韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 05. 제 50권, 제 2호, 135-148.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2011, Vol. 50, No. 2, 135-148.

ATD에 근거한 유리수의 대수학적 completion[1]에 관한 연구

김 부 윤 (부산대학교)
정 경 미 (부산대학교 대학원)

Ⅰ. 서 론

교사에게 가르쳐야 할 수학적 지식이 정해지면, 우선은 존재성을 입증해 나가야 하며, 존재성이 입증된 후에는 학생들의 자연스러운 사고의 흐름에 맞추어 그 지식을 구성하는 방법에 초점을 맞추어야 한다. 즉 교사에게는 가르쳐야할 지식에 대한 구조가 있어야 한다는 것이다.

일반적으로 수학을 하는 과정은 예를 찾아 지식, 추측을 만든 후에 이를 형식화하여 문제를 만든다. 그 다음에 정의를 만든 후 다른 대상물로 확인하는 작업을 거쳐, 계산법을 익히고, 심화·종합화한 후에 이론화한다. 이것은 인간 사고의 흐름에 맞는 과정이며, 이 과정을 통해서 학생들에게 수학화하는 방법을 보여주는 것이다.

그런데 오늘날 학교수학에서는 이러한 과정이 무시되고, 정의(definition)의 설계나 구성 과정을 소홀하고, 공식이나 정리의 결과에만 집중하고 있기 때문에 많은 문제가 발생한다.

Chevallard(1992; 1998)가 제안한 'The Anthropological Theory of Didactics[2]'는 '인간 사고의 자연스러운 전개에 적합한 교수 방법'과 가장 근접하므로, 이와 같은 맥락에서 교사가 현행 수학과 교육과정에 제시된 수학적 지식을 중심으로, 학생들에게 수학을 하는 가장 자연스러운 방법을 제시하는 것은 의미 있는 일이다.

본 연구에서는 Chevallard(1992, 1998)가 제안했던 ATD의 관점에서 수학을 하는 가장 자연스러운 방법을, 교과서 재구성 방향 및 수학 교수에 필요한 교사의 배경 지식에 맞추어 제시하고자 한다.

그에 대한 구체적인 주제로 '유리수의 대수적 완료성'의 과정을 통해, 복소수가 어떻게 교육과정에서 다루어져야 하는가를 살펴본다. 이를 위해 제Ⅱ장에서는 이 논문의 이론적 근거가 된 ATD에 대해 간단히 알아보고, 제 Ⅲ장에서는 완료성을 위해 '복소수'의 필요성에 대해 논의한다. 그리고 제 Ⅳ장에서는 복소수의 존재성을 밝히기 위해 교사가 가져야 할 배경 지식을 살펴보고, 제 Ⅴ장에서는 ATD에 근거하여 '복소수'에 대한 현행 교과서를 분석한 후 문제점을 도출시킨다. 마지막으로 제 Ⅵ장에서는 이러한 분석에 근거하여 '복소수'의 교수 방법을 제안한다.

Ⅱ. ATD에 대하여[3]

1. 수학교수학에서 ATD란 무엇인가?

1) 수학교수학에서 인류학적 접근의 필요성

김부윤·정경미(2010)에 따르면 수학교수학에서 인류학적으로 접근한다는 것 혹은 인류학적 이론이라는 것은 이미 존재하는 여러 이론들이나 다른 가능한 접근법들에는 '인류학적'이라는 형용사가 어울리지 않고, 사용되지 않았기 때문에 다소 생소할 수 있다고 하였다.

인류학이 인간에 대한 연구이고, 사회 인류학이 인간 사회에 대한 연구라는 점을 생각할 때, Chevallard(1992;

* 접수일(2010년 7월 30일), 수정일(2011년 4월 1일), 게재확정일(2011년 5월 10일)
* ZDM분류 : C79
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 복소수, 교수학의 인류학적 이론, 인간행동학, 수학적 조직화

1) 이를 완비(完備: 완전히 준비되었다.)라고 말하게 되면, 수학자들이 수 체계를 '완료했다'라는 의미와는 다르다. 그래서 이러한 관점에서 완비보다는 완료로 보는 것이 더 나은 것 같다. 그래서 이 논문에서는 completion을 완료성이라 한다.
2) 이는 교수학적 변환론의 확장인 교수학의 인류학적 이론으로, 이후 ATD라 한다.
3) 이 내용은 정경미(2010)의 제 Ⅱ장에 근거한다.

1998)가 제안한 ATD의 연구 대상은 수학교수학임을 알 수 있고, 결국 인류학의 관점에서 수학교수학을 연구하는 것이다.

왜냐하면 Chevallard의 입장에서 보면 수학의 전개는 인류문화사와 일치하기 때문에, 이전의 수학교수학의 개념과는 다르게 새로운 수학교수학의 개념은 수학 연구에 대한 '조력의 과학'이라는 개념으로 나타난다.

인류학이 이론을 중시하는 학문이며, 또한 이론과 실천이 밀접하게 관련된 분야이므로, 인간의 모든 활동을 수학적 활동으로 간주하여 인간의 실제를 이론의 과정으로 승화시킬 필요성이 대두되었고, 이러한 변화에 맞추어 인간 행동의 모든 활동을 대상으로 하는 인류학을 수학의 모든 활동으로 폭넓게 받아들이려는 Chevallard의 의도가 ATD로 발전된 것이다.

2) ATD의 배경

Laborde(2007)에 따르면 Chevallard에 의해 프랑스를 중심으로 발전된 ATD는 1998년 프랑스, 독일 양쪽 회의에서 처음으로 소개되었다.

이 이론의 근원은 교수학적 변환이라는 개념이고, 이것의 초점이 오직 수학 지식에만 있는 것이 아니라 수학 지식을 질문하는 것에 있고, 또한 수학 지식을 언제 어디서나 정의되는 것으로 생각하지 않는다는 것이다.

그래서 학교에서 가르칠 지식은 그것을 다음과 같은 교수 제도의 제한에 적응시키기 위해 학교 밖 제도에서 구성되는 지식을 구성하는 과정으로부터 온다는 것이다.

- 수학교육과정에 대한 사회적 요구 사항
- 연구와 교육과정 프로그램을 정의할 때, 인간생활권의 관점과 목적
- 결과적으로 교수에 있어 새로운 개념 도입을 위한 연속적인 방법, 이미 도입된 지식의 조각에 대한 기능에서 새로운 지식을 정의하기 위한 요구, 지식의 알고리즘화

결국 ATD는 Chevallard의 교수학적 변환론(1985)이 발전해 온 자연스러운 결과이고, 교수학적 변환과정을 포함하는 폭넓은 이론으로 확장되었다.

수학 지식 체와 수학적 실체를 분리시킬 수 없기 때문에, ATD는 수학 지식의 변환뿐 아니라 수학적 실제에 그 자체를 모델링하기 위해 시간이 지남에 따라 진화해 왔다.

2. ATD의 인식론적 모델인 인간행동학

1) 인간행동학(Praxeology)

수학교수학에서 인식론적 프로그램이라 부르는 것은 Brousseau(1997)의 연구로부터 나온 프로그램이고, 사회적 제도 안에서 수학의 확산과 관련된 현상을 연구하기 위한 수학적 활동의 모델 구성은 수학교육 연구에 있어서 첫 번째 단계를 구성한다는 확신에 의해 고무되었다.

