Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 37, No. 2, pp. 144-152, June 2011.

이동시간의 변화를 고려한 차량경로 문제의 분지평가법을 이용한 최적화 해법

이용식 · 이충목 · 박성수†

KAIST 산업 및 시스템 공학과

A Branch-and-price Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Dependent Travel Times

Yongsik Lee · Chungmok Lee · Sungsoo Park

Department of Industrial and Systems Engineering, KAIST, Daejon, Korea

Most of the models for the vehicle routing problems studied in the literature assumed constant travel times. However, those approaches may give infeasible solutions when traffic congestion causes delays in travel time. To overcome such difficulty, there have been some researches considering the change of the travel time which is called the time dependent vehicle routing problem (TDVRP). TDVRP assumes that the travel time between two locations is not only affected by the distance traveled, but by many other factors including the time of the day. In this paper, we propose a branch-and-price algorithm to solve the TDVRP. The time dependent property of the travel time is dealt with an enumeration scheme with bounding procedures in the column generation procedure identifying a profitable route. The proposed algorithm guarantees the "Non-passing" property to be held in the solutions. The algorithm was tested on problems composed of the Solomon's benchmark instances for 25 and 50 nodes. Computational results are reported.

Keywords: Time Dependent Vehicle Routing Problem, Labeling Algorithm, Non-passing, Branch-and-price

1. 서 론

차량경로 문제(Vehicle Routing Problem; VRP)는 차량의 기지에 해당하는 공급지점(Depot)에서 출발한 차량이 여러 곳에 산재해 있는 고객들(Customers)을 특정한 순서대로 방문하여 배달(Delivery) 또는 수집(Pickup) 등의 서비스를 수행하고 다시 공급지점으로 돌아오는 최소 비용의 경로를 결정 하는 문제이다. VRP는 항공, 기차, 선박, 트럭 등을 이용한 승객 또는 상품 수송 분야에서 광범위하게 발생하는 문제로 Danzig and Ramser (1959)에 의해 소개된 이후 오랜 시간에 걸쳐 다양한 분야에 많은 연구가 수행 되어 왔고, 성공적인 적용사례도 발견되고 있다.

차량경로 문제는 일반적으로 풀기 어려운 문제(NP-hard)로 알려져 있다(Lenstra and Rinnooy 1981). 현실에서 나타나는 차량경로 문제에는 경로를 생성하는데 여러 가지 제약조건이 존재하기 때문에 매우 다양한 형태의 차량경로 문제를 고려할 수 있으며 차량의 운용, 경로의 설정, 시간의 제약 등의 조건에 따라 여러 형태의 문제들이 연구 되어 왔다. 지금까지 차량경로 문제의 연구의 대부분이 두 지점간의 이동시간을 거리에 비례하는 고정된 값으로 가정하였다. 그러나 실제로 운송이 이루어질 때의 현실상황에서 이동시간은 고정된 값을 가지지 않고 때때로 매우 큰 변화를 보여주는 것이 사실이다. 즉, 실제로 두 지점 간의 이동시간이라는 것은 주어진 거리에 영향을 받을 뿐만 아니라 그 날의 시간구간을 포함한 다른 많은 요소들에 의해 영향을 받게 된다. 때문에 하루 동안 두 지점간의 이

이 논문의 내용은 2010 대한산업공학회 추계학술대회에서 발표되었음.
† 연락저자 : 박성수 교수, 305-732 대전광역시 유성구 대학로 291 KAIST 산업 및 시스템 공학과, Tel : 042-350-3121, Fax : 042-350-3110, E-mail : sspark@kaist.ac.kr
2011년 5월 9일 접수; 2011년 5월 19일 게재 확정.

동시간이 일정하다고 모델을 가정하는 것은 교통 혼잡등의 이유로 이동시간이 크게 변화하는 구간이 있는 경우 현실적인 변화 부분을 반영하지 못하는 문제를 가지고 있다.

시간의 변화에 따라 두 지점 간 이동시간이 변하는 차량경로 문제(Time Dependent Vehicle Routing Problem; TDVRP)에 관한 연구는 Maladraki andDaskin(1992)에 의해 처음 소개된 이후로 Hill and Benton(1992), Ichoua *et al*.(2003)와 같은 몇몇의 논문들을 제외하고는 연구가 거의 이루어지지 않았다. Hill and Benton(1992)에 의하면 이전까지 시간의 변화에 따른 이동시간의 변화를 고려하는 연구가 많이 이루어지지 못한 이유는 다음의 세 가지 이유 때문이다: (i)모든 이동구간 간에 시간대별로 변화하는 이동시간을 정밀하게 측정하는 일은 매우 어렵다; (ii) 이동시간의 변화를 기록하고 통계적 의미를 추출하기 위해서는 매우 강력한 컴퓨팅 기술이 필요하다; (iii) 비록 이동시간에 대한 정확한 데이터가 축적되어 사용가능 하다고 해도 이를 이용해서 효율적으로 최적해를 구할 수 있는 알고리즘이 개발되지 못했기 때문이다.

그러나 최근의 급격한 컴퓨팅 파워의 증가와 유비쿼더스 기술로 대변되는 지리정보(GIS), 위성을 통한 위치 확인 시스템(GPS)등의 대중화로 기존에 불가능 했던 데이터의 축적 및 분석이 가능해 지고 있다. 따라서 이동시간의 변화를 고려한 차량경로 문제를 해결하기 위한 선행조건이 충족되었다고 할 수 있으며, 단지 효과적인 최적화 알고리즘의 개발만이 남아 있다고 볼수 있다. 또한 Gabali(2010)와 Kuo(2010)이 다룬 바와 같이, 이산화탄소 배출 규제강화, 석유 소비량등의 환경관련 요소에 대한 비용이 차량경로 설정에 미치는 영향력이 점차 증가되는 추세에서 이동시간의 변화에 따른 속력의 변화와 밀접한 연관성을 가지는 환경관련 요소들을 차량경로 문제에 포함시킨다는 측면에서 TDVRP 풀이에 대한 연구의 필요성이 점차 커지고 있다.

