표현하여 연구자는 ㉡에서 학생들에게 절댓값 개념을 상기시켜주기 위한 발문을 하였다. 하지만 ㉢에서 학생들은 버스정류장의 위치 x로부터 각각의 집까지의 거리를 절댓값으로 나타내지 못하고 전체 식에 절댓값 기호를 사용하는 오류를 보였다. 다음은 몇 번의 발문과정을 거쳐 학생 B가 집이 7채 일 때 절댓값 기호를 사용하여 관계식으로 나타낸 그림이다.



<그림 IV-4> 학생 B의 완성한 집이 7채일 때 관계식

이와 같이 수학적 모델 단계에서 집이 7채 일 때 수직선, 표, 그래프, 관계식으로 표현하여 문제해결을 하였다. 학생들은 수직선에서 원점이 필요한 이유를 말하였고, 절댓값의 기하학적 개념을 이해하고, 절댓값 기호가 있는 식을 완성하였으며 그래프로 직접 표현하는 경험을 하였다.

라. 모델의 정교화 단계(집이 짝수 채 일 때 문제해결)

강옥기(2010)에 따르면 정교화란 수학적 모델을 구한 다음 변인의 수를 점차적으로 늘리면서 더욱 정교한 해를 구할 수 있도록 변형하는 것과, 어떤 상황에서 얻은 자료들의 분포 경향을 나타내는 수학적 모델을 더욱 정밀한 해를 구할 수 있는 수학적 모델로 변형하는 것이라고 말한다. 이전단계에서 집이 홀수채로 있을 때 버스정류장의 위치를 결정하는 수학적 모델을 얻었다면 이 단계에서는 집이 짝수채로 있을 때 버스정류장의 위치를 결정하는 수학적 모델을 개발하여 문제 상황에 정교하고 유의미한 해를 얻을 수 있도록 한다. 그리하여 집이 짝수채로 있을 때 표와 그래프, 관계식을 나타내는 모델의 정교화 과정이 포함된다. 그 과정 속에는 이전 단계에서와 마찬가지로 집의 개수는 2채, 4채, 6채씩 늘려가며 규칙을 발견하도록 유도하는 활동이 포함된다.

학생들은 1차시의 학습경험으로 그림의 '가운데' 지점이 아닌 가운데 지점에서 오른쪽에 있는 '유진네'로 버스정류장의 위치를 예상하였고 1차시 때와 마찬가지로 각각의 지점에 대한 거리의 총합을 비교하기 위해 연구자가 준비해온 표를 이용하여 수학적 모델을 완성하였다. 학생들은 완성한 표에 의해 수직선위에서 가운데 두 집의 위치가 버스정류장의 위치임을 알 수 있었다. 다음은 버스 정류장의 위치를 좀 더 확실하게 인식하기 위해 집이 2채 일 때 만들어진 표를 이용하여 그래프를 그리는 활동의 대화내용이다.

학생A: (그래프 모양이) 일자에요. ㉠
연구자: 좀 더 구체적으로 그리기 위해서 정류장이 이 밖에 있다고 하면 어떻게 돼?(수직선 위에서 버스정류장이 두집보다 오른쪽에 있을 경우) 그래프에 점을 어디에 찍을 수 있을까? ㉡
학생A: 위로 올라가요.
(중략)
연구자: 그럼 만약에 정류장을 여기라고 하면? (수직선 위에서 버스정류장이 두집보다 왼쪽에 있을 경우)그래프는 어떻게 그려줄 수 있어? ㉢
학생A: -100.
학생B: 이렇게 내려가지 않을까?
학생A: -100이면,,,,(계산해보고) 700. 그럼 이렇게 되겠네!
(좌표평면에 점을 표시하며)
연구자: 그럼 그래프 모양 어떻게 생겨?
학생A: 이렇게...그릇모양~? ㉣

