韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 25집 제 2호, 2011. 5. 451-472

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 25, No. 2, May. 2011. 451-472

대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 대한 연구

유 익 승 (전주고등학교)
한 인 기 (경상대학교)+

수학의 다양한 영역들 사이의 연결성은 수학 자체의 발달 과정 뿐만 아니라, 학생들의 수학 학습에서도 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 수학 문제에 포함된 대수식의 기하학적 해석을 통해 새로운 문제해결 방법을 탐구하였다. 특히 수학 문제해결에서 기하학적 접근에 대해 고찰하였고, 고등학교 수준의 비정형적인 문제들을 기하학적 해석을 통해 해결하며, 이에 관련된 문제해결의 특징들을 분석하였다. 본 연구에서 제시하는 자료들은 고등학교의 교수-학습 과정에서 직접 활용될 수 있을 것이다.

1. 서 론

수학에서 한 영역의 지식은 다른 영역으로부터 고립되어 독립적으로 존재하는 것이 아니라, 다른 수학 영역의 관점에서 재해석되기도 하며, 이러한 과정에서 새로운 수학탐구의 가능성이 열리는 경우가 많이 있다. 예를 들어, 수학 발달의 역사에서 피타고라스는 우리 주변의 만물을 수로 해석하여 수론 분야를 발전시켰으며, 데카르트는 기하학의 대수적 해석을 통해 해석기하학을 만들었다.

학교수학의 교수-학습에서도 수학적 지식의 연결성은 꾸준히 강조되고 있다. NCTM(2007)에 의하면, "학생들이 서로 다른 영역의 수학 사이의 연결성을 이해할 수 있을 때, 수학을 통합된 전체로 보게 된다"(p.473)고 강조하면서, 수학적 아이디어 사이의 연결성에 대한 인식 및 활용을 규준의 하나로 제시하였다. 즉 학교 수학에서 수학의 다양한 영역들 간의 연결성, 수학의 한 영역 내에서 지식들 간의 연결성의 획득은 학생들이 도달해야 할 중요한 목표 중의 하나라는 것을 알 수 있다.

한편 학교수학에서 이러한 연결성은 문제해결과 관련하여 구체적으로 논의될 수 있다. Polya(2005)는 문제해결 과정에서 "당면한 문제가 기하 문제가 아닐지라도 그림을 그려볼 필요가 있다. 비기하학적인 문제에 대한 알기 쉬운 기하학적 표현을 찾아보는 것은 해결을 위한 중요한 진전이 될 수 있을 것"(p. 144)이라고 주장하였다. 즉 문제해결 과정에서 주어진 조건들의 기하학적 해석 및 표현이 문제해결에서 중요한 역할을 할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 신현성 · 김경희(1999)는 "그림그리기

* 접수일(2011년 3월 30일), 심사(수정)일(1차: 2011년 4월 22일, 2차: 4월 29일), 게재확정일자(2011년 5월 6일)
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 대수식, 기하학적 해석, 문제해결, 대수와 기하의 연결성
+ 교신저자

는 주로 기하문제를 풀 때 꼭 필요한 발견전략이지만 다른 문제에서도 자주 사용하는 전략인데 다이어그램, 그래프, 물리적 모델 등을 이용한다. 이러한 표현은 관련된 데이터, 관계 및 종속 등을 파악하는 데 도움이 되며 문제의 이해 · 계획에 널리 이용된다"(p. 170)고 주장하면서, Polya와 같은 맥락에서 수학 문제의 기하학적 표현이 문제해결에 도움이 된다고 강조하였다.

수학 문제해결 연구에서 기하학이 아닌 수학의 다른 영역의 지식과 기하학의 연결성은 그 지식을 기하학적으로 표현하는 것과 관련하여 강조되었다. 예를 들어, 교육부(1998), 정동권 · 김수미 · 김지원(2009), 남승인 · 류성림(2002), Schoenfeld(1980), Lenchner(1983), Larson(1983) 등은 문제해결의 전략 또는 발견술로 그림그리기 방법을 제시하였다. 수학적 지식을 그림 그리기를 통해 기하학적으로 나타내는 것은 수학적 지식의 의미 파악, 수학적 지식들 사이의 연결성형성, 문제해결을 위한 방향 설정 등과 관련되기 때문에, 많은 연구들에서 수학적 지식의 기하학적인 표현이 주장되었다는 것은 주목할 만하다. 그러나 그림그리기를 통해 기하학적으로 표현하는 것을 제외하고는, 수학적 지식의 또 다른 기하학적 측면에 주목하고 이를 문제해결에 활용하려는 시도는 드물었던 것도 사실이다.

본 연구는 수학 문제에 포함된 대수식의 기하학적 해석을 통해 새로운 문제해결 방법을 탐색하는 것에 관련된 연구로, 첫째 수학 문제해결에서 기하학적 접근에 대해 고찰하고, 둘째 고등학교 수준의 비정형적인 문제들을 기하학적 해석을 통해 해결하며, 이에 관련된 문제해결의 특징들을 분석할 것이다. 이를 통해, 대수식의 기하학적 의미, 대수학과 기하학의 연결성, 수학 문제해결에서 대수식의 해석에 관련된 다양한 자료들을 제시할 것이다. 특히 이 자료들은 고등학교 수학교실에서 직접 이용할 수 있는 다양한 수준의 문제들을 포함하므로, 수학교실에서 문제해결의 방법을 지도할 때에 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

2. 수학에서 대수식에 대한 기하학적인 접근

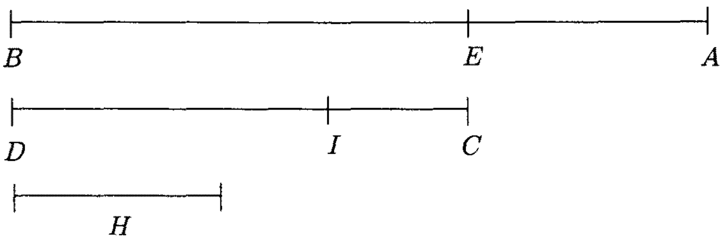
수학의 발달 과정에서 대수적 개념들의 기하학적 해석은 오랜 역사를 가진다. 그리스 시대에 기하학적인 양들의 집합이 유리수의 집합보다 더 조밀하다는 것이 알려지면서, 이 시대의 수학 연구는 기하학적인 특징을 띄게 되었고, 이를 가리켜 '기하학적 대수'라고 한다. 한인기(2005)에 의하면, 기하학적 대수에서는 덧셈은 선분들을 덧붙여 놓는 것으로, 뺄셈은 선분으로부터 감수와 같은 선분을 버리는 것으로 해석되며, 선분들의 곱셈은 변의 길이가 a와 b인 직사각형이 두 선분 a와 b의 곱으로 작도된다. 결국 그리스 시대에 수론적인 또는 대수적인 성격을 띈 다양한 문제들은 기하학적으로 해석되었으며, 기하학적 방법에 의해 해결되었다.

기하학적 해석을 통한 다양한 문제해결의 예를 유클리드 원론에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 유클리드 원론 제 7권의 명제 2인 '서로소가 아닌 두 수에 대해, 최대공통측도를 구하여라'는 것의 증명 일부를 살펴보자.