본 논문 에서는 TDVRP에 대해서 이론적 연구를 통한 최적화 모형을 수립하고 그에 따른 최적의 해를 찾는 알고리즘을 제시하고자 한다. 특히, 이동시간의 변화를 고려 하였을시 나중의 효율적인 시간대에 출발한 차량이 같은 이동구간(Arc)상에서 먼저 출발한 차량을 추월하는 현실적으로 불가능한 경우를 방지하는 "Non-passing" 특성을 보장하는 최적해를 구하는 알고리즘을 최초로 제시한다. "Non-passing" 특성을 보장하기 위해서는 시간에 따라 변화하는 이동시간을 고려하여야 하는 풀이과정의 어려움 때문에 기존 연구들에서는 최적화 모형 보다는 Ichoua *et al*.(2003), Donati *et al*.(2008)등이 제시한 것과 같이 대부분의 휴리스틱 알고리즘에 기반한 해법을 제시해왔다. 본 논문에서는 열생성 기법에 기반한 최적화 모형을 통해 이동시간의 변화를 분리하여 비교적 쉽게 다루는 방법을 제시한다. 이는 일반적으로 알려진 분할기법(Decomposition Approach)의 일종으로 다루기 어려운 제약 조건을 더욱 작은 단위로 쪼개어 다루기 때문에 전체적인 실행 효율을 높일 수 있는 장점이 있다.

2. 관련 연구

서론에서 설명한 바와 같이 TDVRP에 관한 연구는 아직 많이 행해지지 않은 것이 사실이다. 특히 최적해를 구하는 알고리즘을 제시한 경우는 더욱 찾아보기 힘들다. 다만, 유일하게Malandraki(1989)과 Malandraki and Daskin(1992)은 최적해를 구하는 수리모형을 차량의 흐름을 기반하여 제시하였다. 이 모형에서는 하루 동안의 시간 변화를 반영하는 시간구간을 총 M개로 설정하고, 노드 i와 노드 j사이의 이동구간을 M개의 가상의 병렬이동구간(Parallel Arcs)으로 확장시켜 문제를 구성하였다. 즉, 노드 i에서 노드 j로 이동 시 각 시간구간 별로 다른 이동시간의 정보를 가지게 되며 차량의 출발 시각을 기준으로 속한 시간구간상의 이동구간을 선택하는 형태로 TDVRP 수리모형을 제시하였다. 그러나 그들이 제시한 수리모형은 기존의 차량경로 문제에 비해 많아진 정수변수와 제약식의 개수로 인한 어려움 때문에 이웃 탐색(Neighborhood search)을 이용한 휴리스틱 알고리즘이 제시되었다.

위 모형의 가장 치명적인 단점은 차량의 출발 시각에 따라 각기 다른 이동시간 구간(arc)을 사용하기 때문에 같은 지점 간을 이동하는 두 대의 차가 존재 하는 경우 빠른 시간구간에 출발한 차가 느린 시간구간에서 먼저 출발한 차를 추월 하는것이 가능하게 될 수 있다는 것이다. 다시 말하면, 이 모형은 "Non-passing" 특성을 보장 하지 못한다. 이를 보완하기 위해 Malandraki and Daskin(1992)은 노드에서 차량이 기다릴 수 있도록 하였지만, 필요 없는 기다림으로 인한 많은 시간낭비가 발생되는 단점이 존재 하였다. Hill and Benton(1992)은 이 문제를 극복하고자 전 노드의 출발 시간구간의 속도와 도착노드의 도착시간구간의 평균속도를 이용하여 문제를 해결 하는 방법을 제안 하였지만 이 역시 완벽하게 "Non-passing" 특성을 극복하지 못하였다.

Sung *et al*.(2000)은 이동시간을 고려한 최단거리 문제에서 이동시간 구간이 아닌 이동속도 구간의 변화를 이용하여 각각의 이동구간 별로 달라지게 되는 이동시간을 계산함으로써 "Non-passing" 특성을 보장하는 방법을 제시하였다. 이들이 제시한 이동시간 계산법에서 이동속도의 변화는 각 시간구간 별로는 일정하지만 시간대에 따라 달라지는 계단형 함수(Step Function)를 사용하여 정의되었으며 두 노드 i와 j간의 이동시간을 계산하는 과정은 다음과 같다.

M: 총 시간구간의 개수

$[t_k, t_{k+1})$: $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$로 구분된 시간구간

v_k : 시간구간 $[t_k, t_{k+1})$에서 노드 i에서 j로 이동할 때의 속도

d : i에서 차량의 출발 시각

s : 노드 i에서 노드 j까지의 이동거리

$T(d)$: 노드 i에서 노드 j까지 이동하여 도착한 시각. 다음의 식을 통해 계산 된다:

$$T(d)=\begin{cases}\dfrac{s}{v_0}+d,\ if\ \ \dfrac{s}{v_0}<t_1-d\\ \dfrac{(s-s_0)}{v_1}+t_1,\ if\ \ \dfrac{(s-s_0)}{v_1}<t_2-t_1\\ \dfrac{(s-s_1)}{v_2}+t_2,\ if\ \ \dfrac{(s-s_1)}{v_2}<t_3-t_2\\ \dfrac{(s-s_2)}{v_3}+t_2,\ if\ \ \dfrac{(s-s_2)}{v_3}<t_4-t_3\\ \quad\vdots\\ \dfrac{(s-s_{k-1})}{v_k}+t_k,\ if\ \ \dfrac{(s-s_{k-1})}{v_k}<t_{k+1}-t_k\end{cases} \tag{1}$$

, 이때 $s_l=s_{l-1}+v_l(t_{l+1}-t_l)$, for all 1 ≤ 1 ≤ k 그리고 $s_0=v_0(t_1-d)$이다.

위의 계산과정을 간단하게 요약하면, 만약 속도구간이 이동중에 변하게 된다면 변하는 시점을 기준으로 이전 까지는 출발시 속한 속도구간의 이동속도를 사용하고 변하는 지점에서 도착지까지 남은 거리를 계산하여 변화된 속도를 이용해서 이동시간을 계산하는 과정을 도착 노드에 도착할 때 까지 속도구간이 변할 때 마다 행하는 것이다. 이 계산법을 이용하면 "Non-passing" 특성을 보장하는 이동시간을 얻을 수 있다. 하지만, 이동시간이라는 파라메터가 고정적이지 않고 출발시각에 따라 달라지기 때문에 정수계획법등을사용한 수리모델의 수립과 풀이가 매우 어렵기 때문에 Ichoua *et al*.(2003)는 차량경로 탐색 문제에서 위의 계산법을 바탕으로 Tabu 탐색에 기반한 휴리스틱 해법을 제시하였다. 본 연구에서는 Sung *et al*.(2000) 가 제시한 "Non-passing"을 보장하는 이동시간의 계산법을 도입하여 차량경로 문제의 최적해를 구하는 알고리즘을 제시하려 한다. 본 연구에서 제시하는 알고리즘은 열생성 기법에 기반하여 복잡한 이동시간 계산에 대한 어려움을 열생성 부문제로 분리하는 분할기법을 사용하는 것이다.