㉠에서 학생들은 집이 2채 일 때 그래프로 나타내기 위해서 표를 보고 좌표에 점을 찍어 선으로 연결하였더니 그래프의 모양이 일직선이 되었음을 인식했다. 연구자는 더 자세한 그래프의 모양을 얻기 위해 ㉡처럼 발문하자 학생 A는 수직선위에서 버스정류장의 위치가 두 집보다 오른쪽에 위치하는 양수인 지점일 때 그래프의 모양은 '올라간다' 라고 표현하였다. 연구자가 다시 ㉢처럼 발문하자 학생 B는 수직선위에서 버스정류장의 위치가 두 집보다 왼쪽에 위치하는 음수인 지점일 때 그래프의 모양은 '내려간다' 라고 표현하였다. ㉣에서 학생 A와 학생 B는 완성한 그래프를 보고 집이 2채일 때의 그래프의 모양을 확인하였고 가정한 것과 실제 결과는 차이가 있음을 인식하였다. 먼저 가정해보고 결론을 확인해 보는 과정을 거치면서 학생들은 그래프 모양을 더 정확

히 인식하게 된다. 집이 4채, 6채 일 때도 위와 같은 활동을 반복하였다.

이와 같이 모델의 정교화 단계에서는 수학적 모델에서 좀 더 유의미하고 정교한 해를 얻기 위하여 집이 6채일 때의 문제 상황을 표, 그래프, 관계식으로 나타내는 활동을 하였다.

마. 모델 적용 단계(일반화시키기, 다른 문제에 적용)

마지막으로 이 단계에서는 얻어진 결론을 맥락문제 속에서 재해석하는 단계이다. 이 단계에서는 집이 7채일 때 뿐 아니라 집이 9채, 11채, 13채 즉 홀수개로 일반화할 때 버스정류장의 위치를 구할 수 있다. 다음은 홀수개의 집이 있을 때 버스정류장의 위치를 구하는 과정의 대화내용이다.

연구자: 응 성미네. 근데 너희들 만약에 집이 9 채야~ 그럼 예상 하면 정류장은 어딜까?
학생A: 하나씩 움직이니깐~ ㉠
(중략)
학생A: 그러면 그 중에서 가운데 집이요. ㉡
연구자: 그럼 집이 11개 있을 때는~? 정류장은 어디가 세울까?
학생A: 11개면~모르겠다...(웃음)(집을 그려보고 생각해본다.) 여기(중간) 여기가 몇 번째냐면 6번째. ㉢
연구자: 그럼 13개일 때는? 굳이 거리는 구해보고 할 필요 없이 정류장 어디가 세울꺼야?
학생A: 7번째...

연구자가 집이 9채일 때 버스정류장의 위치를 물었을 때 학생 A는 ㉠에서 정류장의 위치가 집이 늘어날 때마다 하나씩 오른쪽으로 이동하는 규칙을 발견했다는 것을 알 수 있다. 그 다음 학생 A와 학생 B가 그림을 그려 확인하는 과정을 거쳐 ㉡처럼 답하였다. 집이 홀수 개일 때 정류장의 위치는 가운데 집이 된다는 것을 깨달았는지 확인하기 위해 연구자는 집이 11채 있을 경우에 버스정류장의 위치를 물어 봤다. ㉢에서 학생 A는 가운데 그 중 가운데 집이라고 답을 말했다. 이 활동을 하면서 연구자가 직접적으로 '홀수'라는 용어는 사용하지 않았지만 마지막단계에서 두 학생은 집이 홀수채로 있을 때 그 가운데 집이 버스정류장의 위치가 되는 것을 발견할 수 있었다.

연구자는 집이 짝수 채로 있을 때 학생들이 규칙을 발견할 수 있도록 집이 8채, 10채, 12채 일 때 버스정류장의 위치가 어디가 될지 발문하였다. 학생 A와 학생 B는 주저 없이 '가운데 두 집과 그 두 집 사이 어느 곳이던 상관없다.'라고 답을 하였다. 이것으로 학생 A와 학생 B는 집이 짝수채로 존재할 때 일반적인 규칙을 발견하였음을 알 수 있었다.