인식론적 프로그램 안에서 Chevallard에 의해 제안된 ATD는 수학이 문제 유형의 연구에 대한 인간적 활동으로 보여지는 수학지식의 일반적인 인식론적 모델을 구성한다. ATD에서의 인식론적 모델이 바로 인간행동학인 것이다.

김부윤 · 정경미(2010)는 인간행동학은 크게 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다고 하였다. 첫 번째, ATD에 의해 제공된 일반적인 인식론적 모델은 수학적 인간행동학(혹은 수학적 조직화)이라는 용어로 수학적 지식을 설명한다. 두 번째, 수학적 실제를 모델화하기 위한 인간행동학의 사용은 모든 종류의 인간 활동으로 확장될 수 있는데, 특히 이 문제를 연구하는 과정과 새로운 수학적 인간행동학 혹은 활동의 주체를 위해 다른 사람들이 수학적 실제를 모델화 할 수 있도록 도와주는 과정으로 확장될 수 있는데, 이것을 교수학적 인간행동학(혹은 교수학적 조직화)이라고 한다. 결국 수학적 인간행동학은 'what'에 대한, 교수학적 인간행동학은 'how'에 대한 문제이다.

2) 인간행동학의 요소들

인간행동학의 요소들을 밝히고, 그것들을 풍부하게 만드는 것은 중요한 일이다. 그 요소들은 먼저 문제 혹은 과제의 유형(type of problem)이 있고, 이 문제들을 풀기 위한 기술(technique)이 있으며, 이러한 기술 하나하나가 모여 형식화의 과정을 거쳐 만들어진 덩어리가 기술의 종합화(technology)이고, 이러한 여러 가지 기술의 종합화에 대한 현상들을 모아서 이론(theory)을 만든

다. 이 때, 문제의 유형과 기술은 실제적 과정(practical block)이라 하고, 기술의 종합화와 이론을 이론화 과정(theoretical block)이라 한다(Bolea, Bosch & Gascón, 1999; Chevallard, 1992, 1998; Bergsten & Grevholm, 2005; Bosch, Chevallard & Gascón, 2005; Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; García & Haugueras, 2006; Miguel, 2006; Chevallard & Ladage, 2008).

3. ATD의 기본 요소들

1) 수학적 활동: 수학적 조직화(mathematical organizing)

수학적 활동에는 분리할 수 없는 두 가지 측면이 확인되었는데, 한편은 과제의 유형 혹은 문제들과 그것들을 풀기 위해 사용되어진 기술들에 의해 형성된 실제적 과정이 있다. 수학을 하는 것은 주어진 유형의 몇 가지 문제를 푸는데 있다. 예를 들어 고등학교에서 '수열의 극한'에 관련된 가능한 문제의 유형들은 '수열의 극한값을 계산하기', '수열의 극한값의 존재를 증명하기', '수열의 극한 개념을 정의하기', '증명의 타당성을 점검하기' 등이다.

기술이라는 용어는 문제들을 다루기 위해 행해지는 것과 관련된다는 의미에서 매우 폭넓은 뜻으로 사용된다. 수열의 극한값을 계산하고, 증명하고, 정의를 말하는 등의 다양한 기술들이 있다. 몇몇 기술들은 알고리즘적 특성을 가지고 있지만, 대다수는 그렇지 않다.

다른 한편은 실제적 과정을 정당화하고 설명하기 위해 필요한 수학적 담화를 제공하는 수학적 활동의 이론화 과정이 있다. 이것은 두 단계로 구성이 되는데, 첫 번째 단계는 인간 실제가 광범위한 환경 없이 좀처럼 존재하지 않는다는 가정 하에 행해진 일을 묘사하고, 설명하고 정당화하기 위한 기술의 종합화가 있다. 이것은 사용된 기술과 실제에 정당화에 대한 더 깊은 단계를 구성하는 이론을 직접적으로 언급한다. 예를 들어 '$\epsilon-\delta$' 정의 혹은 '부정의 배재'와 같은 다양한 기술의 종합화의 요소와 관련된 수열의 극한값의 계산을 설명할 수 있다. 두 번째 단계는 이론이다. 이론의 목적은 기술의 종합화, 기술, 문제들을 발견하고 입증하고 생성하는 개념, 특성, 관계들의 틀을 제공하기 위한 것이다.

2) 교수학적 조직화(didactic organizing)와 교수학적 국면들(didactic moments)

ATD에서 수학적 조직화의 창조 혹은 재창조의 과정은 연구의 과정 혹은 교수학적 과정의 개념에 의해 모델화된다. 이 과정은 여섯 가지 다른 국면들로 조직되고, 그 여섯 가지 국면은 연구된 수학적 조직화에 의존하여 특징 지워진다. 각 국면은 교수학적 과정의 성공적인 완성을 위해 필수적인 것들을 충족시키는 특별한 기능을 가진다.

(1) 연구 과정: 교수학적 조직화(혹은 교수학적 인간행동학)

ATD는 인간행동학적 조직화의 개념이 수학뿐만 아니라 인간 활동의 어떠한 형태에라도 적용될 수 있다고 생각한다. 특히 그것은 교수학적 조직화 혹은 교수학적 인간행동학이라는 말로 교사와 학생의 실제를 설명하기 위해 사용된다.

교수학적 조직화는 '과제 유형 T에 대한 해법 연구 방법' 혹은 '어떻게 수학적 조직화를 연구할 것인가?' 등과 같은 유형의 질문에 대한 해답이라 할 수 있다.

또한 교수학적 조직화의 개념은 학습 혹은 교수 스키마에 대해 현재 한창 유행하거나 혹은 시대에 뒤떨어진 것이라고 생각하는 무엇이든 상관없이 모든 특징들을 포함하는 개념이다. 교수학적 조직화는 학습 대상들의 몇몇 집합이 결정되지 않으면 존재할 수 없다.

교수학적 조직화는 크게 두 가지로 분류되는데, 한 사람 혹은 집단이 적절한 수학적 조직화를 가지기를 원하거나(수학자 혹은 학생의 교수학적 조직화), 적절한 수학적 조직화를 가지고 다른 사람들을 도울 수 있기를 원할 때(교사의 교수학적 조직화) 사용된다.

수학적 조직화와 마찬가지로 어떠한 교수학적 인간행동학이라도 교수학적 문제들의 유형과 교수학적 기술로 구성된 실제적 과정과 교수학적 기술의 종합화와 이론에 의해 구성된 이론화 과정을 가진다.

(2) 교수학적 국면

교수학적 과정의 국면은 여섯 가지 국면으로 구성이 되어 있는데, 조직화와 처음 만나는 첫 대면의 국면, 문

제들의 유형의 탐구와 이 문제들의 유형과 관련된 기술의 탐구에 관한 탐구 국면, 기술들에 관련된 기술의 종합화와 이론에 대한 환경 구성으로 이루어진 기술 국면, 기술의 작업(기술의 작업은 이 작업을 더 신뢰할 수 있도록 기술을 향상시키기 위한 것이고, 기술의 사용을 숙달시키는 것이다)과 관련되어 있는 기술의 종합화와 이론화 국면, 정교한 수학적 지식의 조직화가 정확하게 무엇인지 확인하는 제도화 국면, 끝으로 평가 국면으로 이루어져 있다.