3. 문제정의와 수리모형 구축

3.1 문제정의 및 가정

본 논문에서 다루는 문제는 다음과 같이 정의된다. $N=\{1, \cdots, n\}$의 고객노드와 단일 공급지점(Depot)을 차량의 출발과 도착지점으로 다르게 구분하여 분리한 $\{0, n+1\}$노드를 합한 총 $N^+=\{0, 1, \cdots, n, n+1\}$의 노드가 존재하며 각 노드 사이에는 이동구간(Arc)의 집합 A가 존재한다. 또한공급지점에서는 K대의 차량을 보유하며 각 차량의 용량은 Q로 모두 동일하다고 가정한다. 또한 노드 i와 j사이의 이동구간에는 거리 s_{ij}에 대한 정보가 주어지고고객노드 i마다 서비스 소요시간 θ_i가 존재한다. 고객노드의 위치와 서비스 되어야할 물량은 모두 알려져 있다고 가정한다. 차량의 출발과 종착은 공급지점에서만 가능하며 모든 차량은 공급지점의 업무가능시간에 동시에 출발한다. 또한, 각 고객노드의 물량은 차량의 1회 방문에 의해서 만족되며, 각 고객노드는 차량의 1회 방문만을 허용한다. 각 차량은 각 차량의 경로 r에 포함된 고객노드 i의 물량을 q_i라고 할 때 용량제약 $\sum_{i\in r} q_i \le Q$를 만족하여야 한다. 그리고 각 노드 i는 서비스 가능 시간제약(time window)$[e_i, l_i]$을 가진다. 이 때 차량은 시각 e_i보다 일찍 도착할 수 있으나 이 경우 차량은 서비스를 시작하기 위해서는 시각 e_i까지 대기해야 한다. 반면에 방문 한계시간 l_i보다 늦게 도착하는 경우는 허용되지 않는다. 이동속도의 변화는 교통상황등을 반영하여 만약 시간구간의 개수가 총 M개라면, $[t_k, t_{k+1})$, $k=\{1, \cdots, M\}$의 시간구간에 따른 속도 변화 구간을 가진다. 이들 시간 변화는 이미 알려져 있다고 가정하며 이런 시간구간에 따른 변화는 모든 이동구간(arc)에 동일하게 적용된다고 가정한다. 이동구간마다 속도의 변화가 다른 것이 보다 현실적이지만, 알고리즘 적용의 어려움과 도시단위의 거시적 관점에서 속도의 변화를 고려한다는 실용적인 측면에서 이와 같이 가정하였다. 이 가정에 의해서 우리는 몇 가지 유용한 결과를 얻을 수 있는데, 그 중 하나는 이동시간이 삼각 부등식을 만족하게 되는 것이다. 시간 구간에 따른 이동속도는 같은 시간구간에서는 모든 이동구간(arc)에 대해서 동일하고, 시간 구간 별로는 다른계단형 함수(Step Function)의 모습을 가진다. 이는 제 2장에서 설명한 Sung *et al*.(2000)가 제안한 모형과 본질적으로 같은 것으로 시간 구간의 개수 M이 증가함에 따라 속도 변화의 현실성이 커지게 되며 하나의 구간 내에서의 속도는 일정하기 때문에 계산과정이비교적 간단해지는 장점을 가진다.

3.2 차량의 경로에 기반한 수리모형

본 연구에서는 기존의 차량경로 문제에서 많이 사용되는 열생성기법(Desrochers *et al*., 1992)에기반한 수리모형을 사용한다. 열생성 기법에서는 차량의 경로를 하나의 열로 표현하여 모든 가능한 차량의 경로 중에서 모든 고객을 방문하는 제약을 만족하는 효율적인 경로의 집합을 선택하는 문제로 수리모형을 표현한다. 즉, 모든 고객노드를 방문(포함) 하고, 동시에 경로의 이동시간의 합이 최소인 경로들을 선택하는 집합 분할(Set Partitioning) 형태를 가지게 된다. 이 때, 가능한 모든 차량경로를 미리 모두 생성하여 고려하는 것은 현실적으로 매우 어렵기 때문에 제한된 개수의 경로들의 집합만을 대상으로 하는 제한된 주문제(Restricted Master Problem)과 효과적인 차량경로를 필요에 의해 생성하는 열생성 부문제(Subproblem)로 분할하여 다룬다.

3.2.1 효율적인 차량경로 선택의 수리모형

차량의 경로에 기반한 수리모형에 사용 되는 용어는 다음과 같다.

R : 차량경로들의 집합

c_r : 차량경로 r의 총 이동시간, $r \in R$

δ_{ir} : 만약 노드 i가 차량경로 r에 의해 처리되면 1, 그렇지 않으면 0, $i \in N$, $r \in R$

결정 변수는 다음과 같다.

x_r : 만약 차량경로 r이 사용 된다면 1, 그렇지 않으면 0, $r \in R$

위의 기호를 이용하여 다음과 같은 수리모형을 얻는다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{r \in R} c_r x_r && (2) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{r \in R} \delta_{ir} x_r = 1 \qquad \forall i \in N, && (3) \\ & \sum_{r \in R} x_r = K, && (4) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in R. \end{aligned}$$