이와 같이 본 연구에서는 절댓값 기호가 있는 식과 그래프의 개념형성과정을 알아보기 위해 수학적 모델링의 5단계로 실험을 설계하고 그 결과를 단계별로 구분하여 분석하였다. 학생들은 맥락문제 단계에서 집이 홀수채로 있을 때 버스정류장을 선정하는 현실 문제에서 주어진 조건과 구해야 할 것을 확인하고 답을 가정해보는 활동을 하였다. 현실모델 단계에서는 버스정류장으로부터 각각의 집까지의 거리의 합이 최소가 되는 버스정류장의 위치를 찾기 위해 수직선 위에서 버스정류장의 지점을 예상해보고 거리를 구하는 활동을 하였다. 수학적 모델 단계에서는 현실모델을 수학적으로 변환하기 위해 표를 사용하여 답을 도출하였으며, 연구자의 발문과 직접적인 개입에 의해 표의 내용을 그래프로 나타내었고, 표와 그래프를 통해 절댓값 기호가 있는 식을 완성하였다. 모델의 정교화 단계에서는 좀 더 정교한 해를 도출하기 위해 학생집의 개수를 달리하여 위의 과정을 반복하였으며, 모델적용단계에서는 도출한 해를 일반화하여 맥락 문제 상황에서 재해석하였다.

V. 결론 및 제언

절댓값 기호가 있는 식과 그래프는 도형의 대칭이동, 부등식의 영역, 다항 함수 및 삼각함수의 그래프 등 여러 단원에서 문제 해결 및 다른 문제와 연관되어 활용도가 높다. 거리 개념과 절댓값 기호가 있는 식과 그래프에 관한 제7차 개정 교과서 내용진술 상황을 분석 고찰한 결과 기하적 도구보다는 형식적이고 대수적인 연산도구로서의 접근이 주종을 이루고 있었다. 연구자는 일상적 상황에서의 문제해결을 위해서는 실제 문맥에서 수학적 개념을 끌어내는 경험이 필요하다는 문제의식을 갖고 모델링 과정의 문맥을 주로 다루고 있는 NCTM(1991)의 자료를 수정하여 학생들에게 절댓값 기호가 있는 식과

그래프의 개념과 원리 등의 효과적 개념발달을 위한 수학적 모델링 활용을 제안하였다. 여러 문헌연구 결과를 바탕으로 적절한 개념발달이 가능하다고 판단되는 수학적 모델링을 맥락문제, 현실모델, 수학적 모델, 모델의 정교화, 모델적용의 5단계로 이루어지는 전 과정으로 실험설계를 하였다.

본 연구의 목적은 첫째 맥락문제를 통한 절댓값 기호가 있는 식과 그래프의 개념 발달 가능성과 두 번째는 수학적 모델링 활동의 각 단계는 학생들의 개념발달에 효과적으로 작용하는가를 밝히는데 있다. 이를 위하여 인문계 고등학교 1학년 학생 2명을 연구대상으로 2차시에 걸친 수학적 모델링 활동을 적용, 분석하였다. 본 논문은 수학적 개념이 형성되는 과정을 진술한 정성연구이다.

실험결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 맥락문제를 통한 실험에서 학생들은 연구자가 의도한 수학적 개념을 성공적으로 학습할 수 있었다. 정류장 정하기라는 주어진 문맥 속에서 절댓값의 기하학적 개념을 이해하고 기준점의 필요성과 그것이 원점이라는 단순한 사실을 새롭게 경험하게 되었다. 절댓값 기호가 있는 그래프가 만들어지는 과정과 시각적으로 보이는 의미 등을 새롭게 인식하였다. 결과적으로 이러한 일련의 과정에서 문맥이 수학적으로 의사소통하는 방법을 제공하였음을 확인하였다.

둘째, 위의 효과적인 수학적 개념 발달을 위하여 연구자는 의도된 수학적 모델링 5단계를 계획하였고 각 단계는 학생들의 수학적 사고과정을 순차적으로 안내하는 역할을 하였으며 결과적으로 효과적인 개념발달 단계로서의 구실을 한 것으로 나타났다. 첫 맥락 문제단계에서 학생들이 문제를 이해하고 결과를 추측하였다. 그 추측이 과연 맞았는지 알아보는 두 번째 단계에서 연구자는 예측한 결과가 옳지 않았음을 스스로 깨우치게 유도하였고 학생들은 새로운 문제해결전략이 필요함을 인식하게 되었다. 이 과정에서. 수직선, 기준점 등 수학적 기호의 필요성을 이해하고 미지수의 설정과 미지수가 들어가는 절대기호의 생성 또 그것들의 합, 절댓값 기호가 있는 식의 도출 등 연구자가 의도한 각 모델링 단계의 흐름을 좇아 학생들은 자연스럽게 수학적 사고를 할 수 있었다. 이러한 수학적 모델 단계를 거쳐 문제 상황이 바뀐 6단계는 이전 단계와의 정교한 차이를 인식하면서 사고의 확장으로 이어졌다. 마지막 5단계에서 학생들은 도출된 해를 비슷한 다른 맥락문제에서 일반화하였다. 이는 학습자의 추측에서 시작하여 실제 하나하나를 대입하여 표를 만들어 비교하는 과정과 그것을 일일이 점을 찍어 그래프를 그려보고 이후 기준점을 중심으로 거리개념을 갖는 절댓값 기호가 들어가는 식을 완성할 수 있도록 모델링 과정을 디자인 한 결과 가능한 것이었다.

