韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 2호, 2011. 5. 473-495

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 2, May. 2011. 473-495

수학적 연결성을 고려한 수 체계의 지도에 관한 연구

정 영 우 (부산대학교)
김 부 윤 (부산대학교)
표 성 수 (경북대학교)

중등학교 전반에 걸쳐 항등원, 역원, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 다루어지고 있다. 이는 대수적 구조의 조건으로 이들의 성립 여부에 따라 군, 환, 체로 결정되게 된다. 그런데 이들 대수적 구조의 조건들은 어떤 의미를 가지며, 이들 조건들이 만족됨에 따라 정해지는 대수적 구조는 어떤 의미를 가지는지 등의 이들 조건들의 의의에 대한 지도는 이루어지고 있지 않다. 그로인해 학생들은 이들 조건을 대상 집합의 특성이라는 결과적 측면으로 받아들이고 있다.
본 연구에서는 수 체계와 다항방정식의 해법과의 연결성을 고려하여 이러한 조건들과 대수적 구조의 의의를 교수학적으로 조직화하기로 한다. 교수학적 조직화란 학습자의 자연스러운 사고활동을 위한 모델을 구성하는 것으로 역사적 발생과 함께 현대수학의 관점을 고려하여 수학적 개념이 필연성과 개연성을 가진 산물임을 경험시키도록 흐름을 구성하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 다항방정식의 해법을 보장하기 위한 수학적 개념으로 대수적 구조를 파악하고, 수 체계의 의미를 지도하는 영재교육을 위한 프로그램을 개발하였다. 그리고 이를 교수실험 하여 그 효용성을 알아보았다.

Ⅰ. 서 론

현재 중등교육과정에서 다루고 있는 수의 확장 순서는 역사적으로 본 수 개념의 발생과 확장 과정과는 상당히 다르다. 중등교육과정에서는 자연수(양의 정수) → 음의 정수 → 유리수 → 무리수(실수) → 복소수의 순서로 지도되고 있다. 물론 초등학교에서 양의 유리수라 할 수 있는 분수를 지도하고 있지만, 이는 본격적인 수의 확장이라는 흐름에서 도입된 것이라고는 할 수 없다.

반면 역사적 순서를 자연수 → 분수(유리수) → 무리수 → 음수 → 복소수로 보는 시각(片野善一郎, 1992)도 있지만, 발생에 초점을 두느냐 또는 수로서 인식되고 수학적으로 구명된 시점에 초점을 두느냐에 따라 다를 수 있다.

자연수와 분수(양의 유리수)는 생활 속의 양(量)과 관련한 개념으로 비교적 자연스러운 발생적 개념이라 할 수 있다. 그러나 무리수나 음수는 그 존재성이나 계산을 위한 필요성에도 불구하고 수로

* 접수일(2011년 3월 4일), 심사(수정)일(2011년 5월 2일), 게재확정일자(2011년 5월 6일)
* ZDM분류 : D48
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 군, 환, 체, 방정식, 수 체계, 교수학적 조직화

서 인식되기까지는 긴 시간이 필요했다. 무리수는 피타고라스학파에 의해 $\sqrt{2}$가 발견되면서 나타났으나, 그들은 이를 대수적으로는 다루지 못하고 기하학적으로 다루었다. 무리수는 극한과 집합 그리고 함수 등의 개념이 정립되면서 대수적인 수로 인식되게 된다.[1] 또한 음수는 중국의 '구장산술'에 처음으로 나타나는데, 계산을 위한 수 개념으로 음수를 인식하게 된 것은 16세기 데카르트가 수직선 위에 이들을 시각화함으로써 가능해졌다(片野善一郎, 1992).

그렇다면 역사적 발생순서가 아닌 순서로 교육과정에서 수를 확장하는 근거나 배경은 무엇일까? 이는 고대수학으로부터 축적된 수학적 사실들을 함수나 극한의 개념과 함께 집합을 수단으로 구조를 논하려 한 현대수학의 정신에서 답을 얻을 수 있다. 수의 확장 방법으로 형식 불역의 원리를 생각할 수 있는데, 이전의 구조를 그대로 보존하면서 더 큰 구조로 확장한다는 이 원리는 비단 수의 확장뿐만 아니라 수학의 근저를 이루는 개념이다. 그러나 이 원리를 바탕으로 한 교육과정 및 교과서를 보면 보존할 구조에 초점을 둔 본질적 논의보다는 수 표현에 의한 확장을 한 후, 그 수 집합의 특성으로 구조를 다루고 있음을 알 수 있다. 즉, 보존해야 할 성질이 무엇인지, 이러한 수학적 개념이 정의되게 된 배경이 무엇인지를 이해를 할 수 있는 내용의 흐름으로 다루어지고 있지 않다.

이러한 수의 확장 과정은 동일한 형식 불역의 원리에 따른 지수법칙의 확장과정과는 사뭇 다르다. 그러므로 수 체계에 대한 본질적 이해와 이를 정의하게 되는 수학적 배경을 보존할 구조에 바탕을 두고 본질적으로 다룰 필요가 있다.

본 연구에서는 이러한 내용을 바탕으로 영재교육 대상 학생들을 위한 수 체계와 방정식의 해법이란 개념을 연결성을 고려하여 지도하는 교재를 개발하고, 이를 교수실험 하여 그 효용성을 분석하고, 개선 및 활용 방안을 모색한다. 나아가 일반학교수학에서의 지도 방법을 제안한다.

Ⅱ. 교수실험의 실제

1. 이론적 배경

수 체계와 방정식의 해법과의 관련성을 중심으로 살펴본 본 연구는 수학내적연결성 측면에서 수 체계에 대한 본질적 이해와 그 탄생에 대한 배경지식을 다루고, 이것을 조직화하여 교재화 시키고 있다. 여기에서는 이와 관련된 이론적 배경을 살펴본다.

① 수학적 연결성

1989년 NCTM의 '수학교육과정과 평가의 새로운 방향'에서는 유치원부터 고등학교까지를 세 개의 범주로 나누고, 전 학년에 대하여 수학적 연결성에 대한 규준을 제시했는데, 그 내용은 다음과 같다.

1) 이것에 관한 자세한 내용은 정영우(2010)를 참고하시오.

<표 1> 1989년 NCTM의 수학적 연결성에 대한 규준(구광조 외, 2004)

K-4	(연결 짓는 기회 제공) · **개념적 지식과 절차적 지식을 관련지을 수 있어야 한다.** · 다양한 개념이나 절차의 표상을 서로 관련지을 수 있어야 한다. · **수학에서 다른 내용들 사이의 관계를 인식할 수 있어야 한다.** · 다른 교육과정 영역에서 수학을 사용할 수 있어야 한다. · 매일의 일상생활에 수학을 사용할 수 있어야 한다.
5-8	(수학적 연결성에 대한 탐구) · **수학을 통합된 전체로 볼 수 있어야 한다.** · 그래픽, 수적, 물리적, 대수적, 언어적 모델 또는 표상을 통해 문제를 탐구하고 결과를 기술할 수 있어야 한다. · **수학적 아이디어를 이해하기 위해 다른 수학적 아이디어를 사용할 수 있어야 한다.** · 미술, 음악, 심리학, 과학 및 경제학과 같은 타 학문 분야의 문제를 해결하기 위해 수학적 사고와 모델을 적용할 수 있어야 한다. · **문화와 사회에서 수학의 역할을 평가할 수 있어야 한다.**
8-12	(다양한 수학적 내용 사이의 연결과 상호작용과 각 내용의 응용) · 같은 개념의 동치표상을 인식할 수 있어야 한다. · 한 표상에서의 절차를 동치표상에서의 절차와 연결시킬 수 있어야 한다. · **수학적 내용 사이의 연결성을 이용하고 음미할 수 있어야 한다.** · 수학과 다른 학문 사이의 연결성을 이용하고 음미할 수 있어야 한다.