위의 수리모형의 목적식 (2)는 경로들의 총 이동시간의 합을 최소화하려 함을 의미한다. 제약식 (3)는 선택 되는 차량들의 경로가 모든 고객노드들을 반드시 한 번씩 방문해야 한다는 것이며, 제약식 (4)는 선택된 경로 수가 운용 가능한 차량의 총 대수와 같아야 함을 의미한다. 모형대로라면 모든 차량을 반드시 운용해야 하지만, 출발 공급지점과 도착 공급지점 사이에 가상의 이동구간을 설정한 후 이동시간을 0으로 놓음으로써 운용되지 않는 차량을 쉽게 표현할 수 있게 된다. 하지만, 위의 수리모형의 계산상 문제점은 차량경로들의 집합인 R에 속한 가능한 차량경로의 수가 매우 많다는 것이다. 따라서 보다 효율적인 문제풀이를 위해 본 논문에서는 열생성기법을 이용한다. 열생성 기법에서는 위의 수리모형의 선형완화식을 대상으로 모든 가능한 차량경로를 미리 모형에 포함하는 것이 아닌 제한된 일부경로들 $R' \subseteq R$을 대상으로 선형완화식을 푼 후에 그 결과를 이용하여 목적함수 값을 개선할 수 있는 차량경로들을 찾아 모형에 추가하고 다시 푸는 과정을 반복하게 된다. 선형완화식의 목적함수 값의 개선가능여부의 판단은 현재의 선형완화식에 대해서 어떤 차량경로 r의 할인가(reduced cost)가 음이면 개선가능성이 있는 경로이며 이를 수리모형에 열로써 추가하게 된다. 모든 경로의 할인가가 양이거나 0이라면 개선가능성이 있는 경로가 더 이상 존재하지 않기 때문에 열생성을 종료하게 된다. 만약 음의 할인가를 가지는 차량경로가 존재하지 않는다면 현재의 제한된 일부경로의 선형완화식을 이용하여 얻은 최적해가 전체 경로를 이용하여 구한 최적해의 목적값과 일치하게 된다. 따라서 문제정의와 가정을 만족하며 할인가가 음인 차량경로를 찾아내는 수리모형이 추가로 필요하게 된다. 이때, 위의 최소의 이동시간 조합을 찾는 문제를 일반적으로 주문제(Master Problem)라고 하며, 제한된 경로집합을 사용할 경우 제한된 주문제(Restricted Master Problem)라고 한다. 또한 제한된 주문제를 대상으로 할인가가 음인 차량경로를 찾아내는 문제를 부문제(Subproblem)라고 한다. 마지막으로, 주문제가 최적에 달했을때 결과가 정수해가 아니라면 분지(Branching)를 통해서 정수해를 찾아가게 된다.

3.2.2 Set Covering 형태의 수리모형

본 논문에서 실제로 사용되는 주문제의 모형은 Set Covering 형태의 수리모형으로 위의 Set Partitioning형태의 수리모형의 제약식을 부등식의 형태로 바꾼 형태이다.

Set Covering 형태의 수리모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{r \in R} c_r x_r \\ \text{subject to} \quad & \sum_{r \in R} \delta_{ir} x_r \geq 1, \quad \forall i \in N && (5) \\ & \sum_{r \in R} x_r \leq K, && (6) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in R. \end{aligned}$$

제약식 (5)의 경우는 제약식 (3)와 달리 각 고객노드를 차량경로가 적어도 한번이상 방문해야 한다는 제약이며 제약식(6)의 경우는 사용하는 경로의 개수가 운영가능한 총 차량 대수보다 작아야 한다는 제약이다. 이와 같은 Set Covering 형태의 모형을 사용하게 되면 열생성기법 적용시 각 제약식에 해당되는 쌍대변수의 값이 영보다 크다는 제약이 추가되므로 해의 수렴속도가 빨라질 수도 있는 장점을 가진다. 또한 Set Partitioning 형태에서는 모든 경로가 cycle이 포함되지 않아야 하지만 (Elementary Path), 위의 모형은 cycle이 포함된 경로를 허용한다. 열생성 부문제를 풀 때, cycle이 없는 경로만을 생성하는 것은 일반적으로 훨씬 어렵기 때문에 이는 실용적으로 큰 이점이 될 수 있다. 하지만, 기존의 차량경로 문제에서 Set Covering의 모형을 Set Partitioning 모형 대신 사용하기 위해서는 둘의 최적해가 같다는 것이 보장되어야하며, 이는 Chabrier(2006)이 보인 바와 같이 거리 및 물량에 대해 삼각 부등식이 성립하면 보장된다. 삼각 부등식은 임의의 노드 i, 노드 j, 그리고 노드 k에 대해서 노드 i에서 바로 k로 가는 거리 또는 시간이 j를 거쳐서 가는 경우보다 작다는 것을 나타낸다. 예를 들어, 거리에 대한 삼각 부등식은 $s_{ik} \leq s_{ij} + s_{jk}$와 같이 표현된다. 기존의 VRP의 경우 일반적으로 최소 이동거리를 목적함수로써 놓고 문제를 풀기 때문에 유클리디언(Euclidian)거리 계산을 이용한다면 삼각부등식을 자연스럽게 만족하게 된다. 본 연구에서는 이동시간을 목적함수로 사용하며, 일반적으로 이동시간이 변화하는 상황에서는 삼각 부등식이 만족하지 않는다. 그러나 본 논문에서 가정한 “Non-passing” 조건과 같은 시간대에서 모든 이동구간은 같은 속도를 가진다는 가정을 이용하면 거리에 관해서 삼각 부등식을 만족하면 이동시간에 관해서도 역시 삼각부등식이 만족하게 됨을 쉽게 보일 수 있다. 따라서

본 논문에서도 역시 Set-Covering 형태의 모형을 사용하고자 한다.

3.2.3 음의 할인가 차량경로 탐색 수리모형

시간구간에 따라 이동시간이 변화되는 것을 반영하고, 본 논문에서 가정한 "Non-passing" 특성을 보장하는 것은 일반적 인정수계획법의 수리모형으로는 풀기가 매우 어렵다. 본 논문에서는 기존에 VRP에서 사용되던 동적계획법 알고리즘을 약간의 수정만으로 TDVRP에 적용할 수 있음을 보이려고 한다. 제한된 주문제의 최적 쌍대변수(Dual Optimal Solution)을 기준으로 음의 할인가를 가지는 차량경로 탐색 문제의 풀이에는 Desrochers *et al*.(1992)이 제안한 Label을 사용한 동적 계획법 알고리즘을 변형하여 이용한다(Irnich and Desaulniers, 2004; Lee, 2009). 다음에 제시하는 내용은 제 3.1절에서 정의한 문제 정의에 기반한다. 제한된 주문제의 제약식 (5)와 식 (6)에 각각 해당하는 쌍대변수 π_i와 π_0를 정의하자. 선형계획법 이론에 따라 Set Covering 문제상의 경로 r의 할인가는 다음과 같이 계산 된다.

$$\bar{c}_r = c_r - \sum_{i \in N} \delta_{ir}\pi_i + \pi_0 = \sum_{(i,j) \in A(r)} (c_{ij} - \pi_i) + \pi_0$$

이 때, $A(r)$은 경로 r에 포함된 arc들의 집합이다. 따라서 열생성 부문제는 고객의 시간제약과 차량의 용량제약을 준수하면서 다음의 값들을 arc의 비용으로 가지는 그래프 상에서의 최단거리를 찾는 문제이다.

$$\begin{aligned} \bar{c}_{0,i} &= c_{0,i} - \pi_i, && \forall i \in N, \\ \bar{c}_{ij} &= c_{ij} - \pi_j, && \forall i, j \in N, \\ \bar{c}_{i,n+1} &= c_{i,n+1} - \pi_0, && \forall i \in N. \end{aligned}$$

출발노드 0에서 고객노드들을 거쳐 도착노드 $n+1$로 돌아오는 경로의 arc들의 비용을 다 합하면 그 경로의 할인가를 얻을 수 있다. 이 때 주의해야 할 점은 위 식의 이동시간 c_{ij}는 차량의 출발시간에 따라 달라지게 된다는 것이다. 따라서 위 그래프의 arc의 비용은 고정된 값이 아니라 상황에 따라 변하는 값이다. 위의 변화하는 arc의 비용을 계산하는 방법은 이후에 제 4.2절에서 자세히 다룬다.