서로소가 아닌 두 수가 주어졌다고 하자. 가령 AB, CD라 하자(<그림 1>). AB, CD에 대해

공통측도를 구하면 된다. 만약 CD가 AB를 측정하고, 자신을 측정하면, CD는 AB, CD의 공통측도이다. CD보다 큰 수가 CD를 측정하지 못하므로, CD는 최대공통측도가 된다.

만약 CD가 AB를 측정하지 못하면, AB, CD에서 큰 수를 작은 수로 순차적으로 차감하면 이전의 차감된 수를 나누는 어떤 수가 남게 된다. 실제로 단위는 남지 않는다. 그렇지 않으면 AB, CD는 서로소가 될 것이며, 이것은 가정되지 않았다. 결국, 이전에 차감된 수를 나누는 어떤 수가 남게 된다. CD가 BE를 측정하며 자신보다 작은 EA를 남긴다고 하고, EA는 DI를 측정하면서 자신보다 작은 IC를 남기며, CI가 AE를 측정한다고 하자. (Euclid, 1949, p. 12)



<그림 1>

살펴본 바와 같이, 유클리드 원론에는 수들을 선분으로 해석하여 문제를 해결하였다. 이러한 기하학적인 해석을 통한 문제해결의 또 다른 예로, 유클리드 원론에서 이차방정식 $x(x+a)=b^2$의 해 x를 구하는 문제는 $x(x+a)=b^2$을 만족시키는 선분 x를 작도하는 문제로 해석되어 해결되었다.

이때 한 가지 주목할 것은 이러한 기하학적 해석이 문제해결을 좀더 우아하게 하거나 효과적인 해법을 찾기 위한 시도로부터 비롯된 것이 아니라는 것이다. 이것은 기하학적인 양들의 조밀성(수들(유리수)을 모두 선분으로 나타내는 것이 가능했지만, 선분들 중의 일부(무리수 길이를 가지는 선분들)를 수(유리수)로 나타내는 것이 가능하지 않았음)에 관련된다. 그러한 기하학적 대수로의 전환을 통해 얻어진 기하학적 해법은 종종 대수적인 해법보다 더 복잡하고 어려운 경우도 있었다. 특히 데카르트는 대수적인 문제해결 방법의 강력함에 주목하여 수학 문제해결 및 수학 연구의 새로운 전환기를 열었다.

수학의 대수적인 측면과 기하학적인 측면의 관련성은 수학 발전에서 중요한 의미를 가진다. 이와 관련하여 우정호는 다음과 같이 주장하였다.

Descartes에 의해 해석기하학이 탄생하면서 음수와 그 연산은 기하에서 필수불가결한 것임이 분명해졌다. 음수는 평면 전체를 좌표로 기술하고 직선이나 이차곡선 등과 같은 평면 도형을 전체적으로 하나의 방정식으로 간단히 기술하는데 반드시 필요하다. 대수적 풀이방법의 일반적 타당성에 대한 요구가 Descartes 이후 기하학적 관계의 기술에 대해 일반적인 타당성에 대한 요구에 의해서 강화되었다. Freudenthal은 이와 같은 수학적 사고 발달의 이면에 내재한 원리를 기하학적-대수학적 형식

불역의 원리라고 부르고 있다. (2004, pp. 164-165)

즉 수학의 대수적인 측면은 기하학적 측면에 의해 확장, 발전되며, 기하학적인 측면은 대수적인 측면에 의해 보완되어 왔고, 이러한 노력이 수학의 발달과정에서 중요한 역할을 했다는 것이다. 그러므로 중등학교 수학교과의 교수-학습에서도 대수학적인 측면과 기하학적인 측면을 결합시키려는 교수학적 노력은 중요할 것이다.

한편 Kolmogorov는 수학적 영재성을 대수적인 측면, 기하학적인 측면, 논리적인 측면으로 나누었다. Kolmogorov(1959)는 기하학적인 영재성과 관련하여 "수학자들은 가능하면 그들이 연구하는 문제들을 기하학적으로 구체적 형태로 나타내려 한다. 그러므로 기하학적 상상력(기하학적 직관이라고도 부르는)은 수학의 모든 영역에서 중요한 역할을 한다는 것은 두말할 나위도 없을 것"(p. 10)이라고 주장했다. 즉 수학적인 내용들을 기하학적으로 해석하고 이를 표현하는 것은 수학적 발명을 행하는 수학자의 수학 탐구에서 중요한 역할을 한다. 그리고 중등학교 수학교육에서 완성된 형태의 수학지식을 전달하는 것보다는 학생들의 수학 재발명이 중요하다는 것을 생각하면, 대수식의 기하학적인 해석을 통한 문제해결은 학생들에게 수학적 지식의 재발명을 위한 다양한 가능성을 제공해 줄 수 있을 것이다.

그리고 산술문제의 기하학적 방법에 의한 문제해결과 관련하여, Ostrovski & Kordemski(1960)는 문제해결에서 기하학적인 다이어그램이나 그래프의 사용은 계산적 방법을 대치하거나 또는 연립방정식의 구성하며, 산술적인 해법에서 추론 과정을 발명하는데 도움을 줄 수 있다고 하였다. 즉 문제해결에서 기하학적 방법의 사용은 산술적인 계산 중심의 방법에서 발생하는 미지수의 선택, 추론 절차의 발명 등의 어려움을 극복하는데 도움을 줄 수 있으며, 계산 중심의 문제해결 방법에서 벗어난 새로운 문제해결 방법을 찾는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

한편 구광조 외(1988)는 브루너의 수학 학습 이론으로 구성이론, 기법이론, 대조와 변화이론, 연결이론을 제시하였으며, 연결이론과 관련하여 "대부분의 수학 교육과정은 산술, 대수, 기하, 해석학 사이의 연결을 시도하고 있다. 독립적으로 수학적 개념이 존재하는 경우는 거의 없기 때문에, 학생들이 점진적이고 의미있는 학습을 수행하려면 개념들 사이의 연결성이 이해되어져야 한다"(p. 70)고 주장하였다. 즉 수학 교수-학습 과정에서 학생들이 유의미하며 체계적인 학습을 위해서는 수학적 연결성의 이해가 선행되어야 한다는 것을 알 수 있다. 이러한 관점은 "연결성이 없으면 학생들은 너무 많은 고립된 개념과 기능을 배우고 암기해야 한다. 연결성이 갖추어지면 선행 지식 위에 새로운 이해를 구축할 수 있다"(NCTM, 2007, p. 371)는 주장에 의해 구체화될 수 있다. 결국 수학의 한 영역 내의 연결성, 수학의 다양한 영역 간의 연결성은 체계적이고 유의미한 학습을 위한 필요조건이며, 지식구조의 체계성을 위한 전제조건이 된다는 것을 알 수 있다.

살펴본 바와 같이, 수학의 발달 과정에서 대수적인 측면과 기하학적인 측면의 관련성은 오래 전부터 관찰되어 진다. 수학적 지식의 대수적인 측면을 기하학적으로 해석하고 표현하는 것은 기존의 수학 지식을 확장하며 수학적 발명을 수행하는 데 중요한 역할을 하였다. 그리고 이러한 수학적 지식

의 연결성은 수학 학습의 유의미성, 수학적 지식의 체계성과도 밀접하게 관련된다. 그러므로 중등학교 수학교육에서 대수식의 계산을 통한 문제해결 뿐만 아니라, 수학 내용의 기하학적 해석을 통한 기하학적 방법의 활용도 다양하게 조명되어야 할 것이다.