이와 같이 진행된 수학적 모델링 활동에서 학생 A는 단계적인 수학적 모델링 학습이 해를 도출하는 과정에서 자신감을 갖게 되었고 표를 완성한 후 그 결과를 이용하여 그래프를 그리고 식으로 나타내면서 절댓값 기호가 있는 식과 그래프를 유의미하게 이해하였음을 확인하였다. 학생 B는 단계적인 수학적 모델링 학습이 해가 도출되는 원리를 이해하는데 도움이 되었으며, 문제에 대한 흥미를 느낄 수 있었다고 답하였다.

마지막으로 본 논문의 연구 결과를 바탕으로 다음을 제언한다.

첫째, 맥락 문제가 유형별로 개발되어야 한다. 수학적 개념, 원리, 법칙이 효과적으로 발달할 수 있는 맥락 문제가 수업에 활용될 수 있도록 우리나라 교과과정의 주제별, 단원별로 개발되어야 한다.

둘째, 학습능력수준을 고려한 난이도별 모델링 과제를 제시할 필요가 있다. 학생 A에 비하여 학생 B는 상대적으로 수동적이었는데 이는 학습자 개인의 사고력 차이에서 비롯되는 것으로 보인다. 그럼에도 실험 내내 학생 B는 흥미를 갖고 새로운 수업에 대한 즐거움을 표현하였다. 호기심을 자극받아 문제에 집중할 수 있으려면 각 수준에 맞는 과제는 필수적이다.

셋째, 맥락 문제를 활용한 수학적 모델링 수업을 설계할 때 그에 따른 평가기준안이 개발되어야 한다. 수학적 모델링은 과정으로써 각 단계별로 활동이 이루어지므로 평가자는 학생들의 모델링 활동을 관찰하고 활동지와 개인 면담을 포함한 전 학습과정에 맞는 평가가 이루어져야 한다. 이는 학생들과의 면담에서 수학적 모델링 활동은 필요하고 의미가 있지만, 현재 실시하고 있는 학교

수업이나 평가는 이와 다르다는 의견을 제시한 바 있다.

참 고 문 헌

강신덕 외 6 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)교학사.

강옥기 (2010). 수학적 모델링의 정교화 과정 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> **20(1)**, 73-84.

계승혁 외 3인 (2009). 고등학교 수학 익힘책, 서울: (주)성지출판.

교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정해설Ⅲ, 서울: (주)미 래엔 컬쳐그룹.

권기석 · 박배훈 (1997). 고등학교 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(2)**, 149-159.

김민경 · 홍지연 · 김은영 (2009). 수학적 모델링 사례 분석 을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **48(4)**, 365-385.

김부윤 외 14인 (2009). 중학교 수학, 서울: (주)교과서다음.

김선희 (2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰, 대한수학교육학회지 <학교수학> **9(3)**, 303-318

김선희 · 김기연 (2004). 수학적모델링 과정 포함된 추론의 유형 및 역할 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학>, **6(3)**, 283-299

김수환 외 9인 (2009). 고등학교 수학, 서울: (주)교학사.

백은정 (2000). 수학적 모델링 지도를 위한 프로그램의 개발과 적용-중학교 2학원 부등식 단원을 중심으로-, 한국교원대 교육대학원 석사학위논문.

서희진 (2009). 절댓값 기호가 있는 식의 그래프에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해와 오류 분석에 관한 연구, 한국교원대 교육대학원 석사학위논문.