각각의 부분 경로는 하나의 Label로 표현되며, 이 Label은 출발 노드에서 노드 i까지의 부분경로에서 사용되거나 축적된 자원(Resource)의 총량을 나타낸다. 이 때, 자원이란 차량이 이동하거나 고객을 방문할 때 사용되는 시간, 거리, 차량의 용량등을 의미한다. 즉, 하나의 Label은 해당하는 부분 경로의 좋고 나쁨을 나타내는 기준의 역할을 한다. 노드 i까지의 부분경로 p의 Label은 다음의 구성 요소들로 구성된다.

$\bar{c}^{\,i}_p$: 부분경로 p에 포함되는 arc들의 비용의 합.

τ^j_p : 노드 i에서의 차량 도착시각.

ρ^i_p : 부분경로 p에 포함되는 고객수송물량의 합.

즉, 노드 i까지의 부분경로 p의 Label은 다음과 같이 표시된다.

$$E^i_p := [\bar{c}^{\,i}_p,\ \tau^j_p,\ \rho^i_p]$$

결과적으로 $\min_{p \in R}\{\bar{c}^{\,N+1}_p\}$를 찾는 것이 부문제의 목적이다. 가능한 경로의 집합 R은 차량과 고객의 방문 가능 시간대에 의해 정해진다. 이 때, 경로가 가능한 경로임을 판단하는 것은 자원 제약에 대한 정보들인 τ^j_p와 ρ^i_p을 이용해서 이루어진다. 더욱 자세한 내용은 제 4.2절에서 제시한다.

4. 알고리즘

4.1 알고리즘 개요

위에서 제시한 열생성 알고리즘은 정수해를 보장해주지 못한다. 정수해를 찾기 위해서 본 연구에서는 분지평가법(Branch and Price) 알고리즘을 사용한다. 분지평가법은 분지한계법(Branch and Bound)의 특수한 형태로 각 분지 노드마다 열생성 기법을 적용하여 주문제의 선형완화 문제를 풀게 된다. 제한된 주문제의 선형완화식의 최적해가 정수해라면 그 정수해가 차량경로 문제의 최적해이며, 정수해가 아닌 경우에는 분지과정을 통해서 정수해를 찾는다.

4.2 Label 열거법

본 연구에서 사용된 부문제의 풀이 절차는 각 Label의 구성요소들의 확장을 통한 부분경로의 확장과 최소의 할인가를 찾기 위한 우열의 법칙을 통한 Label 제거 과정의 반복이라고 할 수 있다.

노드 i까지의 부분경로 p를 노드 j로 확장(연장)하는 경우를 생각해 보자. 노드 i에서 부분경로 p의 Label은 $E^i_p := [\bar{c}^{\,i}_p, \tau^j_p, \rho^i_p]$로 주어진다. 먼저 노드 j에의 도착 시간은 $\tau^j_p = \max\{\tau^i_p + \theta_i + T(\tau^j_p + \theta_i)_{ij}, e_j\}$으로 계산할 수 있다. 이 때 $T(\tau^j_p + \theta_i)_{ij}$는 식 (1)을 사용하여 계산한 값으로 노드 i에서 시각 $\tau^j_p + \theta_i$에 출발했을 때 노드 j까지 걸리는 이동시간이다. 다음으로 노드 j에서의 고객 수송물량의 합은 $\rho_{p_j} = \rho^i_p + q_j$로 주어진다. 노드 j로의 확장은 시간과 용량 제약이 모두 만족될 때만 이루어진다. 즉, $\tau^j_p \le l_j$과 $\rho^j_p \le Q$을 모두 만족할 때만 노드 j로 확장된 Label이 만들어진다. 마지막으로 할인가의 합 $\bar{c}^{\,j}_p$를 다음의 식을 이용하여 계산한다.

경우 1) 노드 i가 출발 노드(= 0)이고 노드 j가 고객 노드일 때,

$$\bar{c}^{\,j}_p = c_{0,j} - \pi_j = \tau^j_p - \pi_j$$

경우 2) 노드 i가 고객 노드이고 노드 j가 고객 노드일 때,

$$\bar{c}^{\,j}_p = \bar{c}^{\,i}_p + c_{ij} - \pi_j = \bar{c}^{\,i}_p + (\tau^j_p - (\tau^j_p + \theta_i)) - \pi_j$$

경우 3) 노드 i가 고객 노드이고노드 j가 도착 노드(= $n+1$) 일 때,

$$\bar{c}_p^j = \bar{c}_p^i + c_{i,n+1} - \pi_0 = \bar{c}_p^i + (\tau_p^j - (\tau_p^j + \theta_i)) - \pi_0$$

이 때 $\bar{c}_p^i$의 경우 계산상 음의값을 가질 수 있기 때문에 차량의 경로는 음의 순환(Negative Cycle)을 가질 수 있다. 하지만 이러한 음의 순환은 시간과 물량의 제한에 의해서 한계를 가지며 시간과 물량의 삼각 부등식이 만족하기 때문에 음의 순환이 존재하게 되더라도 주문제의 최적해는 순환이 없는경우가 더 유리하기 때문에 음의 순환이 있는 경우가 최적해로 선택 되지 않게 된다. 즉, 부문제의 해로써 음의 순환이 있는 경로가 생성되더라도 이 경로가 주문제에 추가되면 여러 번 방문한 고객 노드에 대한 쌍대변수값이 0이 되어 이 고객노드로 이동하는 아크들이 양의 값을 가지게 되고($\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_j = c_{ij} \geq 0$), 따라서 최종적으로는 주문제의 최적해를 이루는 경로들은 사이클이 포함하지 않게 된다. 이와 같은 이유로 본 연구에서는 특별한 Cycle 제거 방법을 사용하지 않아도 주문제의 최적해로 Cycle을 가지지 않는 해를 보장한다.

아직 탐색이 필요한 노드들을 원소로 가지고 있는 노드들의 집합 U로 정의한다. 어떤 노드 i에 대해서, 출발노드에서 노드 i까지의 가능한 여러 개의 부분경로(Partial Path)의 집합이 존재하며 이를 Ω_i라 하자.