이러한 교수학적 과정의 여섯 가지 국면들의 '완전한' 현실화는 하나의 수학 문제에 대해 단순한 해결을 넘어서는 하나의 수학적 조직화의 창조에 있어야 한다. 교수학적 과정의 여섯 가지 국면들은 기술의 종합화를 둘러싸고 구성된, 하나의 최소단위의 수학적 조직화의 주요한 요소들의 창조 혹은 재창조를 이끈다.

Ⅲ. 유리수의 완료성을 위한 복소수의 도입[4]

여러 가지 이유로 수의 개념은 실수의 연속체를 넘어서 복소수의 도입으로 확장되었다. 수학의 역사적이고 정신적인 발전에 있어 이러한 모든 확장과 새로운 발명은 어떤 개인만의 노력의 산물은 아니라는 사실을 알아야 한다. 그러한 내용은 개인이 혼자서 다 만들 수 없는 것으로 오히려 천천히, 그리고 더딘 발전의 결과로 만들어진 것이다(Courant & Robbins, 2002).

수는 자연수에서 출발하여 덧셈을 보완하여 정수를 구축하였으며, 정수에서는 덧셈에 대한 통제가 쉬워졌고, 자연수에서 연산이 정수로 옮겨졌다. 또한 정수로부터 덧셈을 보존하면서 곱셈을 보완하기 위해 유리수가 구축되었는데, 유리수는 해석적으로 완전하지 않다. 그렇다면 유리수를 완벽하게 구축하기 위해서는 어떻게 해야 할까?

우리는 유리수가 작도가능하다는 사실을 알고 있다. 그런데 $\sqrt{2}$는 확대체 $Q(\sqrt{2})$에서 작도 가능하지만, $\sqrt[3]{2}$는 확대체 $Q(\sqrt[3]{2})$에서 작도 불가능하다. 그래서 구간축소법의 아이디어로 유리수로부터 실수를 완성시킨다.

유리수에서 Cauchy 수열의 수렴점은 모두 실수가 되고, 실수에서 수렴하는 점은 실수 안에 있어야 한다. 이것이 바로 "완료성(completion)"의 개념이다. 즉, '어떤 과정이 종료되었다.' 혹은 '끌어안는 과정이 종료되었다.'는 의미에서 '완료되었다(complete)' 혹은 '종료되었다(finish)'라고 한다. 그렇다면 실수가 유리수의 수렴점으로서 해석적으로는 완료되었다고 해서, 실수가 대수적으로도 완료되었는가에 대한 의문이 제기될 필요가 있다.

다항식을 풀기 위해 체가 필요하며, 유리수나 실수는 체이지만, 예를 들어 x^2+1과 같은 경우 근이 실수에 닫혀 있지 않으므로, 실수체는 대수적으로 완료되지 않았다.

그래서 실수를 대수적으로 완료시키기 위해 가우스(Gauss)의 '대수학의 기본정리[5]'가 나오게 되었고, 복소수체 $\mathbb{C}$가 다항방정식의 근을 끌어안음으로 해서 복소수는 완료되었다.

그렇다면 왜 복소수를 완료시켜야 할까? 그 이유는 유리수 계수에서 생각한 다항식의 풀이를 어디까지 확대할 수 있는가라는 문제가 제기되었고, 유리수 계수를 갖는 다항식 - 즉 다항방정식 - 의 근이 모두 복소수 안에 존재하기 때문이다.

이제 그 과정을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 실수를 확대시켜서 실수체와 같은 대수적 체 안에서 체 - 이 체는 작을수록 좋다 - 를 만들고, 그 체 위에서 계수를 갖는 다항방정식을 생각하여 그 체 위에서 다항방정식은 완료된다고 하자.

해석학에서 실수가 완료되어 가는 과정을 따르듯이, 대수학에서도 그 과정을 따라야 한다. 아직 실수체는 완료되지 않았지만, 완료된다고 가정할 때 가장 작은 체 -

4) 유리수는 크게 두 방향으로 나누어 생각할 수 있는데, 해석학에서는 수렴성을 이용하여 실수로 완료되고, 대수학에서는 다항방정식의 해를 구하는 방법을 이용하여 복소수로 완료된다. 그러나 실수가 대수학적으로는 완료되지 않았기 때문에 복소수를 이용하여 완료시킨 것이다.

5) 복소수체 $\mathbb{C}$는 대수적 폐체이다. 즉, 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 n차의 다항식 $f(x)$는 복소수체 $\mathbb{C}$ 위에서

$$f(x)=a(x-u_1)\cdots(x-u_n)$$

와 같이 일차다항식의 곱으로 인수분해 되고, 따라서 $f(x)$는 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 중복을 허락하여 n개의 근 $u_1,\cdots,u_n$을 가진다.

그것은 복소수체이다 - 가 만들어져야 한다.

제 실수 계수를 가지는 많은 다항식 중에서 x^2+1을 생각하여 크로네커(Kronecker) 정리[6]를 사용하여 복소수를 완성시킬 것이다.

이를 위해 다음과 같은 과정이 필요하다.

(1) 복소수가 실수와 같은 성질을 가지는 체가 되느냐 하는 것이 문제가 된다. 만약 체가 되지 않는다면, 복소수를 구성할 필요가 없기 때문이다. 따라서 복소수가 체가 된다고 가정하자.

(2) 또한 복소수는 대수적으로 완료되었는가 하는 것이 문제이다. 즉, 복소수를 계수로 갖는 다항방정식이 모두 복소수의 근을 가져야만 복소수는 대수적으로 닫혀 있게 된다. 이에 대한 증명은 1799년 가우스의 '대수학의 기본정리'에 의해 완성되었다. 그러나 이 증명이 너무 어려워서 류빌(Liouville)이 그의 정리[7]를 이용하여 쉽게 증명하게 된다. 이때부터 복소함수론이 주목받게 되어 해석학에서 복소수는 의미를 갖게 되었다.

(3) 마지막으로, 만든 복소수가 실수를 부분체로 포함하는 것 중에서 유한 차원인 가장 작은 체가 되느냐 하는 것이 문제이다. 이것을 증명하기 위해 시도한 사람은 해밀턴(Hamilton)이지만, 그의 사원수체는 교환법칙이 성립되지 않아 체가 되지 못해 결국 실패하였다. 훗날 이것을 성공한 사람은 프로베니우스(Frobenius)이다.

이러한 과정을 거쳐서 유리수 위에서 계수를 갖는 다항식의 근들은 모두 복소수라는 것을 알았다. 이제 $A=\{\alpha\in\mathbb{C}\mid\alpha$는 유리수를 계수로 갖는 다항식의 근$\}$[8]라 하자. 여기서 A는 체가 되고, 그러면 A의 원소의 개수는 셀 수 있는 무한(countable infinite)이다. 이 A를 대수적 폐체라 한다.

6) "체 F가 주어졌을 때, 이 체를 계수로 하는 다항식환 $F[x]$를 구성하자. 그러면 $F[x]$ 위의 임의의 (상수가 아닌) 다항식 $f(x)$가 영점을 갖는 F의 확대체 K가 항상 존재한다."는 정리이다.

7) "유계이면서 복소평면 전체에서 해석적인 함수는 상수함수이다."는 정리이다.