또한 2000년 NCTM의 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서는 유아원·유치원부터 12학년까지의 학교수학을 위한 규준 가운데 '연결성'규준을 제시하고, 이를 K-2학년, 3-5학년, 6-8학년, 9-12학년으로 범주화하여 보다 구체적인 내용과 예, 그리고 교사의 역할을 설명하고 있다. 그 내용은 다음과 같다.

<표 2> 2000년 NCTM의 수학적 연결성에 대한 규준(류희찬 외, 2008)

K 12학년 연결성 규준	· **수학적 아이디어 간의 연결성을 인식하고 활용할 수 있다.** · **수학적 아이디어가 서로 어떻게 연결되어 있는지 이해하고, 각각의 아이디어에 기초하여 일관된 전체를 산출할 수 있다.** · 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용할 수 있다.
K-2학년	학생들이 경험을 통해 학습한 직관적, 비형식적 수학과 학생들이 학교에서 학습한 수학 사이의 연결성이다.
3-5학년	수학적 아이디어의 연결성은 새로운 아이디어를 이전에 숙고해 보았던 아이디어와 결합시키는 것이 포함된다. 아이디어가 얼마나 잘 연결되는가에 따라 그들의 이해력과 새로운 아이디어를 관리하는 능력이 달라진다.

6-8학년	수학적으로 사고한다는 의미에는 연결성을 찾고, 수학적으로 이해하기 위하여 연결성을 구축하는 것이 포함된다. 연결성이 없으면 학생들은 너무 많은 고립된 개념과 기능을 배우고 암기해야 한다. 연결성이 갖추어지면 선행지식 위에 새로운 이해를 구축할 수 있다.
9-12학년	·서로 다른 영역의 수학 사이의 연결성을 이해할 수 있을 때, 수학을 통합된 전체로 보게 된다. 이미 알고 있는 수학 개념을 토대로 새로운 수학 개념을 구성할 때 학생들은 다양한 수학 영역 사이의 연결성을 더 깊이 인식하게 된다. ·다른 학문 분야 특히 자연과 과학, 사회과학과의 연결성을 이해하는 것은 수학적 힘의 신장에 도움이 된다.

또한 House와 Hoxford(1995)는 수학적 연결성의 유형을 수학 자체 내에서의 연결 및 활용, 수학과 다른 교과와의 연결, 일상생활 및 직업세계와의 연결 측면에서 설명하였다(방정숙·김재화(2006) 재인용).

이상의 내용을 요약하면, 수학적 연결성이란 두 가지 관점으로 분류할 수 있다. 하나는 수학적 아이디어들 사이의 연결성이며, 하나는 수학과 다른 분야와의 연결성이 그것인데, 전자를 '수학내적연결성', 후자를 '수학외적연결성'이라 한다.

또한 권성룡 외(2006)는 이해력을 증진시키기 위하여 (a) 학생의 기존(비형식적) 지식과 상징적 지식 사이, (b) 개념과 절차 사이, (c) 다양한 표현들이나 모델들 사이, (d) 여러 수학적 주제 사이, (e) 다른 내용 영역 및 일상생활에의 응용과 수학 사이의 연결성을 육성하는데 초점을 두어야 한다고 하였다.

이처럼 수학내적연결성은 수학적 아이디어의 본질적 이해와 수학적 아이디어의 일관된 전체를 산출하기 위해 강조되어야 할 내용이다.

② 교수학적 조직화

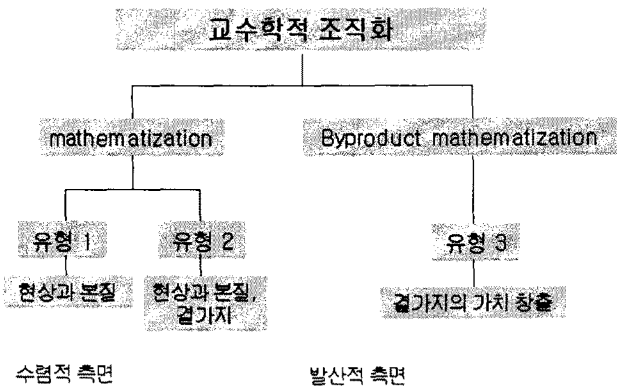
수학적 개념의 형성 과정을 분석해 보면, 크게 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 수학적 개념을 포함하는 현상이 있어 그것을 수학적 표현으로 형식화 하는 것이다. 이 경우는 이미 존재하고 있는 비수학적인 형태를 수학적인 형태로 규정짓는 과정과 그 형식화 된 결과물이 지도 대상이 된다. 학교수학에서 프로이덴탈의 수학화 또는 수학적 활동 및 경험과 관련하여 많이 지도되는 형태이기도 하다. 이 경우는 '현상'과 '본질'이라는 요소가 수학적 활동의 소재가 된다.

또 하나는 특정의 '목적'이 있어 이것을 구명하기 위하여 새로운 수학적 개념을 만들어내는 것이다. 이 경우는 그러한 목적이 무엇인지가 중요하며, 이 목적을 달성하기 위하여 어떠한 수학적 활동을 하고 그 결과로 어떤 수학적 개념이 구명되었는가가 중요하다. 이는 특히 현대수학에서 이미 존재해 왔던 수학적 개념들에 구조를 주거나 그러한 개념의 예를 구성하는 경우에서 찾아 볼 수 있다. 이러한 '목적성'에 의해, 현상에 의한 본질뿐만 아니라 그 본질을 구명하기 위한 '보조적 개념'들이 정

의되게 된다. 즉, '현상'과 '본질'뿐 아니라 '보조적 개념'이 수학적 활동의 소재가 된다.

주로 전자는 고전수학의 경우, 후자는 현대수학의 경우 그 예를 많이 찾아 볼 수 있다. 이처럼 수학적 개념의 형성에는 존재하는 사실을 수학적으로 형식화하는 것뿐만 아니라, 특정의 목적을 위하여 수학적 개념을 만들어내는 경우도 많은데, 학교수학에서는 소홀히 다루고 있는 후자도 강조되어야 한다. 왜냐하면 수학은 인간사고 활동의 결과물이라 흔히 말하여 지는데, 이러한 문화적 의의의 바탕에는 이러한 수학자들의 목적 있는 활동이 포함되어 있기 때문이다.

정영우(2010)는 현상과 본질이라는 두 요소로 설명된 프로이덴탈의 수학화의 한계를 지적하고 '보조적 개념'까지 고려한 교수학적 조직화(didactical organization)를 교수학습이론으로 제안하고, '수학화(mathematization)'와 '곁가지의 수학화(byproduct mathematization)'를 그 방법론으로 제시하였다. 이때의 수학화Mathematization은 프로이덴탈의 수학화Mathematising를 수용하면서, 그가 주장한 현상을 수학적 개념을 포함하는 현상에 한정하지 않고 수학적 개념을 구명하게 되는 '목적성'까지도 현상으로 보고, 이로부터 수학적 개념을 형성해 가는 것을 학생들에게 경험시킬 것을 주장하였다. 그리고 보조적 개념들을 '곁가지(byproduct)'라 정의하였는데, 이것은 현대수학의 관점까지도 학생들이 인식하고 경험하게 하는 것을 목적으로 하고 있다.



<그림 1> 교수학적 조직화

이러한 교수학적 조직화의 모델로 김부윤・정영우(2010 a ; 2010 b ; 2010 c ; 2010 d)는 삼각함수, 삼각함수의 연속성, 삼각함수 공식, 함수의 합성에 대한 모델을 개발한 바 있다.

2. 연구 방법과 대상

수 체계라 함은 군, 환, 체에 관한 내용으로 중등교육과정에서 공식적인 용어로 사용되고 있지는 않지만, 그 요소인 항등원, 역원, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙에 관한 내용들은 중등교육과정 전반에서 다루어지고 있다. 그러나 교육과정에서도 교과서에서도 이것들을 배우는 의의 및 이들을 생각

하게 된 목적이나 배경은 지도되지 않을 뿐만 아니라, 이러한 것들이 성립되었을 때 그 대상이 가지는 수학적 의의 역시 지도되고 있지 않다.