Label 제거규칙 : 만약 노드 i에 두 개의 서로 다른 부분경로 p와 q가 존재할 때, $\bar{c}_p^i \leq \bar{c}_q^i$, $\tau_p^j \leq \tau_q^j$, $\rho_p^i \leq \rho_q^i$이면 부분경로 q는 제거 될 수 있다.

위 규칙의 유효성은 다음과 같이 쉽게 보일 수 있다: “Non-passing”조건에 의해, 위의 조건을 만족하면 경로 q에서 확장된 모든 경로는 경로 p에서도 유효한 확장 경로가 된다. 이는 경로 p가 경로 q보다 먼저 출발하고($\tau_p^j \leq \tau_q^j$) 수송중인 물량의 합도 작기($\rho_p^i \leq \rho_q^i$) 때문이다. 즉, 경로 q로 확장해서 얻을 수 있는 모든 가능한 확장 경로들은 경로 p를 확장해서 얻을 수 있기 때문에 부분 경로 q를 삭제 할 수 있다.

다음은 Label을 이용한 경로 탐색 알고리즘이다.

Label 확장 : $U = \varnothing$ 를 만족 할 때까지 **단계 1～3**을 반복한다.
단계 0 : $U := \{0\}$
단계 1 : 노드 $i \in U$를 추출 후, 인접한 모든 노드 j를 대상으로 노드 i에 속한 Label $E_p^i \in \Omega_i$를 이용하여 제 4.2절의 Label 확장과정의 방법에 따라 노드 j로 Label을 확장한다. 사용한 노드 i를 U에서 제거한다. 이때 확장이 가능하면 확장된 Label E_p^j을 Ω_j에 추가하고 단계 2와 단계 3을 실행한다.
단계 2 : 노드 j를 대상으로 하여 Label 제거 규칙을 적용한다.
단계 3 : $U \leftarrow U \cup \{j\}$를 수행 한다.

Label 출력 : 도착 노드 $n+1$의 Ω_{n+1}에서 가장 작은 할인가를 가지는 Label의 정보를 최적해로써 출력 한다.

위의 절차를 통해 구한 최단 경로의 값이 음이라면 해당경로를 제한된 주문제의 열로써 추가하게 되며, 양이거나 0이라면 열생성을 종료한다.

4.3 분지 전략

분지평가법의 경우 분지노드 마다 열생성기법을 적용하기 위해서 분지전략 선택시 열생성 기법의 구조가 깨지지 않는 형태의 분지전략을 취해야 한다(Barnhart *et al*., 1998). 다양한 분지전략이 존재하며 본 논문에서는 Gelinas *et al*.(1995)가 제안한 선택 된 경로들 중 한번 이상 방문하게 되는 노드의 시간제약을 분할 하는 분지 전략을 적용 하였다. 절차는 다음과 같다. 먼저 여러 경로가 동시에 방문하는 노드 $i \in N$를 선택 한다. 이때 노드 i를 방문하는 경로의 집합을 R_i라고 하면, 한 경로 $r \in R_i$의 노드 i에서의 서비스 시작 시간을 t_r라고 하면 $\min_{r \in R_i}\{t_r\} < t < \max_{r \in R_i}\{t_r\}$를 만족하는 t를 찾을 수 있다. 이때, t를 기준으로 분지를 하여 기존의 $[e_i, l_i]$의 시간제약을 $[e_i, t]$과 $(t, l_i]$의 두 가지 경우로 나눈다. 본 논문에서는 시간의 단위를 소수점 첫째자리로 통일을 하여 $[e_i, t]$과 $[t+0.1, l_i]$의 두 가지 시간제약을 가지도록 두 개의 분지노드를 생성하였다.

5. 실험 결과 및 분석

5.1 실험 계획

본 논문의 “Non-passing” 특성을 만족하는 TDVRP의 최적화 해법의 성능을 시험하기 위해서 Solomon(1987)이 제안한 실험예제 중에서 1개의 공급지점을 가지고 25, 50개의 고객노드 들로 구성된 총 44개의 예제에 대하여 실험을 수행 하였다. Solomon (1987)이 제안한 문제는 노드의 분포에 따라 3가지 유형으로 분류된다. 임의로 분포되어 있는 R-type, 밀집되어 있는 C-type, 임의와 밀집이 섞인 RC-type이 있다. 각각의 문제는 두 가지의 세부 유형을 가지는데, 하나는 비교적 쉬운 문제들로 서비스 가능 시간제약의 간격이 좁고(Type 1), 다른 하나는 서비스 가능 시간제약의 간격이 넓고 따라서 비교적 풀기가 어렵다(Type 2). 실제로 많은 수의 Type 2 문제들은 이동시간이 고정적인 전통적인 VRP 문제 상황에서의 최적해가 아직도 알려져 있지 않

Table 1. Vehicle capacities and service times

Type	R1	C1	RC1	R2	C2	RC2
θ_i	10	90	10	10	90	10
Q	200	200	200	1000	700	1000

다. 각 예제 별 차량 용량과 서비스 시간은 <Table 1>을 참조 하도록 한다.

이동속도가 변하는 시간구간의 설정의 경우현실의 도시의 상황을 반영하여 속도가 느린 아침, 상대적으로 속도가 빠른 점심, 속도가 다시 느린 저녁의 3개의 속도가 변하는 구간을 설정 하였다. 이는 제 2장의 계산과정에서 $M=3$인 경우이다. 아침, 점심, 저녁시간대의 구분은 공급지점(depot)의 가능 시간대를 3등분하여 사용하였다. 예를 들어 어떤 문제의 공급지점의 가능시간대가 [0, 300]이면 아침 시간대는 [0, 100), 점심 시간대는 [100, 200), 그리고 저녁 시간대는 [200, 300]이 된다. 또한 기존의 차량경로 문제와의 비교를 위해서 고정적인 속도를 사용하는 경우와 속도가 변하는 경우의 평균 속도를 동일하게 놓고 실험을 실시하였다. 속도의 경우 Solomon(1987)의 예제에서는 시간과 거리간의 적당한 단위가 존재 하지 않았기 때문에 속도를 거리를 기준으로 상대적으로 얼마만큼 빨리 혹은 느리게 가는가를 의미하도록 설정을 하였다. 예를 들어, 속도 1이 의미하는 것은 표준이동시간이 걸린다는 것을 의미하며, 2는 이동시간이 반으로 주는 것을, 0.5는 이동시간이 2배 더 걸린다는 것을 의미한다. 실험에서 사용된 이동속도 의 변화는 <Table 2>와 같다. <Table 2>를 보면 Wide case와 Narrow case는 이동 속도의 변화가 큰 경우와 작은 경우를 의미하며, Constant case는 이동 속도가 시간에 따라 변화하지 않는 경우이며 약 1.4167의 평균 속도를 가진다고 가정하였다. 이 평균 속도는 이동 시간이 변화되는 경우에 대한 하루 동안의 평균 속도에 해당한다. 즉, (1+2+1.25)/3 = (1.2+1.7+1.35)/3 = 1.4167이다.