3. 연구 방법 및 절차

대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결을 연구하기 위해, 본 연구에서는 수학에서 대수식에 대한 기하학적 접근에 관련된 문헌연구를 수행하며, 대수식을 포함하는 문제의 기하학적 해결을 통해 문제해결의 방법 및 문제해결의 특징을 고찰할 것이다.

문헌연구에서는 수학의 역사적 발달에서 대수식에 대한 기하학적 접근에 관련된 문헌연구를 수행하여, 수학의 대수적 측면과 기하학적 측면의 관련성을 고찰하며, 이에 관련된 국내외 수학교육학자들의 주장들을 분석할 것이다. 이를 통해 수학의 발달 및 확장 과정에서 대수적 측면과 기하학적 측면의 관련성, 보완성을 고찰하고, 대수 및 산술 문제의 해결과정에서 기하학적 방법, 기하학적 해석의 중요성과 장점을 밝힐 것이다.

한편 본 연구에서는 대수식을 포함하는 수학 문제들을 첫째, 기울기로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들, 둘째 거리(길이)로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들, 셋째 넓이로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들로 나누어 분석할 것이다. 그리고 이 문제들에는 고등학교 수준에서 수학교실에서 다루어지는 문제들과 경시대회 수준에서 다루어지는 문제들이 모두 포함된다. 이와 같이 경시대회 수준의 문제들을 연구대상의 문제들로 포함시킨 이유는 다양한 수준의 비정형적인 문제들을 분석하고 해결하는 과정에서 대수식의 기하학적 해석에 관련된 폭넓은 자료를 수집할 수 있을 것으로 기대되기 때문이다.

본 연구에서는 대수식을 포함하는 수학 문제들을 기하학적 해석을 바탕으로 해결하며, 이를 바탕으로 문제해결 과정에 관련된 대수식의 기하학적 해석, 대수식의 기하학적 해석의 특징, 문제해결 과정의 특징들을 고찰할 것이다.

4. 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결

대수식의 다양한 해석은 문제해결에서 탐색 수행의 새로운 방향을 모색하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 특히 새로운 해결방법을 요구하는 비정형적인 문제의 경우에는 문제에서 주어진 조건들의 다양한 해석은 문제해결의 방향을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결과 관련하여, 기울기로 해석될 수 있는 대수식, 거리(길이)로 해석될 수 있는 대수식, 넓이로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들의 해결을 살펴보고, 이에 관련된 문제해결의 특징을 살펴볼 것이다.

(1) 기울기로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제의 해결

대수식이 $\frac{b}{a}$, $\frac{d-b}{c-d}$인 형태를 가지는 경우를 생각하자. 식 $\frac{b}{a}$는 분수인 형태이지만, 이 식의 기하학적 의미는 원점 $(0, 0)$과 점 (a, b)를 연결하는 선분의 기울기가 된다. 그리고 $\frac{d-b}{c-a}$는 두 점 (a,b), (c,d)를 연결하는 선분의 기울기라고 기하학적으로 해석할 수 있다. 특히 함수 $y=f(x)$에서 $d=f(c)$, $b=f(a)$이면, $\frac{d-b}{c-a}$는 구간 $[a,c]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라고 기하학적으로 해석될 수 있다. 이러한 기하학적 해석을 바탕으로 몇몇 문제의 해결을 살펴보자.

문제 1(수학II[1]). $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$의 값을 구하여라.

문제 1의 전형적인 풀이는 분자와 분모에 있는 50°와 10°의 삼각함수의 합을 곱의 형태로 고친 다음, 이 과정에서 얻어지는 특수각을 이용하여 식을 간단히 계산하는 것이다. 이를 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

$$\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ} = \frac{2\sin\frac{50^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-10^\circ}{2}}{2\cos\frac{50^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ-10^\circ}{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

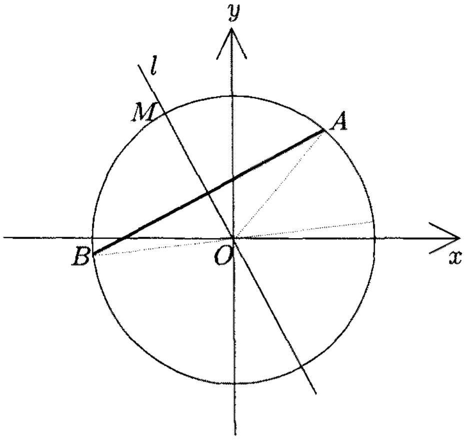
이와 같은 계산 방법에서는 사인이나 코사인의 합의 꼴을 곱셈의 꼴로 고치는 공식을 연습한다는 측면에서는 의의가 있지만, 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$ 자체의 의미에 대해서는 진지하게 생각할 수 있는 기회를 제공하기 어렵다.

식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$이 가지는 기하학적 의미를 살펴보자. 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$는 두 점 $A(-\cos 10^\circ,\ -\sin 10^\circ)$, $B(\cos 50^\circ,\ \sin 50^\circ)$를 연결하는 직선의 기울기가 된다. 그러므로 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$의 값을 구하려면, 직선 AB의 기울기를 구하면 된다.

이를 위해, 단위원에 점 A, B를 표시하자(<그림 2>). 직선 AB의 기울기를 구하기 위해, 선분 AB에 대한 수직이등분선 l의 기울기를 생각하자. 직선 l은 호 AB의 중점 M을 지나므로, 호 AM의 중심각과 BM의 중심각은 같다. 이제 호 AB의 중심각이 140°라는 것을 생각하면, 각 AOM의 크기가 70°임을 알 수 있다. 결국 직선 l은 x축과 120°의 각을 이루며, 기울기는 $-\sqrt{3}$이

1) 이 문제가 다루어질 수 있는 고등학교의 수학 교과목 명칭임.

다. 이로부터 직선 l과 직교하는 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이라는 것을 알 수 있다.



<그림 2>

문제 1의 해결과정에서 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$의 기하학적 해석인 기울기 개념을 이용하였다. 이 문제에서는 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$의 값을 구하도록 요구하였는데, $\sin 50^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\cos 10^\circ$가 특수각이 아니므로 문제의 해결이 자명하지 않다. 그리고 이 문제가 삼각함수의 합을 곱으로 고치는 공식의 취급과 동시에 제시되지 않는다면, 문제해결의 방향을 설정하는데 어려움이 발생할 수도 있다.

본 연구에서는 문제 1의 해결에서 식 $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ}$의 기하학적 해석을 고려하여 문제해결의 방향을 설정하고 해결하는 새로운 접근을 제시하였다. 문제 1의 해결방법을 바탕으로, 다음과 같은 문제를 유사하게 해결할 수 있다.