8) 왜 실수 계수가 아니라 유리수 계수인지에 대한 물음은 $\mathbb{C}=\mathrm{K}$이고, 다시 유리수로 돌아가기 위해 α를 유리수 계수로 뽑았다. 만약 실수 계수라 하면 복소수 전체가 되어 너무 커지므로 의미가 없고, 실수보다 유리수가 먼저 대수적으로 완성되었기 때문이다.

이 A는 대수적으로 완료되었다. 왜냐하면 유리수를 해석학으로 종료시킨 것이 실수이고, 유리수를 대수학적으로 종료시킨 것이 무엇인가가 중요한데, 그 체를 A라 할 때, 그 체 위의 다항방정식이 근을 갖도록 해서 대수적으로 종료시켰기 때문이다. 결국, 유리수를 대수적으로 완성시키기 위해 A를 만드는데 사용된 도구가 복소수이고, 따라서 복소수는 유리수를 대수적으로 완료시키기 위해 도입되었음을 알 수 있다.

Chevallard(1992; 1998)가 말한 것처럼, ATD 안에서 수학을 하는 자연스러운 방법을 보여주기 위해서는, 이러한 과정들이 고등학교 교과서에 서술되어야 한다. 즉, 인류가 문화적으로 어떻게 고민했는가 하는 과정들이 교육과정에 드러나야 하며, 이를 구체화하기 위해 교과서에서는 그 내용을 깊게 다루어야 한다.

Ⅳ. 복소수를 지도하기 위해 교사가 가져야 하는 배경 지식

정경미(2010)에 따르면 교사가 어떤 수학적 지식을 가르치거나 수학을 하는 방법을 개선시키기 위해서는 수학적 배경 지식이 풍부해야 하며, 이를 학생들에게 가르칠 수 있도록 투영하고 정교화 해야 한다고 하였다. 그래서 복소수와 관련하여 교사가 가져야 하는 배경 지식을 생각해 보면 다음과 같다.

1. 복소수의 존재성 확인

F를 체라 하고, $p(x)\in F[x]$를 기약다항식이라 하면, $p(x)F[x]=\{p(x)k(x)\mid k(x)\in F[x]\}$는 $F[x]$의 이데알이 되고, $F[x]$가 단항 이데알 정역이므로, $p(x)F[x]$는 극대 데알이 된다. 따라서 상환 $K=F[x]/p(x)F[x]$는 체가 된다.

이때, $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$이라 하고, $f(x)+p(x)F[x]\in K$라 하면 $f(x)=p(x)g(x)+r(x)$ 이다(여기에서 $r(x)=0$ 혹은 $\deg r(x)<\deg p(x)=n$이다.).

따라서 $f(x)+p(x)F[x]$

$$= p(x)q(x)+r(x)+p(x)F[x]$$
$$= r(x)+p(x)F[x]$$

이다. 그러므로

$$K=\{b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+p(x)f(x)\mid b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\in F\}$$

이고,

$$\begin{aligned}&b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+p(x)F[x]\\&=(b_0+p(x)F[x])\\&\quad+(b_1+p(x)F[x])(x+p(x)F[x])\\&\quad+(b_2+p(x)F[x])(x^2+p(x)F[x])+\cdots\\&\quad+(b_{n-1}+p(x)F[x])(x^{n-1}+p(x)F[x])\\&=(b_0+p(x)F[x])\\&\quad+(b_1+p(x)F[x])(x+p(x)F[x])\\&\quad+(b_2+p(x)F[x])(x+p(x)F[x])^2+\cdots\\&\quad+(b_{n-1}+p(x)F[x])(x+p(x)F[x])^{n-1}\end{aligned}$$

이다.

이제 $x+p(x)F[x]=u$라 놓자.

$$\begin{aligned}&b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+p(x)F[x]\\&=(b_0+p(x)F[x])+(b_1+p(x)F[x])u\\&\quad+(b_2+p(x)F[x])u^2+\cdots\\&\quad+(b_{n-1}+p(x)F[x])u^{n-1}\end{aligned}$$

이다. 이때,

$$\begin{aligned}\theta: F &\rightarrow K\\ b &\mapsto b+p(x)F[x]\end{aligned}$$

라 하면, θ가 환 준동형사상이다.

왜냐하면

$$\begin{aligned}\theta(b+c)&=b+c+p(x)F[x]\\&=(b+p(x)F[x])+(c+p(x)F[x])\\&=\theta(b)+\theta(c)\\\theta(bc)&=bc+p(x)F[x]\\&=(b+p(x)F[x])(c+p(x)F[x])\\&=\theta(b)\theta(c)\end{aligned}$$

이기 때문이다. 또한 θ는 1-1 대응이다.

왜냐하면

$$b+p(x)F[x]=b_1+p(x)F[x]$$

이면 $b-b_1\in p(x)F[x]$이므로 $b-b_1$은 $p(x)$의 배수가 되는데, 여기에서 상수가 다항식의 배수가 되는 것은 그 상수가 0일 때이므로 $b-b_1=0$이 되어야 한다. 그러므로 $b=b_1$되고, θ는 1-1 대응이다.

위의 결과에 의해, F와 $\theta(F)$는 환 동형사상이다. 그래서 F가 $\theta(F)$를 통해 K 속에 매몰된다(embedding). 즉, b와 $\theta(b)=b+p(x)F[x]$는 동일시 할 수 있다.

따라서 K의 원소

$$\begin{aligned}&(b_0+p(x)F[x])+(b_1+p(x)F[x])u\\&+(b_2+p(x)F[x])u^2+\cdots\\&+(b_{n-1}+p(x)F[x])u^{n-1}\end{aligned}$$

를 $b_0+b_1u+b_2u^2+\cdots+b_{n-1}u^{n-1}$으로 표시할 수 있다. 결국,

$$K=\{b_0+b_1u+\cdots+b_{n-1}u^{n-1}\mid b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\in F\}$$

는 F의 확대체이고, 이때 $u=x+p(x)F[x]$는 $p(x)$의 근이 된다.

실제로 $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$로 두면,

$$\begin{aligned}p(u)&=a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}+u^n\\&=a_0+a_1(x+p(x)F[x])+a_2(x^2+p(x)F[x])\\&\quad+\cdots+a_{n-1}(x^{n-1}+p(x)F[x])+(x^n+p(x)F[x])\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n+p(x)F[x]\\&=p(x)+p(x)F[x]=0\end{aligned}$$

이다.

이때, $p(x)=x^2+1\in\mathbf{R}[x]$이면, x^2+1은 기약다항식이기 때문에 $K=\mathbf{R}[x]/(x^2+1)\mathbf{R}[x]$는 체가 되고, $u=x+(x^2+1)\mathbf{R}[x]\in K$라 하면,

$$K=\{a+bu\mid a, b\in\mathbf{R}\}$$

이고, $u^2+1=0$이다. 이 u를 복소수의 허수단위 i로 표시한다. 즉 $i^2=-1$이다.

지금까지의 내용을 토대로 교사는 복소수의 존재성을 확인하고, 이것을 고등학교의 현실에 맞게 학생들에게 도입할 방법을 생각해야 한다.

2. 가르칠 지식의 준비

이제 복소수의 존재성을 확인하였으므로, 이러한 교

사의 지식을 학생들에게 가르칠 수 있도록 투영하여야 한다.