Table 2. Changes of travel velocities

Case	Relative travel velocities		
	morning	day	evening
Wide case	1	2	1.25
Narrow case	1.2	1.7	1.35
Constant case	1.4167	1.4167	1.4167

마지막으로 실험은 10시간(= 36000초)의 제한 풀이시간을 두고 수행되었다.

5.2 실험 결과

<Table 3>은 각 최적해의 총 이동시 소요시간(이동시간+대기시간+서비스시간)의 유형별 평균값을 정리한 결과이다. <Table 3>에서 Problem Set는 실험의 종류, 실행한 실험의 수, 고객노드의 수를 의미하며 Time은 이동시간, 대기시간, 소요시간을 나타낸다. Wide와 Narrow의 경우는 이동속도의 변화정도를 의미하며 Time Dependent는 본 연구에서 제시한 TDVRP의 평균 실험결과이고 Constant는 기존의 VRP의 실험결과를 의미한다. Ratio는 Constant 의해에 비해 Time Dependent의 해의 상대적인 품질을 나타내며 $\mathrm{Ratio}=\frac{\mathrm{TDVRP}-\mathrm{VRP}}{\mathrm{VRP}}\times 100$로 정의된다. 따라서 음의값(-)은 TDVRP의 결과가 더 좋은 값을 가진다는 것을 의미한다(즉, 더 적은 이동시간을 필요로 함을 의미한다). 각 숫자는 제한시간(10시간)내에 최적해를 구할 수 있었던 문제들의 결과를 평균한 것이다. 각 문제의 유형별로 최적해를 구할 수 있었던 문제들은 다음과 같다.

- C1/25 nodes : 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109
- C2/25 nodes : 201, 202, 203, 205, 206
- R1/25 nodes : 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112
- R2/25 nodes : 201
- RC1/25 nodes : 101, 102, 103, 106, 107
- RC2/25 nodes : 201
- C1/50 nodes : 101, 102, 103, 105, 106, 108
- C2/50 nodes : 210
- R1/50 nodes : 101, 102, 103, 105

<Table 4>의 경우는 고객노드의 개수에 따른 계산시간의 변화를 초단위로 정리한 것이다. <Table 4>를 보면 최적해를 구하는 계산 시간의 증가에 크게 기여하는 것은 고객노드의 개수라는 것을 알 수 있다. TDVR와 VRP의 계산 시간은 큰 차이를 보이지 않는데 이는 본 연구에서 제안한 시간대별 속도의 변화의 계산 과정이 효과적으로 수행되었음을 의미한다. 또한 총 시간의 값이 주문제와 부문제의 계산시간의 합보다 크다는 것을 알 수 있는데 그 이유는 자료 입출력과 분지과정에 걸린 시간이 더해졌기 때문이다.

<Table 3>의 결과는 TDVRP의 경우에 이동시간은 VRP 경우보다 더 많이 걸리는 반면 대기시간은 적게 걸린다는 것을 확연하게 보여준다. 이 결과는 본 연구에서 제안한 방법이 차량이 좀 더 효율적인 이동시간대를 이용하여 대기시간을 줄일 수 있음을 강력하게 시사한다. 이동시간의 경우에는 공급지점의 출발시간에 모든 차량이 동시에 출발하기 때문에 이동속도가 불리한 아침시간에 모든 차량이 이동을 해야 하고, 공급지점에 돌아오는 차량의 경우 시간과 용량 제약에 의해 언제든지 돌아올 수 있기 때문에 **Constant**의 속도보다 빠른 속도구간을 전부다 이용하지 않는 경우가 생기게 되어 더 많은 시간이 필요하게 된 것으로 보인다. 그러나 차량의 경로 탐색 시 전체적으로 유리한 이동시간을 이용하기 때문에 대기시간을 크게 줄이는 효과를 얻기 때문에 총 운행시간의 측면에서는 이동시간의 변화를 고려한 경우가 더 적게 걸리게 된다.

또한 비록 현실문제에 있어서 TDVRP 최적 경로의 총 이동시간이 더 오래 걸리는 결과가 나왔다고 하더라도, VRP의 결과가 현실적으로 볼 때 실행 불가능한 경로가 될 수 있으므로 TDVRP의 결과가 이동시간이 더 걸리더라도 현실적으로 유의미하다고 할 수 있다.

Table 3. Experimental results

Problem Set	Time	Wide		Narrow		Ratio(%) TD/C	
		Time Dependent	Constant	Time Dependent	Constant	Wide	Narrow
C1/25 nodes	Travel	151.82	133.56	137.99	133.56	**-13.68%**	**-3.32%**
	Waiting	488.63	589.37	501.80	589.37	17.09%	14.86%
	Total	2890.46	2972.92	2889.79	2972.92	2.77%	2.80%
C2/25 nodes	Travel	166.92	150.20	152.04	150.20	**-11.13%**	**-1.23%**
	Waiting	2212.72	2087.78	2265.16	2087.78	**-5.98%**	**-8.50%**
	Total	4629.64	4487.98	4667.20	4487.98	**-3.16%**	**-3.99%**
C1/50 nodes	Travel	293.13	253.83	265.10	253.83	**-15.48%**	**-4.44%**
	Waiting	212.80	243.55	232.27	243.55	12.63%	4.63%
	Total	4207.35	4205.03	4204.02	4205.03	**-0.06%**	0.02%
C2/50 nodes	Travel	277.80	251.90	253.40	251.90	**-10.28%**	**-0.60%**
	Waiting	2655.80	2679.20	2671.50	2679.20	0.87%	0.29%
	Total	7433.60	7431.10	7424.90	7431.10	**-0.03%**	0.08%
R1/25 nodes	Travel	321.65	313.29	310.53	313.29	**-2.67%**	0.88%
	Waiting	214.85	222.68	230.78	222.68	3.52%	**-3.64%**
	Total	786.50	785.98	791.31	785.98	**-0.07%**	**-0.68%**
R2/25 nodes	Travel	351.80	325.70	329.60	325.70	**-8.01%**	**-1.20%**
	Waiting	1782.40	2256.20	1793.80	2256.20	21.00%	20.49%
	Total	2384.20	2831.90	2373.40	2831.90	15.81%	16.19%
R1/50 nodes	Travel	656.93	611.63	617.40	611.63	**-7.41%**	**-0.94%**
	Waiting	344.05	476.05	416.93	476.05	27.73%	12.42%
	Total	1500.98	1587.68	1534.33	1587.68	5.46%	3.36%
RC1/25 nodes	Travel	259.10	235.44	239.24	235.44	**-10.05%**	**-1.61%**
	Waiting	92.82	115.70	112.10	115.70	19.78%	3.11%
	Total	601.92	601.14	601.34	601.14	**-0.13%**	**-0.03%**
RC2/25 nodes	Travel	299.00	253.40	263.60	253.40	**-18.00%**	**-4.03%**
	Waiting	1784.90	1822.80	1774.80	1822.80	2.08%	2.63%
	Total	2333.90	2326.20	2288.40	2326.20	**-0.33%**	1.62%