이와 관련한 개념인 군, 환, 체에 대해서는 대학에서 다루어지며 영재 교육을 위한 소재로 군과 일차다항방정식과의 관계가 다루어지거나 단순히 군이란 이러한 것이다 라는 학문적 내용 그대로가 지도되고 있는 경우가 많다.

본 연구에서는 방정식의 해법과 관련하여 이들 개념이 구명되었음을 경험하게 하고, 그 결과물로 군, 환, 체를 정의하게 하는 영재교육을 위한 프로그램을 개발하였다. 이러한 내용은 이들 대수적 구조가 가지는 의의 및 다른 수학적 개념으로의 심화내용을 경험하는 기초가 된다. 또한 이렇게 구명된 대수적 구조의 조건들로 수 체계를 정의하게 되는 순환구조를 이해하게 한다. 영재교육대상자로 대상을 선정한 것은 중등교육과정에서 학문적 용어를 사용하고 있지 않기 때문이다. 대학에서 다루는 군, 환, 체가 가지는 수학적 의의와 그 개념들의 탄생배경과 목적에 대한 것을 중학생들에게도 의미 있게 지도하는 것이 가능할까에 대한 시사점을 얻기 위해, 대학부설 과학영재교육원에 재학 중인 중학생을 대상으로 하는 프로그램을 개발하여 수업을 실시하였다. 다만, 이 프로그램을 일반 중학생에게로 일반화시킬 경우 약간의 제한점이 있을 것으로 생각된다. 이 경우는 군, 환, 체의 정의를 직접 다루기보다는 각 조건의 의의를 이해하는 수준으로 재구성할 필요가 있다.

우선적으로 전체적인 프로그램을 운용해 보기위해 대구 소재 대학 영재교육원에 소속된 중학교 2학년 학생 13명을 대상으로 개발된 프로그램에 따라 수업을 하였다. 그 과정에서 수업을 녹음하고 수업 마지막에 '수업에 대한 설문'을 하여 수업의 효용성을 위한 자료를 얻었다. 그리고 수업을 하면서 학생들의 반응을 관찰한 내용을 부가적으로 고려하였다. 이후 동 영재교육원 학생 13명과 부산 소재 대학 영재교육원 학생 18명에게도 같은 수업을 하였으며 유사한 반응을 얻었다. 다음 절에서는 첫 번째 수업의 내용을 제시한다.

3. 교수실험의 전개[2)]

<활동목표 제시>

미지수가 하나인 다항방정식을 해결하기 위해 필요한 수학 개념을 만들자.

<도입과 문제제기>

① 왜 수가 필요한가?

학생들에게 수의 필요성과 지금과 같이 수 집합과 수 체계를 다루게 된 과정을 인식하게 하는 도입단계로, 수 체계와 방정식의 해법과의 연결성을 인식시킨다.

2) 본 절에서 논의되는 수학적 개념의 정의와 이론적 내용은 김응태·박승안(2003), B. Baumslag & B. Chandler(1968), L. R. Lieber(1956), 草場公邦(2010), 浜稲雄譯(2006)에 기초한다.

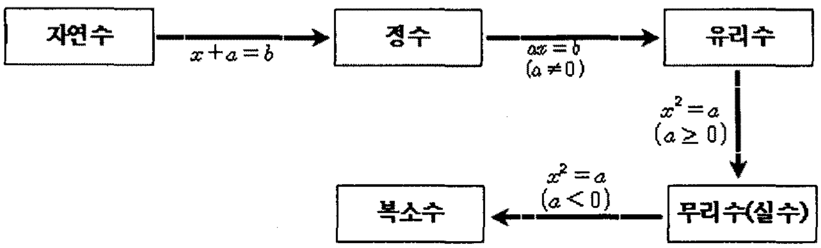
교 사: 왜 수가 필요합니까? 우리는 수를 가지고 뭘 해요?
학생 1: 계산.
교 사: 계산. 또? 수를 가지고 뭘 해요? 응.
학생 2: 세기
교 사: 하나, 둘, 셋, 넷 센다. 그쵸. 또.
학생 3: 측정.
교 사: 측정.
학생 4: 계측.
교 사: 측정. 계측. 응. 양을 잰다든지 길이를 잰다든지 잽니다.

수가 측정과 계산을 위해 필요하다는 학생들의 응답에서 학생들은 계산을 위해 규칙성이 필요하고, 우리는 이런 규칙성으로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙연산 - 즉, 중등수학에서는 연산이란 용어로 고등학교에서 다루고 있지만 그 예로는 사칙연산만을 다루고 있다. - 을 배웠다는 것을 알고 있었다. 본 연구에서는 수 체계를 구명해야할 이유, 그리고 그것의 발전 과정을 설명할 때 일반연산에 대해 간단히 설명하지만 지나친 강조는 하지 않는다.

이어서 수의 역사적 발전순서에 대해 설명하고, 학생들이 배워온 수의 확장 순서와 차이가 있음을 인식하게 한다. 이것은 음수나 무리수를 구명하는데 오랜 시간이 걸렸기 때문이며, 이들을 수학적으로 구명한 후에 이들을 정리하고 분류하고, 그 특성을 밝히려는 종합적인 노력으로 이어지게 된다는 사실, 그리고 정리를 위한 여러 분류 기준 가운데 수만큼이나 인류의 수학적 활동의 큰 줄기였던 방정식의 해법을 그 기준으로 선택하였음을 설명한다. 이는 인간이 무엇인가를 하려고 할 때, 자신이 알고 있거나 가지고 있는 것을 이용하려고 하는 노력이 우선됨을 인식하도록 하기 위한 것이다. 그리고 이러한 과정에서 '수끼리의 계산'이 '식에서의 계산'으로 확장됨을 알게 된다.

② 다항방정식의 해를 구하기 위한 수의 범위를 알아보자.

다음과 같은 도식을 만들어 나가면서 수를 확장해 가고, 그 때 방정식의 해 x를 포함하는 수 집합을 적게 하였다. 강의에서는 예를 먼저 들고, 일반형을 다루었다. 연구 대상이 영재교육원 심화반 학생이므로 이미 고등학교 수학을 학습한 상태여서 별도의 설명 없이 복소수까지 기입하였다.



<그림 2> 방정식과 수 집합

③ 문제제기

교 사: 그런데 이렇게 방정식과 관련하여 수 집합을 확장해 가려면 우선 되어야 하는 것이 있는데 그게 뭘까요?
학생들: …….

실제로 이처럼 방정식의 해 x를 포함하는 수 집합을 만들기 위해서는 '방정식을 푼다.'는 활동이 선행되어야 한다. 즉, 방정식을 풀 수 있어야 x를 구할 수 있고, 그 x에 의해 수 집합이 확장되기 때문이다. 이 질문에는 학생들이 답을 하지 못하였으며, 교사의 설명을 들은 후 수와 방정식의 해법과의 관련성에 대해서 이해를 했다.

<전개 ; 다항방정식에는 어떤 것들이 있는지 생각해 보고 이들을 풀어보자.>

이후 활동은 학생들에게 식을 구성하고 비어있는 곳에 적절한 내용을 적게 한 후, 학생이 칠판에 나와 그 내용을 적게 하는 과정으로 진행하였으며, 칠판에 적힌 내용을 수학적 언어로 형식화하는 것은 교사 주도적으로 하였다.

단계 1 일차방정식

<유형 1> 일차방정식 $x+a=b$형

학생들에게 수끼리의 계산규칙만을 알고 있는 상태임을 전제로 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계에 대해 언급하였다. 그리고 가장 간단한 일차다항방정식의 유형과 구체적인 예를 정하게 하여 풀이와 필요한 사실을 일상어로 적게 하였다.