성호금 (2000). 수학적 모델링 지도가 수학적 신념 및 학업 성취도에 미치는 영향, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

손홍찬 · 류희찬 (2007). 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할, 대한수학교육학회지 <학교수학> **9(4)**, 467-486.

신은주 · 권오남 (2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> **11(1)**, 157-177.

신은주 · 이종희 (2004). 모델 개발 과정에서 도구를 조작하는 활동분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> **6(4)**, 389-409.

양승갑 외 8인 (2009). 고등학교 수학, 서울: (주)금성출판사.

양승갑 외 8인 (2009). 고등학교 수학 익힘책, 서울: (주)금성출판사.

이영하 외 5인 (2009). 중학교 수학 1, 경기: (주)교문사.

이희정 (2004). 수학적 모델링을 이용한 수업이 학습 능력 수준별 학생들의 문제해결력에 미치는 영향-고등학교 2학년을 대상으로-, 한국교원대학교 석사학위논문.

장난영 (2006). 절댓값과 관련된 문제해결 과정에서 나타난 오류분석과 교정에 관한연구-고등학교 2학년 중심-, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

장효정 (2010). 중등수학 교과서의 절댓값 관련내용에 대한 고찰, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

정광식 외 3인 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)대교.

정상권 외 6인 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)금성출판사.

정영옥 (1997). 프로이덴탈의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

조원주 (2002). 중학교 함수영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가기준안 개발, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

최항철 (2000). 고등학교에서 대수지도를 위한 수학적 모델링 자료의 고찰, 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

홍지연 (2007). 수학적 모델링을 활용한 수업이 초등학교 4학년 수와 연산 학습에 미치는 효과, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

황혜정 (2007). 수학적 모델링의 이해-국내 연구 결과 분석을 중심으로-, 대한수학교육학회지 <학교수학> **9(1)**, 65-97.

Blum W. et al (2002). ICMI study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education-Discussion Document, *Educational Studies in Mathematics* 51, 149-171.

Burghes, D. (1980). Mathematical modeling: a positive direction for the teaching of applications of mathematics at school, *Educational Studies in Mathematics* **11**, 113-131.

Doerr H., & English L. (2003). A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning about Data, *Journal for Research in Mathematics Education*, **34(2)**, 110-136.

Freudenthal, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands.

Lesh R., & Lehrer R. (2003). Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers, *Mathematical Thing and Learning* **5(2&3)**, 109-129.

NCTM (1991). *Mathematical Modeling in the secondary School curriculum*, in Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds). Reston, VA

OECD (2003). The PISA 2003 Assesment Framework - Mathematics, Reading, *Science and Problem Solving Knowledge and Skills.*

Swetz, F. (1989). When and how can we use modeling?. *Mathematics Teacher* **December**, 722-726.

Swetz, F. (1991). Incorporating mathematical modelling into the curriculum. *Mathematics Teacher* **May,** 358-364 .

The Case Study for the Development of Conception of a Graph and the Formula with the absolute value through the Mathematical Modeling

Shin Kyung Hee
Ajou Univ, Woncheon-dong, Yeongtong-gu, Suwon-si, Gyeonggi-do, Korea
E-mail : shinmat@ajou.ac.kr

Kim Yeon Ji
Ajou Univ, Woncheon-dong, Yeongtong-gu, Suwon-si, Gyeonggi-do, Korea
E-mail : ken_kyg@hanmail.net

The purpose of this study is to detect the possibility of the development of conception of a graph and the formula with the absolute value through context questions, and also to investigate the effectiveness of the each step of the mathematical modeling activities in helping students to have the conception. The research was conducted to analyze the process of development of the mathematical conception by applying the mathematical modeling activities two times to subjects of two academic high school students in the first grade.

The results of the study are as follows:

Firstly, the subjects were able to comprehend the geometric conception of the absolute value and to make the graph and the formula with the sign of the absolute value by utilizing the condition of the question. Secondly, the researcher set five steps of the intentional mathematical model in order to arouse the effective mathematical notion and each step performed a role in guiding the subjects through the mathematical thinking process in consecutive order; consequently, it was efficacious in developing the conception.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : context, mathematical modeling, absolute value, development of the mathematical conception