이를 위해 첫째, 실수 $\mathbb{R}$이 복소수 $\mathbb{C}$로 매몰됨을 보이는 것이고, 이를 위하여.

$$\begin{array}{l} a+bu \rightarrow (a,\ b) \\ u \quad \mapsto (0,\ 1) \end{array}$$

가 1-1이고 onto임을 보인다.

이는 복소수를 좌표평면으로 도입해야 함을 의미한다. 이때 복소수를 $\mathbb{C}$라 하고, $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$로 대응하는 함수 f를

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ a+bu & \mapsto & (a,\ b) \\ c+du & \mapsto & (c,\ d) \end{array}$$

로 정의한다.

그러면

① $(a+bu)+(c+du)=(a+c)+(b+d)u$이므로 f에 의해 $(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$로 정의한다.

② $(a+b)(c+du)=ac+adu+bcu+bdu^2$
$=(ac-bd)+(ad+bc)u$

이므로, f에 의해 $(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$로 정의한다.

그러므로 $u \mapsto (0,\ 1)$에서

$(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)$가 된다.

둘째, 이제 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$로 대응하는 함수 θ를

$$\begin{array}{l} \theta\colon \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ \quad a \mapsto (a,0) \end{array}$$

와 같이 정의한다. 그러면 θ는 1-1이고 onto이다.

그리고

$$\theta(a+b)=\theta(a)+\theta(b)$$
$$\theta(ab)=\theta(a)\theta(b)$$

이므로 θ는 환 동형사상이다. 따라서 실수 a는 $\theta(a)=(a,0)$으로 볼 수 있다.

그러므로

$$\begin{aligned} (a,b) &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\ &= \theta(a)+\theta(b)u \end{aligned}$$

이다. 이때, $u^2=(-1,0)=\theta(-1)$이 된다.

또한 $(-1,0)$는 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 다음과 같이 해석될 수 있다. 곱셈에서의 항등원은 $(1,\ 0)$이고, 덧셈 아래에서 역수는 $(-1,\ 0)$이다.

이제 기호 $\mathbf{1}=(1,0)$이고, $\mathbf{1}$에 대한 덧셈의 역수는 $-\mathbf{1}=(-1,0)$이다.

따라서 지금까지 사용한 기호대로 u를 i로 표시하면, $i^2=u^2=(-1,\ 0)=-\mathbf{1}$이고 $a+bu=a+bi$이다.

이제 실수 $\mathbb{R}$은 복소수 $\mathbb{C}$안으로 매몰되는데, 이때 실수 a는 $(a,\ 0)=\theta(a)$로 대응된다.

교사가 배경 지식으로 알아야 할 내용은 학생들에게 모두 가르칠 필요는 없지만, 어떤 수학적 개념을 가르치고자 할 때에는 관련된 개념들 사이의 연결성을 구체화 시키는 것은 반드시 필요하다.

V. ATD에 근거한 복소수의 가르칠 지식에 대한 분석[9)]

김부윤 · 정경미(2007)에 따르면 Brousseau(1997)가 우려했던 극단적 교수현상을 극복할 수 있는 방법은 교사의 수학에 대한 올바른 신념과 수학적 지식에 대한 철저한 이해가 잠재해 있는 교수학적 변환 과정의 이해에 있다고 하였다.

교수와 학습이 서로 분리된 것이 아니고 교수학적 변환 과정(Chevallard, 1985)의 복잡한 과정에서 일어난다는 것을 가정할 때, 교수학적 변환과정의 4단계 - 학문적 수학적 지식, 가르칠 수학적 지식, 실제로 가르친 수학적 지식, 학습된 수학적 지식 - 와 연구자를 위해 기본적 이론 모델을 구성하고, 네 가지 대응하는 제도 - 수학 공동체, 교육 체계, 교실, 학습 공동체 - 들의 경험적 데이터로부터 정교화 되어지는 '참조 수학적 지식'을 받아들일 필요가 있다(Barbé et al., 2005; Laborde, 2007).

'참조 수학적 지식'에 대한 설명은 고등학교 교육과정에서 나타난 것처럼 복소수에 대한 '가르칠 수학적 지식'을 설명하기 위해 사용된다. 이때, '참조 수학적 지식'은 두 가지로 나누어지는데, 한 편은 복소수의 존재성에 대한 가정에서 출발하여 복소수의 계산을 어떻게 하는지에

---

9) 이 분석은 Barbé et. al(2005)에 근거한 것이다.

대한 문제와 관련한 실제적 과정(복소수의 계산 기술인 MO_1[10])과 다른 한 편은 복소수의 존재성에 대한 문제를 검토하는 이론화 과정(복소수에 대한 이론인 MO_2)이다.

'가르칠 수학적 지식'에 대한 분석을 위해 시중에 출판되어 있는 세 종류의 교과서(허 민 외 6인, 2008; 김수환 외 9인 2008; 이재학 외 6인, 2008)를 통하여 인간행동학의 요소에 맞춘 분석을 통하여, 현행 수학과 교육과정과 교과서가 안고 있는 문제점을 도출하였다.

(1) 문제의 유형[11]

T_1: 음수의 제곱근을 i를 사용하여 나타내어라.

T_2: 두 복소수가 서로 같을 조건을 구하여라.

T_2: 복소수의 사칙연산을 하여라.

T_4: 복소수의 항등원과 역원을 구하여라.

(2) 문제의 유형에 대한 기술

① T_1에서 사용된 기술은 음수의 제곱근의 정의에 기초한다.

(예) 다음 음수의 제곱근을 i를 사용해서 나타내어라.

$$\sqrt{-5}$$

(해) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$

② T_2, T_3, T_4는 문제 상황에 적합한 기술의 종합화에 기초한다.

(예1) 다음 등식이 성립하도록 실수 x, y의 값을 정하여라.

$$(x+y)+2i=-1+yi$$

(해) $x+y=-1$, $2=y$이므로 $x=-3$, $y=2$이다.

(예2) 다음을 $a+bi$(a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

$$\frac{1-2i}{3+i}$$

(해) $\dfrac{1-2i}{3+i}=\dfrac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$=\dfrac{3-3i-6i-2}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{9}{10}i$

(예3) $\alpha=1+3i$, $\beta=1-i$일 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값을 구하여라.

(해) $\alpha+\beta=2+2i$이고, $\alpha\beta=(1+3i)(1-i)$
$=1-i+3i+3=4+2i$이므로
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(4+2i)(2+2i)=4+12i$이다.

(3) 기술의 종합화

복소수를 계산하는데 사용되는 복소수의 성질을 생성하고, 설명하고, 정당화하는데 필요한 최소한의 기술의 종합화는 다음과 같다.

① $a, b, c, d \in \mathbf{R}$일 때,
$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$이 성립한다.