교 사: 일차방정식에서 제일 먼저 생각할 수 있는 식의 모양은 어떤게 있어요?
학생들: $ax+b=0$.
교 사: $ax+b=0$. 또?
학생들: …….
교 사: 우리가 무언가를 찾아낼 때는 구조를 단순화 시키는게 중요해요. 그럼 가장 단순화 시킨 일차방정식은 어떤거에요?
학생 1: $\frac{1}{x}$.
교 사: $\frac{1}{x}$? $\frac{1}{x}$은 일차방정식인가요?

학생들은 가장 간단한 일차방정식의 유형으로 $ax+b=0$를 답했으며, 이런 현상은 다음 단계에서도 몇 번 반복되고 있다. 이것은 사용되는 연산의 종류와 개수를 고려하기보다는 이전까지의 학습

에서 다룬 일반형의 경험에 의한 습관적인 응답으로 보인다. '더 간단한' 이란 교사의 요구에

학생 1: $x=a$요. 학생들: (웃음)

라 답한 학생도 있었다. 교사는 이것을 인정해 주고 단지 우리의 목적이 계산도 고려하는 것이므로 좀 더 적절한 것을 찾아보자고 하였다. 그리하여 $x+a=b$형으로 $x+2=5$를 계산하기로 하였다. 학생들은 '이항'을 사용해 쉽게 x의 값을 구했으며, 이에 교사는 이항은 수 체계에서는 편리한 방법이지만, 앞으로 우리는 수 체계를 확장한 다른 대수적 구조도 접할 것이므로 이항을 보장받기 위한 더 기본적인 방법을 찾아야 한다고 설명하였다. 이어서 학생에게 칠판으로 나와 풀이를 적게 하였으며, 생략된 부분은 질문을 통해 학생들에게 첨가하도록 하여 다음의 모범답안을 만들었다.

풀이)	필요한 사실)
$x+2=5$	
$(x+2)+(-2)=5+(-2)$	양변에 (-2)를 더한다.
$x+(2+(-2))=5-2$	계산 순서를 바꾼다.
$x+0=3$	$2+(-2)=0$이다.
$x=3$	$x+0=x$이다.

구체적인 예를 계산한 후, 수학적 용어로 답변한 것을 일상어로 적게 하는 활동을 추가하기도 하였다. 이는 수학적 용어 이전에 그 용어가 가지는 의미를 이해하는 것이 구조를 구명할 때, 중요하기 때문이다. 그리고 양변에 더한 (-2)란 어떤 수인지를 질문하여 $2+(-2)=0$과 관련지었다.

또 다른 일차방정식을 계산해 보자는 교사의 요구에 대부분의 학생들은 다시금 $ax+b=0$를 답했으나, $2+x=5$를 답하는 학생도 있었다.

학생 1: $2+x=5$요. 학생 2: 그건 같은 건데? 교 사: 왜 같지요?

실제로 식의 계산에서 약속한 것은 아무것도 없다. 단지 식의 계산이 되도록 이미 알고 있는 수의 계산 규칙을 빌려와 식의 계산이 된다는 가정 아래 논의를 이어가고 있다. 이 단계에서 학생들은 자신들이 이미 가지고 있던 수학적 사실들을 버리고, 수학자들이 했던 것처럼 무엇인가를 만들려고 하고 있다는 것을 어렴풋이 느끼는 듯했다.

$x+2=5$와 $2+x=5$를 계산할 때, 필요한 사실을 비교하면서 구조적으로 같음을 인식하였는데, 이들을 같은 것으로 하면 - 수학적으로는 '동치'인 식으로 하면 - 계산의 편리성과 효율성을 높

일 수 있다는 것에 동의하고, 이어서 '계산의 편리를 위한 첫 번째 약속'을 하였다.

> 양변에 더해지는 -2에 대하여
>
> $$2+(-2)=(-2)+2=0$$
>
> 이고, 이 값 0에 대하여
>
> $$x+0=0+x$$
>
> 가 성립한다. 그리고 $x+a=a+x$가 성립한다.

이것으로 '수와 문자의 덧셈에 대한 교환'이라는 계산규칙을 정의하였다. 이 예들에서의 경험을 바탕으로 $x+a=b$로 일반화하였다. 그리고 학생들이 적은 일상어 표현인 '필요한 사실'을 결합법칙, 항등원, 역원의 학문적 용어로 정의하고, 이어서 첫 번째 정의를 도입하였다.

> $x+a=b$꼴의 일차방정식을 풀기 위해서는
> ① 결합법칙이 성립하고
> ② 항등원 0이 존재하여 $x+0=0+x=x$이다.
> ③ a의 역원 $(-a)$가 존재하여 다음을 만족한다 :
>
> $$a+(-a)=(-a)+a=0$$
>
> 그리고 이 식은 적어도 정수 범위에서 계산하여 해를 구할 수 있으며, 그리고 이때 연산은 덧셈이다. 따라서 정수의 집합에서는 덧셈으로만 이루어진 $x+a=b$꼴의 일차방정식을 풀 수 있다.
> 이렇게 수 집합과 방정식을 풀 수 있는 구조를 연산과 관련하여 정의한 것을 수 체계라 한다. 위와 같은 수 체계를 '군(group)'이라 한다.

수 체계의 요소를 포함하지만 일상적인 문장으로 표현하게 하는데 중점을 두었으므로 이 단계에서는 군의 엄밀한 정의와 표현을 강조하지는 않았다. 학문적 정의는 별도의 참고자료로 배부하였다.

<유형 2> 일차방정식 $ax=b,\ a\neq 0$형

또 다른 일차방정식을 물었을 때, 다시금 $ax+b=0$을 답하는 학생도 있었으며, 곧 $ax=b$를 답하는 학생도 있었다. 모두 이것에 수긍하며 $2x=3$을 계산하기로 하였다. 그러나 $a\neq 0$를 말하는 학생은 없었다. <유형 1>의 과정이 반복되는 단계에서 학생들은 반복되는 계산에 지루해하는 태도를 보였다. 교사는 예전의 수학자들이 얼마나 지루한 작업을 묵묵히 수행하였는지를 언급하며, "요즘

은 계산기 등 편리한 도구가 있어 다행이다." 라든지 "비약 없이 모든 경우를 끊임없이 꼼꼼하게 계산한 그들의 노고를 생각해 보자."는 등의 이야기로 학생들을 격려하였다.

마지막으로 <유형 1>과 <유형 2>를 비교시킴으로써 '구조가 같다.'는 사실과 '연산이 다름으로 인해 생겨나는 차이점'에 대해 고찰하게 하였다.

☞ 유형 1과 유형 2를 비교하여 공통점과 차이점을 적으시오.

공통점: 같은 형식의 계산과정을 반복함, 역원·결합법칙·항등원의 개념이 필요

차이점: 수의 범위가 다르다 연산이 다르다

☞ 유형 1과 유형 2를 비교하여 공통점과 차이점을 적으시오.

각각 덧셈, 곱셈을 이용했다는 차이를 제외하고 역원·결합법칙, 항등원의 개념을 이용해 식을 푼다.

< 수의 범위도 차이점. (유형 1 → 정수, 유형 2 → 유리수)

(학생 응답)

<유형 3> 일차방정식 $ax+b=0,\quad a\neq 0$형

이 유형은 앞에서의 계산이 반복되므로 풀이와 필요한 사실은 쉽게 기입하였으며, 앞에서 배운 군이란 용어를 사용한 학생도 있었다. 여기서 교사는 덧셈과 곱셈에 대해 군을 이루고 있으므로 연산을 구분하여 각각의 수학적 사실을 서술할 필요가 있음을 유도하고, 이러한 수학적 구조에 대해 두 번째 정의를 하도록 유도하였다.