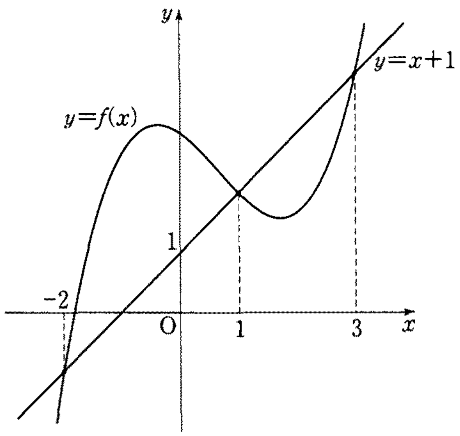
문제 2(수학II). $\frac{\sin 3\theta + \sin\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta} = \frac{4}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라(단 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$).

문제 1과 마찬가지로, $\frac{\sin 3\theta + \sin\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta}$와 관련하여 두 점 $\mathrm{A}(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$를 연결하는 직선의 기울기라는 기하학적 해석을 생각하자. 원점을 지나며 점 A, B를 연결하는 선분을 수직이등분하는 직선은 x축의 양의 방향과 $\frac{\pi}{2} + 2\theta$의 각을 이룬다. 따라서 등식

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) = -\cot 2\theta = -\frac{3}{4}$이 성립하며, $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$이다. 이제 탄젠트의 배각 공식을 이용하면 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$이며, 이로부터 $\tan\theta = \frac{1}{2}$이 된다는 것을 알 수 있다.

이제 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결을 부등식 문제의 해결과정과 관련하여 살펴보자.

문제 3(수학II, 2009년 6월 한국교육과정평가원 모의수능문제). <그림 3>에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x+1$과 세 점에서 만나며, 그 교점의 x좌표는 $-2, 1, 3$이다. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \geq \frac{1}{2}$을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.



<그림 3>

이 문제의 해결에 대한 일반적인 대수적 풀이 방법을 살펴보자. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \geq \frac{1}{2}$에서 우변의 $\frac{1}{2}$를 이항하여 정리하면 $\frac{2x+1-f(2x)}{2(f(2x)-1)} \geq 0$이 된다. 이제 $2x=t$라 치환하면, $\frac{f(t)-(t+1)}{f(t)-1} \leq 0$이 된다. 이것을 동치인 다음 부등식으로 고칠 수 있다.

$$\{f(t)-1\}\{f(t)-(t+1)\} \leq 0,\ f(t) \neq 1 \quad \text{---} ㉠$$

부등식 ㉠을 풀기 위해, 1과 $t+1$의 대소를 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

첫째, $t+1>1$, 즉 $t>0$인 경우. 부등식 ㉠의 해는 $1<f(t) \leq t+1$이다. <그림 3>에서 $y=f(x)$가 $y=x+1$의 아래에 있는 부분을 생각하면, 구하는 답은 $1 \leq t \leq 3$이며

$\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ 이다.

둘째, $t+1=1$, 즉 $t=0$인 경우. $f(t) \neq 1$이므로, 이 경우에는 부등식 ㉠의 해가 존재하지 않는다.

셋째, $t+1<1$, 즉 $t<0$인 경우. <그림 3>에서 직선 $y=1$과 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하자. 그러면 부등식 ㉠의 해가 $t+1 \le f(t) < 1$이므로, 구하는 t의 구간은 $-2 \le t < \alpha$, $-1 \le x \le \frac{\alpha}{2}$가 된다.

이들 세 가지 경우로부터 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \ge \frac{1}{2}$을 만족하는 구간은 $-1 \le x < \frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$이라는 것을 알 수 있다. 이로부터 최댓값을 M은 $\frac{3}{2}$이며 최솟값 m은 -1이 되며, 구하는 답은 $M+m=\frac{1}{2}$이다.

살펴본 문제 3의 풀이 방법은 전형적인 분수부등식의 해법에 근거한다. 즉 주어진 부등식을 분수부등식 $\frac{g(x)}{h(x)} \ge 0$으로 변형시킨 다음, $\frac{g(x)}{h(x)} \ge 0$을 동치인 부등식 $\begin{cases} g(x)h(x) \ge 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$로 변형시켜 해결하였다.

이제 주어진 부등식의 기하학적 해석을 통해 문제를 해결하자. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \ge \frac{1}{2}$에는 분수꼴의 식 $\frac{x}{f(2x)-1}$가 있으므로, 문제 1과 2에서 했던 것처럼 식 $\frac{x}{f(2x)-1}$를 기울기로 해석할 수 있는가에 대해 살펴보자.

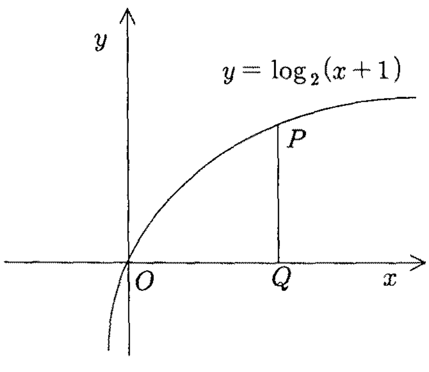
기울기는 $\frac{y\text{값의 변화}}{x\text{값의 변화}}$인데, 식 $\frac{x}{f(2x)-1}$에서는 x가 분자에, $f(2x)-1$이 분모에 있다. 그러므로 식 $\frac{x}{f(2x)-1}$의 분모와 분자를 바꾼 식 $\frac{f(2x)-1}{x}$을 먼저 생각하자. 이때 $\frac{f(2x)-1}{x} = 2\left(\frac{f(2x)-1}{2x}\right)$인데, [그림 3]에서 $\frac{f(2x)-1}{2x} = \frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}$이다. 그러므로 $2x$를 t로 치환하면 $\frac{f(2x)-1}{2x} = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$이며, 이 식의 기하학적 해석은 점 $(0,\ 1)$과 $(t,\ f(t))$를 연결하는 선분의 기울기이다.

이제 문제 3을 문제 1, 2와 같은 방법으로 해결할 수 있다. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \ge \frac{1}{2}$에서 양변에 2를 곱하여 역수를 취하자. 그리고 $2x=t$라 놓으면, 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \ge \frac{1}{2}$을

$0 < \dfrac{f(t)-1}{t} \leq 1$과 같이 쓸 수 있다. 이제 $(0,\ 1)$과 $(t,\ f(t))$를 연결하는 직선의 기울기가 0보다 크고 1보다 작거나 같은 구간을 찾으면, $-2 \leq t < \alpha$, $1 \leq t \leq 3$이 얻어진다(이때 α는 $y=1$과 $y=f(x)$의 교점의 x좌표). 이로부터 부등식을 만족시키는 x값의 구간은 $-1 \leq x < \dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$이며, $M+m=\dfrac{1}{2}$이 얻어진다.

문제 1, 2에서는 주어진 식 $\dfrac{\sin 50^{\circ} + \sin 10^{\circ}}{\cos 50^{\circ} + \cos 10^{\circ}}$, $\dfrac{\sin 3\theta + \sin\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta} = \dfrac{4}{3}$로부터 어떤 대수적인 변형 과정 없이도 기울기라는 기하학적 해석을 얻을 수 있었지만, 문제 3에서는 $\dfrac{x}{f(2x)-1} \geq \dfrac{1}{2}$을 적당히 변형시켜서 기울기의 개념과 관련지을 수 있었다. 한편 문제 3의 전형적인 풀이 방법과 본 연구에서 다루는 기하학적 해석을 통한 문제해결 방법을 비교하면, 본 연구에서 제시한 풀이방법이 기하학적이며 계산과정이 비교적 간단하다는 것을 알 수 있다.