② $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)

③ 복소수의 연산 법칙

복소수 $\mathbb{C}$의 임의의 원소 z_1, z_2, z_3에 대하여

ⓐ 닫혀 있다 $z_1+z_2\in\mathbb{C}$, $z_1z_2\in\mathbb{C}$

ⓑ 교환법칙
$z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$

ⓒ 결합법칙
$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

ⓓ 분배법칙
$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$
$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$

④ 복소수의 항등원과 역원

임의의 복소수 $a+bi$에 대하여

ⓐ 항등원 덧셈에 대한 항등원: 0
곱셈에 대한 항등원: 1

ⓑ 역원
$a+bi$의 덧셈에 대한 역원: $-(a+bi)$
$a+bi$의 곱셈에 대한 역원:

10) 수학적 조직화(MO)의 종류는 기초적 MO, 국소적 MO, 광범위한 MO가 있다. 복소수에 대해 참조 MO는 광범위한 MO안에서 서로 다른 역할을 할 두 개의 국소적인 MO인 MO_1과 MO_2를 포함한다. 이에 대한 자세한 설명은 정경미(2010)를 참조할 수 있다.

11) 여기에 사용된 표기 T는 Chevallard(1992)에 의해 제안된 표기법이다.

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i \quad (단,\ a+bi\neq 0)$$

(4) 이론

문제, 기술, 기술의 종합화들을 발견하고 입증하고 생성하기 위해 개념들 사이의 특성들과 관계들의 틀을 제공하는 것이 이론의 역할이다. 복소수의 기술의 종합화에 대한 역할을 보증하는 이론으로는 해밀턴의 사원수, 대수학의 기본 정리, 크로네커 정리, 류빌의 정리, 드 무와브르 정리 등을 들 수 있다.

위의 내용들을 토대로 분석하면, 복소수를 계산하기 위해 소개된 대부분의 기술은 몇몇 대수적 조작과 기술의 종합화 등에 기초한다.

이러한 교육과정의 문제의 유형과 기술은 가르칠 수학적 지식의 실제적 과정을 구성하고, 주로 MO_1의 실제적 과정에 대응한다. 이러한 실제에 대응하는 기술의 종합화와 이론(이론화 과정)은 교육과정에서는 거의 나타나지 않으며, 만약 그것들이 나타난다면 학생들에 의해서가 아니라 오직 교사에 의해서만 나타난다.

또한 교과서에서 MO_2에 의해 남겨진 흔적은 MO_1에 의해 남겨진 것보다는 약하고, MO_2에서는 실제적 과정이 거의 나타나지 않는다. 반면 위의 실제를 표현하고 설명하고, 정당화하기 위해 제안된 기술의 종합화-이론은 MO_2에 나타나고, 복소수의 존재 문제에 초점을 맞춘다. MO_2는 학문적 지식을 사용하지만, 학생들의 실제에는 나타나지 않는다.

이러한 환경에서 교사는 교육과정에 의해 제시된 복소수의 정의를 동기화시키는 어려움에 직면할 것이다.

Ⅵ. ATD에 입각한 복소수의 교수 방법 제안12)

위에서 분석한 바와 같이, 지금의 교과서에는 복소수를 도입해야 하는 이유와 그것의 존재성에 대한 문제가 다루어지고 있지 않기 때문에, $i^2=-1$의 도입은 학생들에게 어려운 내용이 된다. 그래서 학생들이 복소수를 자연스럽게 받아들이기 위해서는 수학자들이 했던 방법을 보여주어야 한다.

직관적으로 보면, 복소수의 도입은 다음과 같이 순차적으로 이루어져야 한다.

$x+2=3$은 자연수 범위 내에서, $x+3=2$는 정수 내에서, $2x=3$은 유리수 내에서, $x^2=5$는 실수 내에서 다루어질 수 있다. 그러나 $x^2=-4$와 같은 경우는 위의 수 체계로는 다루어질 수 없음을 보여준다.

예를 들어, $x=\sqrt{2}$는 $x^2-2=0$를 만족하는 유리수 해가 아니지만, 수직선 위에 작도를 통해 나타낼 수 있어 이 수의 존재성을 학생들은 자연스럽게 받아들일 수 있었다. 그러나 $x^2+1=0$을 만족하는 x는 수직선 위에 나타낼 수 없음을 알 수 있다.

그렇다면 이러한 수, 즉 복소수가 존재함을 어떻게 보여줄 것인가? 결국, 복소수는 실수의 확장이라는 개념에서 다루어져야 하는데, 이제까지 실수는 수직선 위에 작도하거나 구간축소법 등을 이용하여 존재성을 다루어 왔지만, 복소수의 도입은 이와는 다른 방법으로 이루어져야 한다.

이제, ATD에 입각하여 실제로 고등학교 과정에서 복소수를 도입하는 방법에 대해 간단히 알아보자.

1. 실수 $\mathbb{R}$과 복소수 $\mathbb{C}$의 연관 관계

이제 왜 복소수를 도입해야 하는지에 대해 실수와 관련지어 생각해보자.

먼저, 복소수 (a,b)는 $(a,0)+(b,0)i$로 표현된다. 그리고 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$를 $\theta(a)=(a,0)$로 정의하면, θ는 1-1 대응이다. 또한 정의역 $\mathbb{R}$에서 덧셈의 연산 $+$과 곱셈의 연산 $\cdot$는 θ에 의해서 $\mathbb{C}$에서 $+$과 $\cdot$으로 옮겨간다. 그러므로 θ는 준동형사상이다. 따라서 a와 $\theta(a)=(a,0)$는 동일시 할 수 있다. 특히, $\theta(0)=(0,0)=0$은 $\mathbb{C}$에서 $+$ 아래서 항등원이고, $\theta(1)=(1,0)=1$는 $\mathbb{C}$에서 $\cdot$ 아래에서 항등원이다.

따라서 이제 복소수 (a,b)는

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)i=\theta(a)+\theta(b)i$$

12) 이 장에서 제안된 내용은 2009~2010년 박재걸 교수님의 세미나 팀에서 이루어진 내용을 근거로 한 것이다.

이고, 이것은 a와 $\theta(a)$, b와 $\theta(b)$를 동시하여 $a+bi$로 나타낼 수 있다.

특히 $i^2=-1=(-1,0)=\theta(-1)$이다. 그런데 여기에서 $\theta(-1)$은 -1로 동일시 할 수 있기 때문에, $i^2=-1$으로 표시해도 된다.

이제 실수에서 연산 +과 • 이 복소수에서 연산 + 과 • 으로 옮겨 갔으므로,

$$(a+bi)+(c+d)i=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

가 된다.

이제 복소수의 집합 $\mathbb{C}=\{(a,b)|a,b\in\mathbf{R}\}$에 다음과 같이 덧셈과 곱셈을 정의한다.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

이때, $(a,b)=(a,0)+(0,b)$
$=(a,0)+(b,0)(0,1)$이 된다.

위의 내용들을 정리해 보면, • 아래에서 항등원은 $(1,0)$이고, 이것은 $1=(1,0)$이라 표시한다. 그리고 1의 + 아래에서 역원은 $-1=(-1,0)$임을 알 수 있다. 이 때, $i=(0,1)$이라 하면 $i^2=-1$임을 알 수 있다.

2. $\mathbb{C}$는 체가 되는가?

이제 $\mathbb{C}$가 +과 • 아래에서 다음과 같은 조건들을 통해 실수나 유리수가 가지고 있는 수의 체계 - 즉, 체 - 가 되는지 알아볼 필요가 있다.

① $(\mathbb{C},+)$: 가환군
② $(\mathbb{C},\cdot)$: 반군
③ 좌 · 우 분배법칙
④ 임의의 $\alpha\in\mathbb{C}$에 대해 $\alpha\cdot 1=\alpha$
⑤$\alpha\neq 0$이고 $\alpha\in\mathbb{C}$이면 $\beta\in\mathbb{C}$이 존재하여 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$이다. 이는 분모의 실수화로서 설명된다.