$ax+b=0$꼴의 일차방정식을 풀기 위해서는 ① 덧셈에 대하여 군이어야 한다. ② 곱셈에 대하여 군이어야 한다. 즉, 이 식을 풀기 위해서는 유리수의 집합과 덧셈과 곱셈이라는 두 연산이 필요하며, 이 두 연산에 대하여 유리수는 모두 군이어야 한다. 이러한 수 체계를 (　　　)라 한다.

그러나 학생들은 "수학적으로 이에 해당하는 용어가 없으니 우리가 이름을 만들자."는 교사의 질문에 당황해하며 선뜻 답을 하지 못했다. 이는 '해당하는 용어가 분명히 있을 텐데, 왜 저런 질문을 하는가?'란 의아심, 그리고 주어진 것을 습득하는 것에는 뛰어나지만 새로운 것 특히, 용어를 만드는 경험을 하지 못했던 것에 기인하지 않을까? 라고 생각하지만, 이에 대한 인터뷰가 이루어지지 않아 미루어 짐작할 뿐이다. 결국 이 구조의 이름은 정하지 못한 채, 'two 군'[3]이라 해 두는 것으로 정리되었다.

3) 다른 영재교육원 수업에서는 군^{2}으로 정의하기도 했다.

단계 2 이차방정식

<유형 1> 이차방정식 $x^2 = a,\ a \geq 0$형

학생들은 가장 간단한 이차방정식의 예로 $x^2 = 2$를 선정하였다. 그런데 이것은 <단계 1>의 방법으로는 풀 수 없음과 이미 $x = \pm\sqrt{2}$를 알고 있지만 지금 자신들이 하고 있는 풀이와 관련된 사실들을 어떻게 적을지 몰라 당황하는 모습을 보였다. 즉, 자신들이 알고 있는 지식을 버리고 그 개념이 구명되었던 원초적인 단계로 가서 생각하지 않으면 안 된다는 사실을 확실히 이해하게 되었다. 결국 기존의 방법으로 해결할 수 없는 상황이므로 새로운 수학적 개념을 만들 필요가 생긴 상황에 직면한 것이다. 교사는 수학자들도 지금까지처럼 알고 있는 것을 활용하면서 필요한 부가적인 것을 첨가하지만, 전혀 새로운 것을 만들어야 할 상황에 봉착하면 적절한 수학적 기호 및 개념을 새롭게 만들어 내는 노력을 해왔다는 사실을 부연설명하면서, 두 번째 정의를 유도하였다.

> $x^2 = 2$인 x는 이것을 곱해 2가 되는 수로 이것을 새로운 기호를 도입하여 $x = \pm\sqrt{2}$라 한다. 이것을 방정식과 관련하여 나타내면, 다음과 같은 식에서의 해가 x이다 ;
>
> $$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$
>
> 이때,
>
> $$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$
>
> $$\Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{2} = 0$$
>
> 이라는 것을 필요로 한다. 이러한 수로 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\cdots$, $\sqrt{p}$ (p는 소수) 등을 생각할 수 있다. 나아가 $x^3 = 2$, $x^4 = 2$, $x^5 = 2$ 등과 같은 내용으로 확장할 수 있다. 그러면 x는 각각 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$ 등으로 나타낸다. 이러한 수들을 무리수라 부른다. 그리고 $x^2 = 4$, $x^3 = 8$은 해가 각각 $x = \pm 2$, $x = 2$로 정수이며, 나아가 $x^2 = \frac{9}{4}$, $x^3 = \frac{27}{8}$의 해는 각각 $x = \pm\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$으로 유리수이다. 이처럼 $x^2 = p$ (p는 소수)형을 기본으로 무리수를 정의하고, 이 개념을 유리수에 적용하여 유리수와 무리수를 하나의 수학적 수단으로 논의할 수 있게 된다. 그리고 유리수와 무리수의 합집합을 실수라 한다.

이후 초월수 π, e가 무리수에 속한다는 것을 소개하였다.

<유형 2> 인수분해 되는 이차방정식형

인수분해 되는 이차방정식으로 $x^2 + 3x + 2 = 0$를 선정하고, x를 구하는 풀이와 이를 위해 필요

한 사실들을 쓰도록 하였다. 학생들은 다음과 같이 답을 바로 구하였다.

$$(x+1)(x+2)=0$$
$$x+1=0 \text{ 또는 } x+2=0$$
$$x=-1 \text{ 또는 } x=-2$$

그러나 이미 구성된 수 체계 속에서 방정식을 푸는 것이 아니라 방정식의 해법을 보장 받을 수 있는 체계를 만들어간다는 취지를 고려하면, 이 과정에 대한 논의 이전에 다음과 같은 사실들이 필요해진다.

우선 $x^2+3x+2=0$를 인수분해한 표현에서 다음 사실이 보장되어야 한다.

(단계 1)

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

또는

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

이라는 것이 보장되어야 한다. 이것은 중학교 교과서의 인수분해 단원에서 자주 소개되는 넓이를 이용한 도식으로 확인이 가능하다. 그러나 우리의 목적은 이러한 직관적 사실들 보다는 엄밀한 수학적 장치를 구성하는 것이므로, 이에 필요한 수학적 사실들을 규정하여야 한다. 따라서 다음과 같은 활동이 이루어진다.

일반성을 잃지 않고, $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$임을 보장하려 한다고 하자. 이를 위해서는 먼저 $(x+1)(x+2)$를 전개(*분배법칙*)하여 이를 계산가능하게 하는 조건들을 규정하여야 하는데, 수에서 성립하는 계산 규칙을 확장하려 하고 있음을 유념하도록 하자. 즉, 첫 번째로 전개와 관련한 사실이 필요하고, 두 번째로 계산 규칙을 정해야 한다.

1-1) $(x+1)(x+2)$를 전개하는 방법은 두 가지가 있다.

① $(x+1)(x+2)=(x+1)\times x+(x+1)\times 2$
$\qquad\qquad\qquad\;\; =x\times x+1\times x+x\times 2+1\times 2$

② $(x+1)(x+2)=x\times(x+2)+1\times(x+2)$
$\qquad\qquad\qquad\;\; =x\times x+x\times 2+1\times x+1\times 2$

우선 계산의 일의성을 위해 이 두 계산 결과가 같아야 한다. 따라서

$$1\times x+x\times 2=x\times 2+1\times x \text{ (덧셈에 대한 교환법칙)}$$

일 필요가 있다.

1-2) 다음으로 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$이어야 하므로

$$x\times 2+1\times x=2\times x+1\times x=(2+1)x=3x$$

일 필요가 있다. *(수와 문자의 곱셈에 대한 교환)*

이처럼 이차방정식과 인수분해형을 전개한 것이 항등적으로 같게 되기 위하여 필요한 사실을 분배법칙, 우 분배법칙, 좌 분배법칙, 덧셈에 대한 교환법칙으로 부르기로 한다. 그리고 수와 문자의 곱셈에 대한 표기규칙이 정해진다.

(단계 2) 이제

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=(x+2)(x+1) \text{ (곱셈에 대한 교환법칙)}$$

을 약속함으로써 더욱 계산의 편리성을 보장받게 되며, $x^2+3x+2=0$은 $(x+1)(x+2)=0$ 즉, $x+1=0$ 또는 $x+2=0$임을 이용하여 해결할 수 있게 된다. 이후의 계산은 이미 보장받은 일차방정식의 해법에 따른다. 이 과정에서 곱셈에 대한 교환법칙을 정의하게 된다.

(단계 3) 이를 더욱 일반화하여

① $(ax+b)(cx+d)=0$
② $(ax+b)(cx+d)(ex+f)=0$

등으로 인수분해 가능한 고차방정식의 해법으로 논의를 확장하여 갈 수 있다. 이때 추가적으로 곱셈에 관한 결합법칙이 필요해진다.

이 내용은 무엇을 생각해야 할지에 대한 교사의 발문과 학생의 답으로 전개되었으며, 이탤릭체로 표현된 곳은 학생들과의 풀이가 끝난 후 다시 전체를 개괄하며 수학적 정의로 정리한 것이다.