문제 4(수학II). <그림 4>와 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$의 제1사분면 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 P가 곡선 위를 움직이면서 한없이 원점 O에 가까이 갈 때, $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$의 극한값을 구하여라.



<그림 4>

문제 4는 점 Q의 좌표를 $(x, 0)$로 놓고 $\overline{PQ}$를 x에 관한 식으로 나타내어 극한값을 구해도 된다. 그러나 구하는 값 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$가 원점 O와 점 P를 연결하는 직선의 기울기라는 기하학적 해석을 이

용하면 새로운 풀이 방법을 얻을 수 있다. 즉 점 P가 곡선 위를 움직이면서 한없이 원점 O에 가까이 갈 때, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$의 극한값은 $y=\log_2(x+1)$의 $x=0$에서의 미분계수와 같게 된다. 이제 미분을 이용하여 간단히 구하는 답을 얻을 수 있다.

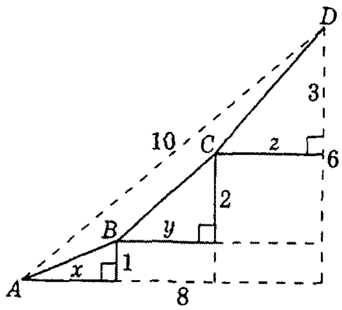
(2) 거리(길이)로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제의 해결

고등학교 수학교과서에 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)사이의 거리는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$이라는 것이 제시되어 있다. 이로부터 $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+1}$, x^2+y^2 등의 대수식은 점들 사이의 거리 또는 선분의 길이 개념과 관련된다는 것을 생각할 수 있다. 이에 관련된 문제들을 살펴보자.

문제 5(수학[2]). x, y, z는 양의 실수이고 $x+y+z=8$일 때, 다음 $f(x,y,z)$의 최솟값을 구하여라(Genkin, 2007, p. 61).

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$$

Genkin은 문제 5에 대한 자세한 논의는 제시하지 않고, <그림 5>와 함께 답으로 10을 제시하였다. 본 연구에서는 문제 5의 풀이를 대수식의 기하학적 해석과 관련하여 자세히 살펴보자.



<그림 5>

주어진 $f(x,y,z)$의 항 $\sqrt{x^2+1^2}$, $\sqrt{y^2+2^2}$, $\sqrt{z^2+3^2}$은 각각 두 변의 길이가 1과 x, 2와 y, 3과 z인 직각삼각형의 빗변의 길이를 나타낸다. 이때 $f(x,y,z)$는 빗변의 길이인 $\sqrt{x^2+1^2}$, $\sqrt{y^2+2^2}$, $\sqrt{z^2+3^2}$의 합이므로, 세 직각삼각형을 빗변들이 이어지도록 붙여놓고 생각하자. 그리

2) 고등학교 1학년에서 다루는 교과목 명임.

고 조건에 의해 $x+y+z=8$이므로, $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$의 해결을 위해 <그림 5>를 생각하면 된다.

$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$는 선분들의 합 $AB+BC+CD$이며, 그 최솟값은 10이 된다는 것을 알 수 있다. 한편 $f(x,y,z)$가 최솟값을 가지려면 세 삼각형의 빗변의 기울기가 일치해야 하므로 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{z}=\frac{3}{4}$인 경우이다.

즉 문제 5의 해결과정에서는 대수식 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$을 구성하는 항들 $\sqrt{x^2+1^2}$, $\sqrt{y^2+2^2}$, $\sqrt{z^2+3^2}$을 직각삼각형의 빗변의 길이로 해석하였으며, 이를 바탕으로 세 직각삼각형의 빗변들이 한 직선에 놓이는 경우에 최솟값을 구하였다.

한편 문제 5는 벡터 개념을 이용하여 해결할 수도 있다. 좌표가 (a,b)인 벡터 $\vec{x}$에 대해 원점으로부터 (a,b)까지의 길이는 $|\vec{x}|$이다. $\vec{a}=(x,1)$, $\vec{b}=(y,2)$, $\vec{c}=(z,3)$라 하면, 식 $\sqrt{x^2+1^2}$, $\sqrt{y^2+2^2}$, $\sqrt{z^2+3^2}$은 벡터의 크기(선분의 길이)로 나타내면 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$가 된다. 이제 임의의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$가 성립한다는 것으로부터 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대해 다음 부등식을 얻을 수 있다:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\le|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$$

$\vec{a}=(x,1)$, $\vec{b}=(y,2)$, $\vec{c}=(z,3)$을 위의 부등식에 대입하면, 다음을 얻을 수 있다:

$$\sqrt{(x+y+z)^2+6^2}\le\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+x}+\sqrt{z^2+9}$$

이때 $x+y+z=8$이므로, 구하는 최솟값은 10이 됨을 알 수 있다. 이때의 x, y, z는 등호가 성립하는 경우인 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{z}=\frac{3}{4}$일 때이다.

문제 6(수학). $y>0$, $x+y^2=7.25$, $y^2-z=2$, $y^2=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2-z}$이다. 이때, 식 $y(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z})$의 값을 구하여라(Genkin, 2007, p. 7).

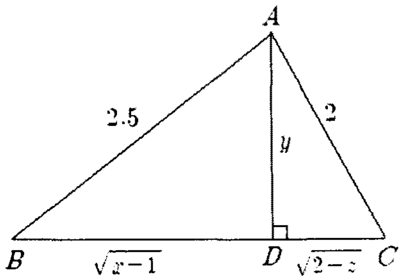
Genkin은 문제 6에서도 자세한 풀이는 제시하지 않고, <그림 6>과 유사한 그림을 제시하면서 정답만을 제시하였다. 이제 문제 6의 풀이를 대수식의 기하학적 해석과 관련하여 논의하자.

문제 6을 문제 5와 비교해 보자. 문제 5에서는 구하는 식 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$에서는 $\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{y^2+2^2}+\sqrt{z^2+3^2}$을 생각하여 대수식의 기하학적 해석을 찾을 수 있었다. 그러나 문제 6에서의 식 $y(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z})$에서는 문제 5에서와 같은 기하학적 해석을 찾기가 쉽지 않다.

문제 6의 구하는 식 $y(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z})$에서 $y\sqrt{x-1}$, $y\sqrt{2-z}$는 길이의 형태를 포함하

고 있지 않다. 오히려 조건으로 주어진 식인 $x+y^2=7.25$, $y^2-z=2$, $y^2=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2-z}$ 에 제곱의 형태가 포함되어 있다. 식 $x+y^2=7.25$를 $(x-1)+y^2=6.25$으로 변형시켜, $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ 임을 생각하면($x>1$이므로) $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2.5^2$이 된다. 얻어진 식은 문제 5에서와 같이 길이로 해석될 수 있다. 한편 식 $y^2-z=2$를 적당히 변형시켜 $0<z<2$임을 생각하면 $y^2+\sqrt{(2-z)^2}=2^2$이 된다.