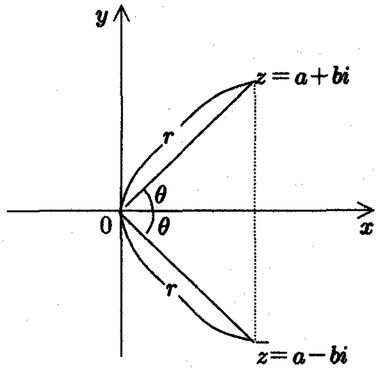
여기서 강조되어야 할 것은 • 아래에서 결합법칙과 좌 · 우 분배법칙이 고등학교 교과서에서 강조되어야 한다는 점이다. 또한 아주 중요하게 취급되어야 하는 것은 • 아래에서의 교환법칙이다. 왜냐하면 이것들은 복소수가 체라는 것을 강조하기 위해 필요하기 때문이다.

유리수로부터 해석학의 극한을 잡은 것이 실수이고, 실수에서는 대수적으로 안 되는 것 - 즉 $x^2+1=0$과 같은 것 - 들이 존재하는데, 그것이 바로 복소수 $\mathbb{C}$이다. 그래서 우리는 복소수 $\mathbb{C}$를 완성해야 한다. 이를 확인하기 위해 복소수를 기하학적으로 표현해 볼 필요가 있다.

16세기 초에 수학자들에게 이차방정식과 삼차방정식을 풀기 위하여 음수의 제곱근을 표현해야 할 필요가 생겼다. 그러나 그들은 음수의 제곱근에 대한 자세한 설명을 하지 못했다. 허수라는 용어는 그 수가 허구적이면서 비실재적인 것이라는 생각에서 유래되었다. 결국 이 수가 수학의 여러 영역에서 중요하게 사용된다는 사실이 알려진 19세기 초에 복소수의 연산이 가지는 타당성에 대한 의심을 씻어버릴 수 있는 연산에 대한 간단한 기하학적인 표현이 등장했다. 베셀(Wessel), 아르강(Argand), 가우스(Gauss) 등에 의하여 거의 동시에 만들어진 기하학적인 표현은 이러한 연산을 직관적으로 더욱 자연스럽게 보이도록 하였으며, 그 후로 수학과 물리학의 응용에서 복소수가 중요한 역할을 한다는 사실이 알려졌다 (Courant & Robbins, 2002).

우선 복소수 $z=a+bi$와 그에 대한 켤레복소수 $\bar{z}=a-bi$를 좌표평면 위에 나타내면 <그림 1>과 같이 나타낼 수 있다. 이때, 원점으로부터 z까지 거리를 r로 쓰기로 한다.

이제 $\mathbb{C}$가 구성되었다면, 가장 먼저 확인해야 할 것은 분배법칙과 결합법칙이 성립하는가라는 문제이다.



<그림 1> 복소수의 기하학적 표현

이를 확인하기 위해 다음 두 가지 즉,

① $(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$

② $(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

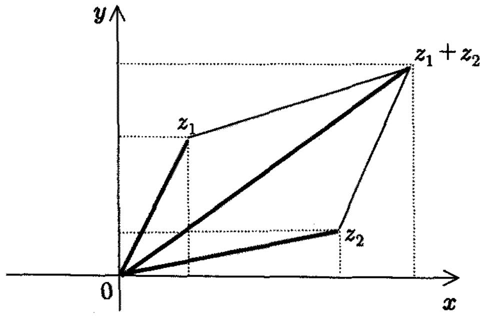
가 성립함을 보여야 한다.

①은 좌표평면을 이용하여 쉽게 보일 수 있으나, ②는 좌표평면 위에 어떻게 나타낼 것인가에 대한 문제가 생긴다.

먼저 ①을 덧셈의 정의에 의해서 두 복소수의 합을 좌표평면 위에 나타내어 보면 <그림 2>와 같다.

$z_1=a+bi,\ z_2=c+di$라고 할 때,

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$$
$$=(a+c)+(b+d)i$$



<그림 2> 복소수의 합에 대한 기하학적 표현

복소수의 합에 대한 기하학적인 표현은 여러 응용분야에서 중요한데, 그것으로부터 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 즉, 두 복소수의 합의 절대값은 각 복소수의 절대값의 합을 넘지 않는다는 중요한 사실을 알 수 있다.

②는 삼각함수를 이용하여 두 복소수의 곱을 좌표평면 위에에 나타낼 수 있는데, 이때, 필요한 것이 드 무아브르(De Moivre) 정리[13]이다.

이제 두 복소수가 $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$이라 할 때, $a=r_1\cos\theta_1,\ b=r_1\sin\theta_1,\ c=r_2\cos\theta_2, d=r_2\sin\theta_2$ 라 하자. 그러면

$(a,\ b)=(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$에 해당되는 복소수는

$$r_1\cos\theta_1+i(r_1\sin\theta_1),$$

$(c,\ d)=(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$에 해당되는 복소수는

$$r_2\cos\theta_2+i(r_2\sin\theta_2)$$

이다. 따라서

$$(a,\ b)(c,\ d)$$
$$=\{r_1\cos\theta_1+i(r_1\sin\theta_1)\}\{r_2\cos\theta_2+i(r_2\sin\theta_2)\}$$

는 사인과 코사인의 가법정리에 의해

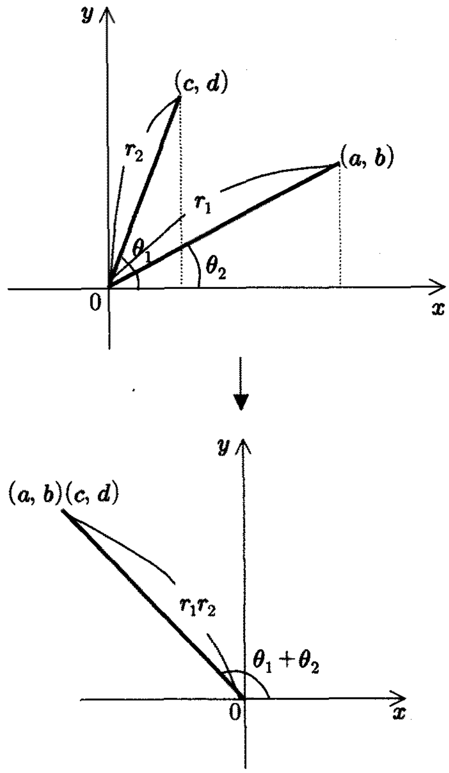
$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2),$$
$$\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2)$$

임을 이용하여

$$(a,\ b)(c,\ d)=r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)+i(\sin(\theta_1+\theta_2))$$

임을 알 수 있다.

이것은 절대값이 r_1r_2이고, 편각은 $\theta_1+\theta_2$인 복소수의 삼각함수 표현이다. 다시 말하면, 두 개의 복소수를 곱한다는 의미이다.



<그림 3> 두 복소수의 곱에 대한 기하학적 표현

13) 임의의 실수 θ와 양의 정수 n에 대하여 다음 등식이 성립한다. $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 즉, $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$인 정리이다.