이처럼 인수분해 가능한 형의 방정식들을 해결할 수 있는 대수적 구조의 기초는 인수분해 가능한 이차방정식이며, 이때 필요한 수학적 사실들을 정리하게 하고 세 번째 정의를 유도하였다.

인수분해 가능한 꼴의 방정식을 풀기 위해서는 (단계 1)에서 분배법칙, 덧셈에 대한 교환법칙이 필요했으며, (단계 3)에서 인수분해 가능한 고차방정식으로의 확장을 위해 곱셈에 대한 결합법칙이 필요해진다.

(단계 2)에서 계산의 편리성과 효율성을 위해 '순서를 고려하지 않으면 인수분해표현이 유일하다.'는 사실을 약속할 필요가 있고, 이를 위해 곱셈에 대한 교환법칙이 정의되게 된다. 그리고 (단계 3)에서 방정식을 풀기 위해 앞에서의 'two 군'의 개념이 상기된다.

따라서 인수분해형과 전개형을 동치 표현으로 하는 대수적 구조는 환(ring)이며, 인수분해형 방정식의 해를 보장하는 대수적 구조는 체(field)이다. 그리고 앞의 'two 군'의 개념은 체로 흡수되게 된다.

<유형 3> 인수분해 되지 않는 이차방정식형

인수분해 되지 않는 이차방정식으로 $x^2-6x+4=0$을 선정하고, 풀이와 필요한 사실을 적게 하였다. 이 경우 역시 이미 근(해)의 공식을 알고 있어 바로 답을 구하려는 학생들이 대부분이었으나, 몇몇 학생은 완전제곱형으로 고쳐서 풀어야 한다고 했다. 그러나 막상 왜 완전제곱형으로 만들려고 하느냐에 대해서는 답을 하지 못했다. <유형 1>을 다시 주목하게 하자, 이미 알고 있는 것으로 주어진 문제를 해결하려고 한다는 것을 이해하였다.

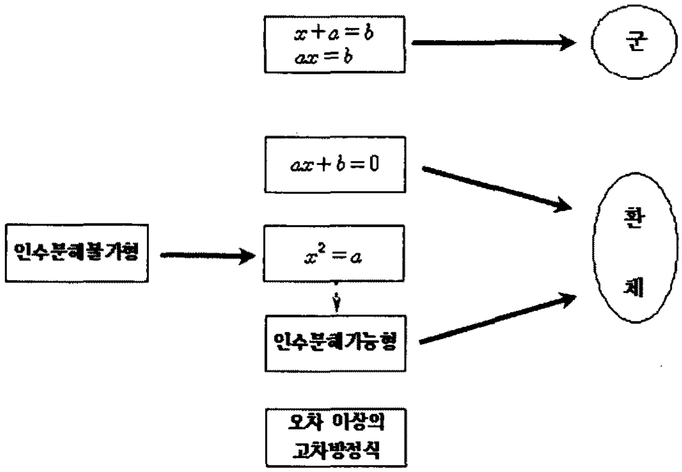
이어서 인수분해형도 전개하면 이 방법을 적용할 수 있으므로 <유형 2>로 흡수되어 일반적인 이차방정식의 해법으로 완전제곱꼴을 선정할 수 있음을 유도하였다. 즉, <유형 1>로 수렴되며 이는 결국 인수분해형인 <유형 2>로 고칠 수 있음을 인식시키고, $ax^2+bx+c=0$를 대상으로 근(해)의 공식을 유도하였다. 이 과정에서는 지금까지의 수학적 사실 외에 다른 새로운 수학적 사실을 더 이상 필요로 하지 않음을 확인하였다.

단계 3 그 외의 방정식

이후 일반적인 삼차·사차방정식, 그리고 오차 이상의 방정식에 대한 개관을 하였다. 본 수업에서는 삼차·사차방정식의 일반적 해법은 완전제곱꼴을 이용하여 찾으려는 노력에서 얻어졌으며, 오차 이상의 방정식에서는 '그 계수에 사칙연산과 근호만을 사용해서 얻을 수 있는 근의 공식은 존재하지 않는다.'는 것과 '복소수 범위 내에서 반드시 근을 가진다.'는 가우스의 대수학의 기본정리를 소개하였다. 삼차·사차방정식의 일반적 해법은 참고자료로 배부하였다.

단계 4 정리

다항방정식을 풀기 위한 대수적 구조는 군, 환, 체로 충분하며, 대표 유형으로는 인수분해 가능형인 <유형 2>로 수렴하며, 그 계산의 기초는 일차방정식임을 다음과 같이 도식화하여 정리하였다.



<그림 3> 다항방정식 유형과 수 체계

마지막으로 다음 과제를 제시하여 주어진 수 집합과 연산에 대해 어떤 대수적 구조를 가지는가에 대해 알아보도록 하였다. 이는 수학적 개념을 구성해 온 지금까지의 과정의 역으로, 수 체계를 대수적 구조에 견주어 다시금 정리하고 이해하는 것을 목적으로 한다.

문제) 수 집합 N, Z, Q가 덧셈과 곱셈에 대하여 어떤 수 체계를 가지고 있는지 알아보시오. 그리고 이것이 다항방정식의 해법과 어떤 관계가 있는지 설명하시오.

4. 결과 및 논의

본 프로그램은 군, 환, 체의 개념을 밝혀 방정식과 관련된 개념으로서 수 체계를 이해한다는 것에 초점을 두었으므로 삼차 방정식 이상은 설명만 하고 개요를 도식화 했다. 그러나 수업 후 받은 수업에 대한 설문에서 참고자료로 배부된 내용을 직접 다루기를 원하는 의견도 있었다. 그 외 학생들의 의견 중 무응답과 수업과 관련되지 않는 내용을 제외한 나머지는 다음과 같다.

<표 3> 설문 6의 결과

대구 소재 대학 영재교육원 1
① 처음에는 다 아는 내용이라 따분했는데 돌이켜보니 흥미로웠다.
② 평소에 중요히 여기지 않았던 것들에 대해서 알게 되었다.
③ 약간 귀찮은 부분이 없지 않아 있었고 새롭게 배운 것도 있어 흥미로웠다.
④ 문제 풀이법 위주 기존 수업들과 달리 수학의 원론적인 이해에 관한 내용이라 신선