결국 등식 $x+y^2=7.25$로부터 변의 길이가 $\sqrt{x-1}$, y, 2.5인 직각삼각형을 생각할 수 있으며, 등식 $y^2-z=2$로부터 변의 길이가 $\sqrt{2-z}$, y, 2인 직각삼각형을 생각할 수 있다. 이때 변 y는 공통이며 등식 $y^2=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2-z}$을 감안하면, 한 변 y를 공유하는 두 직각삼각형 ABD, ACD를 생각할 수 있다(<그림 6>).



<그림 6>

한편 문제 6에서 식 $y(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z})$은 삼각형 ABD와 ACD의 합인 삼각형 ABC의 넓이의 2배이므로, 구하는 값은 5가 된다.

문제 6에서도 문제 5와 같이, 주어진 대수식으로부터 선분의 길이라는 기하학적 해석을 찾아 문제를 해결하였다. 그러나 문제 5에서는 $\sqrt{a^2+b^2}$의 형태가 직접적으로 주어진 반면, 문제 6에서는 주어진 조건들을 적당히 변형시켜 $\sqrt{a^2+b^2}$의 형태를 유도하여 문제를 해결하였다.

문제 7(수학, Putnam Competiton, 1984). 실수 u, v가 $0<u<\sqrt{2}$이고 $v>0$을 만족할 때, 식 $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$의 최솟값을 구하여라.

식 $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$을 이변수 함수로 생각하여 최솟값을 구하려면, 편미분까지 생각

해야 한다. 그러나 이 식에 두 점 $(u,\ \sqrt{2-u^2})$, $\left(v,\ \dfrac{9}{v}\right)$사이의 거리라는 기하학적 해석을 부여하면, 문제해결에 쉽게 접근할 수 있다.

어떤 점의 좌표가 $(u,\ \sqrt{2-u^2})$라는 것으로부터 이 점이 원 $x^2+y^2=2$에 속한다는 것을 알 수 있고, 좌표 $\left(v,\ \dfrac{9}{v}\right)$으로부터는 점이 곡선 $y=\dfrac{9}{x}$에 속한다는 것을 알 수 있다. 즉 문제 7은 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=\dfrac{9}{x}$에 각각 속하는 점들의 거리를 제곱하여 그 최솟값을 구하는 문제가 된다.

곡선 $y=\dfrac{9}{x}$의 점 중에서 원의 중심으로부터의 거리가 최소인 점을 생각하자. 이를 위해 곡선 $y=\dfrac{9}{x}$이 $y=x$에 대해 대칭이라는 것을 생각하면, $y=\dfrac{9}{x}$와 $y=x$의 교점인 $(3,\ 3)$이 원의 중심인 (0, 0)으로부터 거리가 최소인 점이라는 것을 알 수 있다.

한편 $y=x$와 $x^2+y^2=2$의 교점이 $(1,1)$이므로, 두 점 $(3,\ 3)$와 $(1,1)$사이의 거리의 제곱이 우리가 구하는 최솟값이 된다. 그러므로 구하는 답은 8이다.

문제 7에서 살펴본 바와 같이, 대수식의 기하학적 해석을 활용한 문제해결은 비정형적인 문제에 대해 효과적으로 해결방법에 접근할 수 있는 가능성을 제공한다. 특히 문제 7은 주어진 식 $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2$을 점 $(u,\ \sqrt{2-u^2})$와 $\left(v,\ \dfrac{9}{v}\right)$사이의 거리라는 관점에서 해석하여, 경시대회 수준의 문제를 해결하는 한 예가 된다.

문제 8(적분과 통계, 2009년 9월 한국교육과정평가원 모의수능 문제). 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지며, $f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{3}$을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 최솟값을 구하여라.

문제 8에서 식 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 구간 $[0,\ 1]$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 길이라는 기하학적 해석을 가진다. 따라서 구간 $[0,\ 1]$에서 주어진 그래프의 길이가 최소가 되는 경우는 그 그래프가 직선인 경우이다. 그러므로 구하는 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 최솟값은 원점 (0, 0)과 점 $(1,\ \sqrt{3})$사이의 거리이며, 그 값은 2이다.

문제 8이외에도 고등학교 수학교과서에 정적분의 활용과 관련하여, 식의 기하학적 해석에 관련된 내용들이 기술되어 있다. 즉 고등학교 수학교과서에 식 $S=\int_a^b |f(x)|dx$, $V=\int_a^b S(x)dx$는 넓이, 부피의 개념으로 해석되며, 이들을 활용한 문제해결이 다양하게 다루어지고 있다. 이러한 내용들의 취급은 수식에 대한 다양한 의미 부여라는 측면에서 학생들에게 의미로울 것이다.

(3) 넓이로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제의 해결

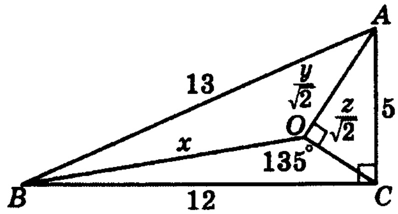
한 변이 a인 정사각형의 넓이는 $S=a^2$, 가로와 세로의 길이가 a, b인 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로, 일차식들의 곱인 이차식은 넓이로 해석될 수 있는 가능성을 가진다. 예를 들어, 유클리드의 원론에는 피타고라스 정리인 등식 $a^2+b^2=c^2$은 직각삼각형의 각 변에 정사각형을 작도하여 이들의 넓이를 비교하여 증명되어 있다. 이제 넓이로 해석하여 증명되는 대수식의 몇몇 예를 살펴보자.

문제 9(수학). 세 양의 실수 x, y, z에 대해, $x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169$, $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=25$, $x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144$가 성립한다고 하자. 이때 x, y, z의 값을 구하지 말고, 식 $xy+yz+zx$의 값을 계산하여라(Genkin, 2007, p. 7).

Genkin(2007, p. 8)의 해법을 살펴보자. 문제의 조건들을 다음 연립방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}=169 \\ \dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}=25 \\ x^2+xz+\dfrac{z^2}{2}=144 \end{cases}$$

피타고라스 정리의 역에 의해, 수 $\frac{y}{\sqrt{2}}$, $\frac{z}{\sqrt{2}}$, 5는 각 AOC가 직각인 직각삼각형의 변들이 된다. 그리고 수 x, $\frac{y}{\sqrt{2}}$, 13은 각 AOB가 135°인 삼각형 AOB의 변들이다. 이 결론은 코사인 정리의 역을 이용하여 얻어질 수 있다. 유사한 방법으로, x, $\frac{z}{\sqrt{2}}$, 12는 각 BOC가 135°인 삼각형 BOC의 변들이다. 이들 삼각형을 <그림 7>과 같이 나타낼 수 있다.



<그림 7>

$5^2+12^2=13^2$이므로, 삼각형 ABC에서 $\angle ACB=90^\circ$이다. 그리고 $S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot xy\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xy$, $S_{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}yz$, $S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{z}{\sqrt{2}}\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xz$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$이다. 식 $xy+yz+zx$의 값이 삼각형 ABC 넓이의 네 배와 같다는 것을 감안하면, $xy+yz+zx=120$을 얻는다.