Table 4. Average computational times(Wide and Constant)

Case	Solving Time	Master Time	Sub Time
TDVRP_25	15323.8	310.2	7940.1
VRP_25	11525.2	289.9	5081.0
TDVRP_50	19963.2	351.9	15116.9
VRP_50	19601.7	339.4	14873.7

6. 결 론

본 논문에서는 TDVRP에 대해 분해모형을 이용하여 수리모형을 제시하고 분지평가법에 기반한 최적화 해법을 제안하였다. 열생성기법을 이용하여 보다 효율적으로 주문제를 풀이 하였으며, 부문제의 해법으로는 Label을 이용한 열거법을 이용하였다. 특히, "Non-passing" 특성을 보장하는 이동시간 계산을 적용한 동적 계획법 풀이를 제시하였다. 최적화 해법을 구현해 본 결과 이동시간의 변화를 고려한 경우가 그렇지 않은 경우에 비해서 이동시간은 많이 걸리고, 대기 시간은 적게 걸리는 경향을 보였으며 계산 시간의 경우 이동시간을 고려한 경우가 그렇지 않은 경우에 비해서 약간 더 오래 걸리는 경향을 보였지만, 전체 계산 시간의 경우는 분지 상황, 시간 제약 등의 문제 풀이 상황에 의해서도 영향을 받는 결과를 얻을 수 있었다. 비록, 이동시간만을 고려하면 이동시간의 변화를 고려한 경우가 더 오래 걸리는 결과를 보였지만, 이는 현실적인 시간 제약과 속도의 변화를 고려하였을 때 이동시간을 고려하지 않은 경우는 불가능한 경로 계획이 될 수 있기 때문에 TDVRP 풀이의 결과가 의미를 가진다고 할 수 있다. 또한, 본 논문에서 제시한 "Non-passing" 특성을 보장하는 최적화 해법은 TDVRP의 연구에 있어서 처음으로 제시되는 최적화 해법으로 추후 휴리스틱을 이용한 방법론의 비교 평가(Benchmark)의 대상으로써 그 의미가 있다.

참고 문헌

Barnhart, C., Johnson, E. L., Nemhauser, G. L., Savelsbergh, M. W. P., and Vance, P. H. (1998), Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs, *Operations Research*, **46**(3), 316-329.

Chabrier, A. (2006), Vehicle Routing Problem with elementary shortest path based column generation, *Computers and operations research*, **33**, 2972-2990.

Danzig, G. B. and Rameser, J. H. (1959), The truck dispatching Problem, *Mgmt. Science*, **6**, 80-91.

Desrochers, M., Desrosiers, J., and Solomon, M. (1992), A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Operations Research*, **40**(2), 342-354.

Desrosiers, J., Dumas, Y., M. Solomon, M., and Soumis, F. (1995), Time constrained routing and scheduling, in : M. O. Ball, T. L. Magnanti, C. L. Monma, G. L. Nemhauser (eds.), *Network routing*, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, **8**, 35-139.

Donati, A. V., Montemanni, R., Casagrande, N., Rizzoli, A. E., and Gambardella, L. M. (2008), Time Dependent Vehicle Routing Problem with a Multi Ant Colony System, *European Journal of Operational Research*, **185**, 1174-1191.

Gabali, O. (2010), Analysis of Travel Times and CO2 Emissions in Time Dependent Vehicle Routing, http://cms.ieis.tue.nl/Beta/Files/Abstract%20Gabali.pdf.

Gelinas, S., Desrochers, M., Desrosiers, J., and Solomon, M. M. (1995), A New Branching Strategy for Time Constrained Routing Problems With Application to Backhauling, *Annals of Operations Research*, **61**, 91-109.

Haghani, A. and Jung, S. (2005), A Dynamic Vehicle Routing Problem with Time Dependent Travel Times, *Computers and Operations Research*, **32**, 2959-2986.

Hill, A. V. and Benton, W. C. (1992), Modeling Intra-City Time Dependent Travel Speeds for Vehicle Scheduling Problems, *J.Opl. Res. Soc*, **43**(4), 343- 351.

Ichoua, S., Gendreau, M., and Potvin, J. Y. (2003), Vehicle Dispatching with Time Dependent Travel Times, *European Journal of Operational Research*, **144**, 379-396.

Irnich, S. and Desaulniers, G. (2004), Shortest Path Problems with Resource Constraints, *Springer*.

Kuo, Y. (2010), Using Simulated Annealing to Minimize Fuel Consumption for the Time Dependent Vehicle Routing Problem, *Computers and Industrial Engineering*, **59**, 157-165.

Lee, C. (2009), Robust Optimization Models and Algorithm for the Problems in Telecommunication and Logistics, *Ph.D. Thesis*, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejon, Republic of Korea, 77-104.

Lenstra, J. K. and RinnooyKan, A. H. G. (1981), Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems, *Networks*, **11**, 221-227.

Malandraki, C. (1989), Time Dependent Vehicle Routing Problems : Formulations, Solution Algorithms and Computations Experiments, *Ph.D. dissertation*, North western University, Evanston, Ⅲ.

Malandraki, C. and Daskin, M. (1992), Time Dependent Vehicle Routing Problems : Formulations, Properties and Heuristic Algorithms, *Transportation Science*, **26**(3), 185-200.

Solomon, M. M. (1987), Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints, *Operations Research*, **35**(2), 354-265.

Sung, K., Bell, M. G. H., Seong, M., and Park, S. (2000), Shortest Paths in a Network with Time Dependent Flow Speeds, *European Journal of Operational Research*, **121** , 32-39.