⑤ 수업시간에 배운 내용들은 수학 관련 책을 통해 알 수 있다. 조금 더 깊은 부분에 도달한 순간 수업이 종료되어 아쉬웠다.
⑥ 재미있었다.
⑦ 기초적인 것들이라 쉬웠지만, 이 덕분에 수학 방정식의 기초를 배울 수 있었다.
⑧ 새로운 수업이었다. 가볍게 넘길 만한 내용을 심도 있게 배워서 즐거웠다.
⑨ 신선하면서 심오하다.
⑩ 단순하지만 초기 수학자들의 노력을 이해할 수 있게 되었고, 단순한 사실처럼 보이는 것도 증명이 필요하다는 것을 재차 각인시켜 주었다.
대구 소재 대학 영재교육원 2
① 새로운 개념을 배울 수 있어서 예전의 수업들과 비교해서 더 좋았던 것 같다. 선생님께서 학생들에게도 기회를 주셨으면 좋겠다.
② 우리가 평소에 아무 생각 없이 풀었던 방정식에 쓰이는 여러 가지 수학적 정의들, 그리고 생각의 단계를 정리할 수 있어서 좋았다. 기본적인 내용만 하지 말고 좀 더 깊이 있는 방정식을 푸는 수업을 했으면 더 좋았을 것 같다.
③ 이번 시간에는 우리가 평소에 아무 생각 없이 쓰던 공부에 그런 원리가 있었는지 몰랐다. 오늘 군, 환, 체에 대해 배워서 일차방정식, 이차방정식에 대해 한층 더 높은 차원에서 볼 것 같아 좋았다. 그리고 군, 환, 체란 보통 학교에서 배우기 힘든 것을 배워서 좋았다.
④ 처음에는 방정식, 수에 대하여 한다길래 그냥 아는 것이겠구나 하고 싶었다. 생각보다 수업이 즐거웠던 것은 선생님께서 새로운 개념에 대해 손쉽게, 재미있게 설명해 주신 것이 인상적이었다. 오늘 새로이 배운 군, 환, 체에 대한 것에 대해 더욱 자세히 알고 싶다.
⑤ 친구들이 아직 친해지지 못했지만 수업에는 100% 집중 가능한 게 좋다(수업 분위기 최고!) 선생님도 잘 가르치신다.
⑥ 나의 짧은 생각, 세뇌식으로 배웠던 덧셈, 곱셈의 정의를 다시 한 번 보게 되니 내가 진짜 수학자가 된 것 같은 기분이 들었고 선생님이 자유로운 의문형 물음을 던짐으로써 우리들에게 답을 생각하게 한다.
⑦ 이전 수업과는 달리 방정식에 대해 깊이 있게 공부해 보았고, 어려운 개념을 풀어 설명해 주셨다.
⑧ 군, 환, 체가 낯설고 어렵다.
⑨ 예전에는 수학의 '방정식'이란 박물관의 '토기'와 같은 것 같았었다. 박물관에 있는 토기는 너무 흔해서 대충 보았다. 방정식도 마찬가지다. 방정식을 설명하면 조금 지겨웠다. 처음 수의 역사할 때는 지겨워서 죽는 줄 알았다. 하지만 그 이후로부터 새로운 것을 알게 되어서 기분이 좋았다. 지식습득은 아주 좋은 것 같다.
⑩ 이전 수업에 비해 문제가 쉬웠다.
⑪ 처음에는 1차 방정식이 나오길래 쉬운 내용인줄 알았는데 여러 가지 새로 듣는 내용이 나오

면서 수학이라는 학문이 깊이 들어갈수록 신비롭다는 생각이 들었다.
⑫ 수학의 역사와 기초에서 심화로 가면서 수업하므로 지겹지 않다. 수업 내용이 처음 들은 것이 재미있었다.
부산 소재 대학 영재교육원
① 수학에서의 본질에 대해 탐구할 수 있었던 점이 좋았습니다.
② 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 복소수 등이 방정식과 관련 있다는 것이 너무 신기했다. 내가 이 내용을 이해했다는 것이 자랑스럽다. 또, 앞으로는 지식을 받아들이기만 하지 않아야겠다.
③ 수준이 맞고 이해가 더 잘되었다. 따라가기 쉬웠다.
④ 군, 환, 체에 대해 더 잘 알 수 있어 좋았다.
⑤ 나는 군, 환, 체에 대해서 오늘 처음 들었는데 이해가 잘 되고 수업에 흥미를 가질 수 있었다.
⑥ 1+1=2를 증명하는 것 같은 기초적인 것도 있어야 지금의 수준이 생긴다는 것을 3일 만에 다시 확인했다.
⑦ 수학자들이 이런 쉬운 것을 아주 꼼꼼히 한 것에 대해 정말 대단하다는 생각이 들었다.
⑧ happy
⑨ 수에 대한 개념을 제대로 규명
⑩ 다시 수학에 대해 고찰해 보는 기회가 됐다.
⑪ 그냥 막연하게 알고만 있든 것을 다시 짚어보니 좋았다.
⑫ ○○가 수업을 잘 듣고 선생님 말투가 좋습니다. 수업 내용도 good
⑬ 재미있었다. 생각을 바꿔 단순히 평소에 계산하던 것을 깊이 있게 보는 것도 괜찮았다.
⑭ 새롭게 방정식을 배운 것 같아 재밌었다.
⑮ 방정식을 푸는 과정에서 수의 식 적으로 넘어갔던 과정들에 이렇게 많은 과정이 있었다는 것이 신기했다.

학생들은 간단한 계산의 반복에 지루함을 느꼈지만, 이차방정식 그리고 고차방정식으로 진행됨에 따라 지적 호기심을 보였으며, 수학적 아이디어의 산출과정을 경험함으로써 수학의 본질에 접하는 경험을 하게 한다는 프로그램의 목적을 어느 정도 이해한 것 같다. 학생들은 수학적 결과물로서가 아닌 필요성에 의해 구성되어진 개념으로 수학적 지식을 이해하고, 따라서 그 과정을 이해하는 것이 보다 필요함에 동의하며, 이런 식의 수업 방법에도 긍정적 반응을 보여주고 있다. 단지 '다 아는 내용이다.'나 '수학 관련 책에서 읽었다.'에 대해 수업 후 학생에게 확인한 결과, 용어와 정의에 대해 배운 것을 의미했다. 또한 보다 심화된 수학적 내용을 다루고 싶어 하는 경향도 보였다.

결과적으로 지적 호기심이 강한 영재교육 대상 학생들에게는 앞의 분량을 조절하여 오차방정식까지의 내용을 자세히 수학적으로 다룰 필요성을 느꼈다. 반면, 설문을 받지는 못했지만 연구자가 비슷한 내용을 강의했던 WISE의 학생들은 구성에 초점을 맞춘 수업에 만족도가 높았다. 따라서 학생

집단의 성격과 기존의 경험에 따라 수업을 다양하게 구성할 수 있다. 또한 기초반 학생들에게는 수의 역사를 보다 강조하고 전반부의 충분한 계산과 설명식 수업이 주가 되어야 하며, 심화반 학생들에게는 단조로운 계산을 간소화하고 고차다항방정식의 전체적인 내용을 모두 계산하고 경험하게 하는 것을 생각할 수 있다.

나아가 일반 학생들에게도 군, 환, 체란 수학적 용어나 관련된 수학적 사실을 엄밀하게 지도할 필요는 없지만 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙, 항등원, 역원이 가지는 의미와 의의에 관한 내용은 충분히 지도 가능하다.

본 교수실험은 영재교육원 학생들이 대상으로, 선행지식이 풍부하고 형식화된 수학에 충분히 노출되어 그러한 장점에 익숙한 학생들이므로 기초적·반복적 계산을 지루해한다는 것이 특성이다. 그러나 모든 경우의 수를 생각하고 이를 철저히 반복하여 계산하고 사고하는 과정은 수학적 아이디어를 구명하는 것에 있어 필연적인 과정이다. 따라서 이를 효율적이고 필수적인 것으로 재구성하여 지도할 필요가 있다. 또한 일선 학교에서의 지도는 활동의 주안점을 조정하여 교재를 재구성하고 교수법에 있어 융통성을 발휘할 필요가 있다.

Ⅲ. 결론 및 제언

본 연구에서는 수 집합에 대한 설명과 표현에 대해 설명하고, 이러한 수 집합을 다항방정식의 해와 관련하여 정의하는 관점을 기초로 수 체계를 구성하였다. 문제제기는 이러한 관점에서 수 집합을 정의하기 위해서는 방정식의 해가 보장되어야 하며 이는 방정식을 푸는 것이 우선되어야 한다는 것으로 시작하였다. 또한 학문적인 용어까지를 다루므로 영재교육 대상 학생들을 위한 프로그램으로 개발하였다. 이러한 프로그램은 형식 불역의 원리를 적용한 수의 확장에서 보존해야 할 구조가 무엇인지를 수학적 연결성을 통하여 밝히는 근원적인 것으로, 수학적 개념의 목적성과 필연성을 경험하게 하여 수학이 인간 사고활동의 산물임을 이해하게 한다.