문제 9에서 주어진 조건의 식들 $x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169$, $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=25$, $x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144$은 모두 이차식이며, 이들은 모두 넓이와 관련될 수 있다. Genkin은 $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=25$를 피타고라스 정리와 연결짓고, $x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169$, $x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144$를 코사인 정리와 관련시켜 넓이를 이용하여 문제를 해결하였다. 이러한 풀이 방법의 장점은 문제 9의 기술에서 살펴보았듯이, 연립방정식을 해결하여 실제로 x, y, z의 값을 구하지 않고도, 식 $xy+yz+zx$의 값을 구할 수 있다는 것이다. 이러한 접근은 대수식의 기하학적 해석을 활용한 문제해결의 장점을 잘 보여준다고 할 수 있다.

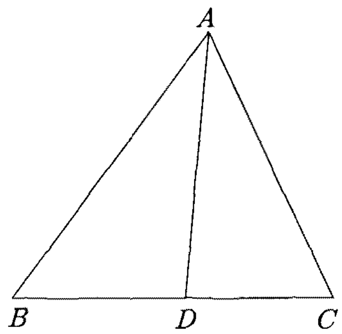
가령 방정식 $\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}=\sqrt{2}$의 양수인 해를 구한다고 할 때에도, $\sqrt{1+x^2-x}$, $\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}$의 기하학적 해석을 바탕으로 문제 9와 유사한 방법으로 해결할 수 있다. 즉 $\sqrt{1+x^2-x}$는 두 변이 1, x이며 이들 사이의 끼인각이 60°인 삼각형에 코사인 정리를 이용하여 얻어질 수 있고, $\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}$는 두 변이 1, x이며 이들 사이의 끼인각이 30°인 삼각형에 코사인 정리를 이용하여 얻어질 수 있다. 이제 문제의 조건에 적당한 삼각형을 작도하여, 넓이를 이용하면 문제가 해결될 수 있다.

넓이 개념을 문제해결의 도구로 활용될 수 있다. 실제로 한인기 · 신현용(2001)은 삼각형의 각의 이등분선에 관련된 비례식을 넓이 개념을 이용하여 증명하고, 삼각형의 닮음조건을 넓이로 이용하여 증명하는 방법을 소개하였다. 한인기 · 신현용의 연구와 Genkin의 연구는 모두 넓이 개념에 관련된 문제해결을 진지하게 다루었는데, 특히 Genkin은 주어진 대수식의 기하학적 해석을 통해 비정형적인

문제를 효과적으로 해결하는 구체적인 방법을 제시하였다. 이와 유사한 문제해결의 예들을 몇몇 살펴보자.

문제 10(수학II). 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 각의 이등분선 AD를 그었다. $AB=c$, $AC=b$라 할 때, $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$라는 것을 증명하여라.

문제 10의 다양한 증명방법은 한인기 · 꾸쉬니르(2008)의 연구에 제시되어 있다. 여기에 제시된 증명 방법의 하나를 대수식의 기하학적 해석이라는 관점에서 재구성해 보자. 등식 $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$에서 우변의 분모에 있는 $b+c$를 좌변으로 이항하면, $b\cdot AD+c\cdot AD=2bc\cos\frac{A}{2}$가 된다(<그림 8>).



<그림 8>

등식 $b\cdot AD+c\cdot AD=2bc\cos\frac{A}{2}$에서 $b\cdot AD$는 삼각형 ACD의 넓이에 관련되며, $c\cdot AD$는 삼각형 ABD의 넓이에 관련되며, $2bc\cos\frac{A}{2}$는 삼각형 ABC의 넓이에 관련시켜 해석할 수 있다. 이를 위해, 등식 $b\cdot AD+c\cdot AD=2bc\cos\frac{A}{2}$의 양변에 $\sin\frac{A}{2}$를 곱하고, 우변의 2를 좌변으로 이항하면, $\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}=bc\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$가 된다. 얻어진 식에서 좌변의 두 항은 각각 삼각형 ACD, ABD의 넓이이다. 그리고 우변에서 $\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sin A$임을 감안하면, 등식의 우변은 삼각형 ABC의 넓이가 된다.

삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ACD와 ABD의 넓이의 합이므로, 등식 $\frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin\frac{A}{2} = bc\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}$, $b \cdot AD + c \cdot AD = 2bc\cos\frac{A}{2}$가 증명된다.

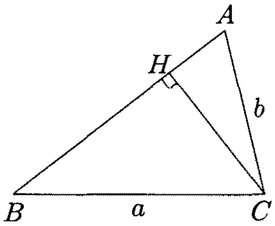
문제 10의 증명에서는 등식 $b \cdot AD + c \cdot AD = 2bc\cos\frac{A}{2}$에서 식 $b \cdot AD$, $c \cdot AD$, $2bc\cos\frac{A}{2}$를 삼각형의 넓이에 관련시켜 생각하였고, 이들을 삼각형의 넓이를 나타내는 식으로 변형시키기 위해 양변에 $\sin\frac{A}{2}$를 곱하여 정리하였다. 이를 통해 대수식 $b \cdot AD + c \cdot AD = 2bc\cos\frac{A}{2}$를 삼각형들의 넓이 공식으로 변형시켜 쉽게 문제를 해결할 수 있었다. 문제 10과 유사한 기하학적 해석에 관련되지만, 선분의 길이 자체가 대수식에 포함되지 않는 한 가지 문제를 더 살펴보자.

문제 11(수학II). 삼각형 ABC의 각 A, B에 대해, 등식 $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$을 증명하여라.

문제 10과는 달리 문제 11의 주어진 식에는 변들의 길이로 해석될 수 있는 곱의 형태가 포함되어 있지 않다. 그러므로 문제 11을 해결하기 위해, 주어진 등식의 양변에 선분을 포함한 적당한 식을 곱하여 넓이와 관련시킬 수 있다.

삼각형 ABC에서 $BC = a$, $AC = b$라 하고, $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$의 양변에 $\frac{1}{2}ab$를 곱하자. 그러면 $\frac{1}{2}ab\sin(A+B) = \frac{1}{2}ab\sin A\cos B + \frac{1}{2}ab\cos A\sin B$를 증명하면 된다.

이 식에서 $\frac{1}{2}ab\sin(A+B) = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - C) = \frac{1}{2}ab\sin C$이므로, $\frac{1}{2}ab\sin(A+B)$는 삼각형 ABC의 넓이이다. 이제 식 $\frac{1}{2}ab\sin A\cos B$와 $\frac{1}{2}ab\cos A\sin B$의 의미를 생각하자. $\frac{1}{2}ab\sin A\cos B$에서 $b\sin A$는 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 높이 CH이고(<그림 9>), $a\cos B$는 선분 BH이다. 결국 $\frac{1}{2}ab\sin A\cos B$는 삼각형 BCH의 넓이이다. 한편 $\frac{1}{2}ab\cos A\sin B$에서 $a\sin B$는 CH이고 $b\cos A$는 AH이므로, $\frac{1}{2}ab\cos A\sin B$는 삼각형 ACH의 넓이이다.