이제 드 무아브르 정리를 이용하여 복소수의 곱을 <그림 3>과 같이 기하학적으로 표현할 수 있는데, 각 복소수의 절대값을 곱하고 편각은 더하면 된다는 것이다. 이것을 이용하면 분배법칙과 결합법칙은 명백해진다

드 무아브르 정리를 이용하여 복소수를 가지고 대수학적으로 평면의 점을 다루면, 복소수의 합과 곱을 쉽게 표현 할 수 있다.

결국 분배법칙, 결합법칙을 이용하여 복소수의 연산이실수의 연산으로부터 확대되는 있는 과정을 보여야 한다.

Ⅶ. 결 론

이상에서 살펴본 바와 같이 교사가 수학 내용을 교수하는데 있어서 가장 중요한 점은 인간 사고의 자연스러운 흐름을 따라, 수학이 발달되어 나왔다는 것을 보여주는 것이며 이에 대한 연구는 끊임없이 이어져 왔다.

특히 Freudenthal(1991)의 수학화에 대한 개념은 본고에서 소개한 Chevallard의 교수학의 인류학적 이론에 가장 가깝다.

수학의 전개를 Chevallard(1985; 1992; 1998)의 입장에서 보면 인류문화사와 일치한다. 즉, 수학의 출발은 자연(nature)에서 시작해야 한다는 것이고, 그것은 수학의 역사를 수의 체계를 통해서 들여다 볼 수 있다는 것이다.

자연수 $\mathbf{N}$은 페아노 공리에 의해 정의되었고, 자연수에서 동치류를 이용하여 정수 $\mathbf{Z}$를 구축하였다. 정수 $\mathbf{Z}$는 $+$ 아래에서 군이고, $+$와 $\cdot$에서 가환환이다. 여기에서 분수체를 만들었고, 그래서 $\mathbf{Z}$를 너무 크게 확대시키지 않고, 대수적으로 가장 작은 체를 만든 것이 유리수체이다.

이제 유리수체에서 비로소 방정식을 생각할 수 있게 되었다. 그런데 $\pi, e, \cdots$ 등의 초월수의 등장으로 모든 실수는 유리수 계수를 갖는 다항식의 근이 되지 않는다는 문제가 대두 되었고, 이를 통해 복소수가 완성되었다는 것을 알게 되었다.

결국 수학의 두 갈래 길인 수열의 수렴성을 통한 해석학과 방정식의 근을 이용한 대수학은 평행선을 달렸는데, 이들을 완료시키기 위해 사용된 것이 복소수라 할 수 있다. 즉, 유리수에서 실수로, 실수에서 복소수로 확대된 것이 다시 복소수에서 유리수로 되돌아왔다는 것을 알 수 있다.

이제까지 살펴본 내용에서 알 수 있듯이, 교사가 '수학을 가르친다.' 혹은 '수학을 한다.'는 것은 수학의 결과에 초점을 맞추는 것이 아니라, 수학이 발생된 곳에서 시작하여 수학자가 수학을 만들어내는 과정을 따라 수학을 하는 방법을 학생들에게 보여주는 것이다.

그러나 이러한 입장에서 보면 현실적으로 교사들은 너무도 취약한 조건에 놓여있다. 교사가 받아왔던 수학교육은 수학을 만드는 것이 아니라 만들어진 수학을 다루어왔고, 그것을 그대로 학생들에게 전달하고 있기 때문이다.

본 연구에서 주장하고자 했던 것은 만들어진 수학을 하는 것이 아니라, 수학을 재구성하여 학생들에게 보여주는 새로운 시각을 제시한 것이다.

또한 이런 시각에 맞추어서 수학과 교육과정이 개정되어야 하고, 교과서가 재구성되어야 한다는 것이다. 뿐만 아니라 '복소수'이외의 수학적 개념에 대해서, 앞으로 계속해서 '수학을 생각하는 자연스러운 방법'에 대한 연구가 꾸준히 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

김부윤 · 정경미 (2007). 수학 교실에서 나타나는 극단적 교수 현상에 대한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 21(3), 407-430.

김부윤 · 정경미 (2010). 인류학적 방법에 입각한 수열의 극한 교수에 대하여. 대한수학교육학회지 학교수학 11(4), 702-722.

김수환 · 최영기 · 이중권 · 윤오영 · 김경현 · 최현근 · 이향수 · 김용준 · 안미숙 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주) 교학사.

이재학 · 정상권 · 박혜숙 · 홍진곤 · 박부성 · 김정배 · 김상훈 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주) 성출판사.

정경미 (2010). 수학교수학의 인류학적 이론에 입각한 수학 교수 방법. 부산대학교 대학원 박사학위논문.

허민 · 박문환 · 박진호 · 김용식 · 한용익 · 김창일 · 정상일 (2008). 고등학교 수학. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J.

(2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics,* **59**, 235 -268.

Bergsten, C., & Grevholm, B. (2005). The didactic divide and educational change. *Paper Proposal for ICME Study* 15.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (1999). The role of the algebraisation in the study of a mathematical organisation. *European Research in Mathematics Education II*: Group 6.

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). Science or Magic? The Use of Models and Theories in Didactics of Mathematics, In Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, *San Feliu de Guixols*, 1-10.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situation in Mathematics. Didactique des mathèmatiques, 1970-1990,* edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. (eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage Educations.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une apporoche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **12(1)**, 73-112.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques: L'approche anthropologique.* http//yves, Chevallard. free. fr/spip/spip/index.php

Chevallard, Y., & Ladage, C. (2008). E-learning as a touchstone for didactic theory, and conversely. *Journal of e-Learning and Knowledge Society,* **4(2)**, 163-171.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). 수학이란 무엇인가. (박평우 · 김운규 · 정광택 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1996년 출판)

Laborde, C. (2007). Toward theoretical foundations of mathematics education. *Mathematics Education,* **39**, 137-144

Freudenthal. H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht; Kluwer Academic Pub.

García, F. J., & Ruiz Higueras, L. (2006). Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity: Variation Systems Modelling in Secondary Education. *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics,* **38(3)**, 226-246.

Miguel, Maria Inez R. (2006). Teaching and Learning of the Poisson's Model: A Model Building Experience. *Proceeding of the 7th International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS-7)*, 1-4

The algebraic completion of the rational numbers based on ATD

Kim, Boo Yoon
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

Chung, Gyeong Mee
107 Dong 501 Ho Samsung APT. Jwa-Dong Haeunda-Gu, Busan Korea
E-mail : jgmbada@hanmir.com

We can say that the history of mathematics is the history on the development of the number system. The number starts from Natural number and is constructed to Integer number and Rational number. The Rational number is not the complete number analytically so that Real number is completed by the idea of the nested interval method. Real number is completed analytically, however, is not by algebra, so the algebraically completed type of the rational number, through the way that similar to the process of completing real number, is Complex number.

The purpose of this study is to show the most appropriate way for the development of the human being thinking about the teaching and leaning of Complex number. To do this, We have to consider the proof of the existence of Complex number, the background of the introduction of Complex number and the background knowledge that the teachers to teach Complex number should have.

Also, this study analyzes the knowledge to be taught of Complex number based on the anthropological theory of didactics and finally presents the teaching method of Complex number based on this theory.

* ZDM Classification : C79
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : complex number, the anthropological theory of the didactics, praxeology, mathematical organization