실제로 교육과정에서는 수 집합을 복소수까지 다루며 수의 체계를 체까지 다루고 있다. 물론 학문적 용어는 사용하지 않고 있으나, 고등학교에서 지금까지 확장된 수 집합인 자연수부터 복소수까지에 대해 수 체계의 내용을 정리하고 있다. 특히, 실수에서는 닫혀있다, 연산, 연산의 성질들을 다루고 있고, 이를 바탕으로 복소수에서도 같은 활동을 함으로써 사실상 체의 내용을 모두 다루고 있다. 그러므로 그 학문적 배경에 대한 교사의 이해와 수학적 연결성에 의한 수학적 아이디어들의 관련성을 학생들이 이해하는 것은 또 다른 흥미를 줄 수 있으며, 보다 심화된 수학적 이해를 할 수 있는 소재가 된다. 그리고 수학의 본질적 관점인 필요성, 목적성, 해결을 위한 사고 그리고 그것의 형식화 과정에 대한 경험을 통하여 수학의 문화성을 인식할 수 있고 살아있는 수학, 인간과 함께 성장하는 수학을 인식할 수 있다. 이것은 교수학적 조직화에서의 수학화의 목적이기도 하다. 이러한 수학화는 학생들의 창의적이고 본질적인 이해를 위한 경험이다.

따라서 중등학교에서도 군, 환, 체의 용어를 직접적으로 다루지 않더라도 그 요소에 대한 의의를 지도하기 위한 소재로 활용할 수 있다. 이때에는 예를 들어, 결합법칙이 왜 필요한가? 결합법칙이 성립한다는 것은 무엇을 가능하게 해주는가? 그것이 가지는 의의는 무엇인가? 등을 주제로 다룰 수 있다.

이들 성질들은 수 집합이 정의되고 난 후, 그 속에서 읽혀지는 성질로 결합법칙이나 교환법칙을 수학적으로 '형식화' 한 것이라는 지도 관점이 아니라, 주어진 수 집합에서 어떤 방정식이 계산 가능하며 해가 존재하는지? 그러기 위해서 어떤 사실들이 보장되어야 하는지를 목적으로 '구성'한 것이라는 관점이다. 즉, '본질에 대한 현상'이란 수학적 개념을 함의한 존재하는 현상만이 아니라 목적에 의한 구성의 필요성도 될 수 있는 것이다. 이러한 목적성을 가진 활동으로 수학을 경험하는 것은 현대 수학적 경험까지 가능하게 하며 수의 확장의 필요성까지도 경험할 수 있는 소재가 될 것이다. 이는 이후 수 집합에서 확장된 임의의 집합에 연산을 주어 대수적 구조를 구성하는 활동의 밑거름이 되며, 실제로 이것이 현대대수학의 많은 개념들과 예를 만들어낸 단초가 되었다. 중등학교의 수 집합, 연속함수 집합, 행렬 집합, 수렴하는 수열의 집합 등의 논의에서도 대수적 구조와 관련된 내용을 확인할 수 있다. 따라서 이 활동에 대한 이해는 수학 전반의 구조에 관한 이해의 한 흐름을 다루는데 유용하다. 또 다른 흐름은 연산이 스칼라배(scalor product)와 덧셈(addition)인 벡터공간에 관한 것이다. 그래서 중등 수학의 내용을 보면 스칼라배, 덧셈, 곱셈 연산이 주가 되고 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙의 성립여부가 우선적으로 논의되는 있으며 이는 그 대상들의 집합이 대수적 구조를 가지는지 벡터공간을 이루는지에 대한 내용인 것이다. 따라서 이에 대한 이해는 중등교육과정 전반에 대한 범주를 아우를 수 있게 하여 수학적 아이디어들 간의 연결성 및 전체를 볼 수 있는 안목을 갖게 한다. 그러므로 학문적 용어를 도입하지 않고 그 구성요소의 의의를 지도의 강조점으로 본다면 일반학교에서도 활용할 수 있는 교재를 구성할 수 있다.

이러한 활동은 궁극적으로 수학적 개념의 필연성에 대한 답을 주며, 본질적 이해를 돕는다. 따라서 이러한 활동을 구성하는 연구는 교과교육의 기초를 준다.

참 고 문 헌

구광조 · 오병승 · 류희찬 공역 (2004). NCTM (1989). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

권성룡 · 김남균 · 김수환 · 김용대 · 남승인 · 류성림 · 방정숙 · 신준식 · 이대현 · 이봉주 · 조완영 · 조정수 (2006). 수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?, 서울: 경문사.

김부윤 · 정영우 (2010 a). 연산의 관점에서 본 등식의 성질에 관한 고찰, EAMJ, **26(2)**, 179-190.

김부윤 · 정영우 (2010 b). 삼각함수의 Mathematization에 관한 연구, EAMJ, **26(4)**, 487-507.

김부윤 · 정영우 (2010 c). 함수의 합성이 가지는 의미에 대한 고찰, 한국수학교육학회 시리즈 A <수

학교육>, **49(2)**, 149-160.

김부윤 · 정영우 (2010 d). Byproduct Mathematization에 관한 연구, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, **20(2)**, 145-161.

김응태 · 박승안 (2003). 현대대수학, 서울: 경문사.

류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 공역 (2008). NCTM (2000). 학교수학을 위한 원리와 규준, 서울: 경문사.

방정숙 · 김재화 (2006). 초등학교 6학년 학생들의 소수 계산 오류와 선행지식 간의 연결 관계 분석 및 지도방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **45(3)**, 275-293.

정영우 (2010), 실수 체계의 교수학적 조직화에 관한 연구, 부산대학교 대학원 박사학위논문.

片野善一郎 (1992). *數學史を活用した教材研究*, 東京: 明治圖書出版株式會社.

草場公邦 (2010). *ガロワと方程式*, 東京: 朝倉書店.

浜稲雄譯 (2006). *ガロワと群論*, 東京: みすず書房.

B. Baumslag, & B. Chandler (1968). *Group Theory*, NY : McGraw-Hill, Inc.

A study on teaching the system of numbers considering mathematical connections

Chung Young Woo
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea
E-mail : nahime1130@hanmail.net

Kim Boo Yoon+
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

Pyo Sung Soo
Department of Mathematics Education, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea
E-mail : ssoopyo@knu.ac.kr

Across the secondary school, students deal with the algebraic conditions like as identity, inverse, commutative law, associative law and distributive law. The algebraic structures, group, ring and field, are determined by these algebraic conditions. But the conditioning of these algebraic structures are not mentioned at all, as well as the meaning of the algebraic structures. Thus, students is likely to be considered the algebraic conditions as productions from the number sets.

In this study, we systematize didactically the meanings of algebraic conditions and algebraic structures, considering connections between the number systems and the solutions of the equation. Didactically systematizing is to construct the model for student's natural mental activity, that is, to construct the stream of experience through which students are considered mathematical concepts as productions from necessities and high probability. For this purpose, we develop the program for the gifted, which its objective is to teach the meanings of the number system and to grasp the algebraic structure conceptually that is guaranteed to solve equations. And we verify the effectiveness of this developed program using didactical experiment. Moreover, the program can be used in ordinary students by replacement the term 'algebraic structure' with the term such as identity, inverse, commutative law, associative law and distributive law, to teach their meaning.

* ZDM Classification : D48
* 2000 Mathematics Subject Classification n : 97D40
* Key Words : group, ring, field, equation, number system, didactical organization
+ corresponding author

<부록> 학생 설문

학생카드

날짜: ________________ 날씨: ____________________

1. 본 수업에서 배운 내용은 무엇입니까?

2. 수업 내용 중 의문이나 이해가 잘 안 되는 부분이 있었으면 적어 주십시오.

3. 더 깊이 알고 싶은 내용이 있으면 적어 주십시오.

4. 자신의 수업 참여도를 100점 만점의 점수로 준다면 얼마입니까? 그 이유는 무엇입니까?

5. 자신의 수업 이해도를 100점 만점의 점수로 준다면 얼마입니까? 그 이유는 무엇입니까?

6. 이번 수업에 대해 느낀 점들을 자유롭게 적어 주십시오. 이전에 경험했던 수업들과의 비교 또는 이 수업의 장단점, 친구들에 대한 것, 수업 내용에 관한 것 등 어떠한 것이라도 좋습니다.