<그림 9>

<그림 9>에서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ACH와 BCH의 넓이의 합과 같으므로, 넓이에 대한 등식 $\frac{1}{2}ab\sin(A+B)=\frac{1}{2}ab\sin A\cos B+\frac{1}{2}ab\cos A\sin B$이 증명되고, 이로부터 삼각함수에 대한 등식 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$이 증명된다.

살펴본 바와 같이, 문제 9, 10, 11에서는 넓이에 관련된 기술이 문제 자체에는 제시되지 않았지만, 주어진 식을 넓이와 관련시켜 문제해결의 방향을 설정하였다. 특히 문제 10과 11에서는 주어진 대수식을 적당히 변형시켜 넓이를 나타내는 식으로 바꾸어서 문제를 해결하였다.

5. 결 론

본 연구는 대수식의 기하학적 해석을 통해 새로운 문제해결 방법을 탐색하는 것에 관련된 연구로, 첫째 수학 문제해결에서 기하학적 접근에 대해 고찰하고, 둘째 고등학교 수준의 비정형적인 문제들을 기하학적 해석을 통해 새롭게 해결하며, 이에 관련된 문제해결의 특징들을 분석하였다.

수학 발달의 역사에서 대수식에 대한 기하학적인 접근은 기하학적 대수, 기하학적-대수학적 형식 불역의 원리 등의 개념과 관련하여 논의되어진다. 수학의 대수적인 측면과 기하학적 측면은 오래 전부터 연결성을 가져왔으며, 서로를 보완하면서 확장되고 발전되어 왔다.

한편 수학 교수-학습에서도 수학의 한 영역 내의 연결성, 수학의 다양한 영역 간의 연결성은 체계적이고 유의미한 학습을 위한 필요조건이며, 지식 구조의 체계성을 위한 전제조건이 된다. 특히 브루너는 수학의 일반적인 교수 원리의 하나로 연결이론을 제시하며, 수학 교수-학습 과정에서 수학적 연결성의 구현, 학생들에 의한 이러한 연결성의 이해를 강조하였다.

본 연구에서 제시한 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결은 이러한 수학적 연결성의 구체적 구현의 한 예라 할 수 있다. 특히 본 연구에서는 수학적 연결성을 바탕으로 새로운 문제해결 방법을 발명하는 다양한 상황을 제시함으로써, 중등학교 수학교육에서 수학적 지식의 발명 또는 재발명을 위한 다양한 가능성을 제시할 수 있었다.

본 연구에서는 기울기로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들, 거리(길이)로 해석될 수 있는

대수식에 관련된 문제들, 넓이로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들을 기하학적 해석을 바탕으로 해결하였으며, 이를 바탕으로 문제해결 과정에 관련된 대수식의 기하학적 해석, 대수식의 기하학적 해석의 특징, 문제해결 과정의 특징들을 고찰하였다.

첫째, 기울기로 해석될 수 있는 대수식에 관련된 문제들은 $\frac{b}{a}$, $\frac{d-b}{c-d}$인 형태를 가지는 대수식을 포함한다. 식 $\frac{b}{a}$의 기하학적 해석은 $(0, 0)$, (a, b)를 연결하는 선분의 기울기이며, $\frac{d-b}{c-a}$는 (a,b), (c,d)를 연결하는 선분의 기울기로 해석된다. 본 연구에서는 이 대수식들을 포함하는 비정형적인 문제들의 새로운 풀이 방법을 찾고, 그 문제해결의 특징을 기존의 풀이 방법과 비교하여 분석하였다.

둘째, 거리(길이)로 해석되는 대수식은 공식 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$과 관련된다. 본 연구에서는 대수식 $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{y^2+4}$, $\sqrt{z^2+9}$, $x+y^2=7.25$, $y^2-z=2$, $y^2=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2-z}$, $(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$, $\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$에 대한 기하학적 해석을 제시하였으며, 이를 바탕으로 문제해결 방법의 탐색을 모색하였다.

셋째, 도형의 넓이는 선분들의 곱(예를 들어 정사각형의 넓이는 $S=a^2$, 직사각형의 넓이는 $S=ab$)으로 표현되므로 넓이로 해석될 수 있는 대수식은 2차식의 형태를 띈다. 본 연구에서는 대수식 $x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169$, $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=25$, $x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144$, $\sqrt{1+x^2-x}$, $\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}$, $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$이 기하학적으로 어떻게 해석되는가에 대해 논의하였고, 이를 활용한 새로운 문제해결 방법에 대해 고찰하였다. 특히 대수식의 기하학적 해석을 위해 보조요소들이 필요한 경우가 있는데, 이에 대해서도 다양한 논의를 제시하였다.

본 연구를 통해 대수식의 기하학적 의미, 대수학과 기하학의 연결성, 수학 문제해결에서 대수식의 해석에 관련된 다양한 접근을 제시하였다. 특히 고등학교 수학교실에서 직접 이용할 수 있는 다양한 수준의 비정형적인 문제들을 대상으로 연구하였기 때문에, 고등학교의 수학 교수-학습 과정에서 직접적으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

구광조 외 (1988). 수학과교육론, 서울: 갑을출판사.

남승인 · 류성림 (2002). 문제 해결 전략 지도의 실제, 서울: 형설출판사.

신현성 · 김경희 (1999). 수학적 문제해결, 서울: 경문사.

우정호 (2004). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.

정동권 · 김수미 · 김지원 (2009). 수학 문제해결 지도의 이해, 서울: 학지사.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 꾸쉬니르 (2008). 뇌를 자극하는 수학공부, 서울: 경문사.

한인기 · 신현용 (2001). 다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, 155-170.

Euclid (1949). *Nachala Evclida*(Morduhai-Boltovski D.D 역), Moscow: GIT-TL. (유클리드 원론의 러시아어 번역본)

Genkin G. Z. (2007). *Geometricheskie Resheniya Negeometricheskih Zadach*, Moscow: Prosveshenie.

Kolmogorov A .N. (1959). *O professii matematika*, Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

Larson L. C. (1983). *Problem-Solving Through Problems*, New York: Springer-Verlag.

Lenchner G. (1983). *Creative Problem Solving in School Mathematics*, Boston: Houghtom Mifflin Company.

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준(류희찬 외 역), 서울: 경문사.

Ostrovski A .I,. & Kordemski B. A. (1960). *Geometriya Pomogaet Arifmetife*, Moscow: FIZMATGIZ.

Polya (2005). 어떻게 문제를 풀 것인가(우정호 역), 서울: 교우사.

Schoenfeld A. H. (1980). Heuristics in the Classroom. In Krulik S. & Reys R.E.(Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp.9-22), Virginia: NCTM.

A Study on Problem Solving Related with Geometric Interpretation of Algebraic Expressions

Lyou, Ikseung
Jeonju High School, 560-862, Korea
E-mail : infgrp@hanmail.net

Han Inki+
Dept. of Math. Edu. and Education Research Institute, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we studied problem solving related with geometric interpretation of algebraic expressions. We analyzed algebraic expressions, related these expressions with geometric interpretation. By using geometric interpretation we could find new approaches to solving mathematical problems. We suggested new problem solving methods related with geometric interpretation of algebraic expressions.

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : algebraic expression, geometric interpretation, problem solving
+ correspondent author