Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 37, No. 2, pp. 124-131, June 2011.

제한용량이 있는 설비입지결정 문제에 대한 적응형 평균치교차분할 알고리즘

김철연[1] · 최경현[2†]

[1]한양대학교 산업공학과 / [2]한양대학교 기술경영전문대학원

Adaptive Mean Value Cross Decomposition Algorithms for Capacitated Facility Location Problems

Chulyeon Kim[1] · Gyunghyun Choi[2]

[1]Department of Industrial Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea
[2]Graduate School of Technology and Innovation Management, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea

In this research report, we propose a heuristic algorithm with some primal recovery strategies for capacitated facility location problems (CFLP), which is a well-known combinatorial optimization problem with applications in distribution, transportation and production planning. Many algorithms employ the branch-and-bound technique in order to solve the CFLP. There are also some different approaches which can recover primal solutions while exploiting the primal and dual structure simultaneously. One of them is a MVCD (Mean Value Cross Decomposition) ensuring convergence without solving a master problem. The MVCD was designed to handle LP-problems, but it was applied in mixed integer problems. However the MVCD has been applied to only uncapacitated facility location problems (UFLP), because it was very difficult to obtain "Integrality" property of Lagrangian dual subproblems sustaining the feasibility to primal problems. We present some heuristic strategies to recover primal feasible integer solutions, handling the accumulated primal solutions of the dual subproblem, which are used as input to the primal subproblem in the mean value cross decomposition technique, without requiring solutions to a master problem. Computational results for a set of various problem instances are reported.

Keywords: Capacitated Facility Location Problem, Cross Decomposition, Mean Value Cross Decomposition, Primal Recovery Strategies, Lagrangian Relaxation, Heuristics

1. 개 요

설비입지결정문제(CFLP : Facility Location Problem)는 여러 공급지에서 여러 수요지로 제품을 공급할 때 제품생산을 위한 설비에 투자하는 고정비와 제품의 수송비용을 최소로 할 수 있는 설비의 입지를 결정하는 최적화 문제이다. 설비입지결정문제는 유통 및 물류, 통신 등에 응용되며 글로벌 시대의 도래와 함께 기업의 활동 범위가 국가를 넘어 세계로 확장됨에 따라 대규모 입지결정이 기업의 중요한 의사결정문제로 대두되고 있다. 이러한 설비입지결정문제는 제한용량이 없는 설비입지결정문제(UFLP : Uncapacitated Facility Location Problem)와 제한용량이 있는 설비입지결정문제(CFLP : Capacitated Facility Location Problem)로 분류할 수 있다. 제한용량이 있는 설비입지결정문제는 다음 [CFLP-P]와 같은 수리모형으로 표현할 수 있다

† 연락저자 : 최경현 교수, 133-791 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 HIT 402호 기술경영전문대학원, Tel : 02-2220-2250, Fax : 02-2220-2255, E-mail : ghchoi@hanyang.ac.kr
2011년 5월 6일 접수; 2011년 5월 19일 게재 확정.

(Van Roy, 1986).

[CFLP]

$$\min \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (1\text{-}1)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \text{ for } all\ j \quad (1\text{-}2)$$

$$x_{ij} \le y_i \text{ for } all\ i, j \quad (1\text{-}3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_{ij} \le s_i y_i \text{ for } all\ i \quad (1\text{-}4)$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{ for } all\ i, j \quad (1\text{-}5)$$

$$y_i \in \{0,1\} \text{ for } all\ i \quad (1\text{-}6)$$

결정변수

x_{ij} : 공급지 i로부터 수요지 j로의 제품 공급량과 수요지 j의 수요량의 비율

y_i : m개의 설비투자 후보지에서의 i 후보지에 설비투자결정을 하는 이진변수

인덱스(Index) 집합

$I = \{1, 2, \cdots, m\}$: 설비입지 후보지들의 집합

$J = \{1, 2, \cdots, n\}$: 수요지역들의 집합

파라미터(Parameter) 집합

c_{ij} : 공급지 설비 i에서 수요지 j까지의 운송비

f_i : 공급후보지 i에 대한 설비투자 고정비

s_i : 공급지 설비 i에서의 공급량

d_j : 수요지 j에서의 수요량

n개의 수요지에 제품을 공급할 m개의 설비입지 후보지가 있을 때, [CFLP]의 목적식 (1-1)은 설비입지 후보지에 대한 설비투자 고정비 f_i의 총합과 수요지까지의 제품 공급량에 따른 배송비 c_{ij}의 총합을 최소화해야 하는 것을 의미한다. 목적식 (1-1)을 최소화하기 위한 설비투자여부를 결정하는 이진변수 y_i와 공급지 i로부터 수요지 j로의 제품 공급량과 수요지 j의 수요량의 비율 x_{ij}가 결정변수가 된다. 또한 본 문제의 제약조건을 살펴보면 제약식 (1-2)는 모든 수요는 반드시 만족되어야 한다는 수요제약이며 제약식 (1-3)은 설비투자가 이루어지지 않은 공급지에서는 제품을 공급할 수 없다는 것을 의미하고 제약식 (1-4)는 제품의 공급량은 투자된 설비의 생산용량을 초과할 수 없다는 공급제약을 의미한다. 여기서 제약식 (1-4)의 유무에 따라 제한용량이 있는 설비입지결정문제(CFLP)와 제한용량이 없는 설비입지결정문제(UFLP)로 분류된다. 그 중 제한용량이 있는 설비입지결정문제가 보다 현실을 잘 반영하는 문제로써 일반적인 해법으로는 풀기 어려운 NP-hard 문제 유형의 조합최적화문제로 알려져 있으며 최근까지도 그 해법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

설비입지결정문제에 대한 정확한 해를 구하기 위한 기존의 연구들을 살펴보면, 많은 연구들이 분지한계법(Branch-and- bound)을 기반으로 알고리즘을 개발하는데 초점을 맞추고 있다. 이러한 연구들은 대부분 [CFLP] 문제를 풀기 쉬운 구조로 변환하는 분해(Decomposition) 및 이완(Relaxation) 전략과 이를 통해 생성된 하위문제를 효과적으로 풀기 위한 알고리즘 개발과 탐색공간을 줄이기 위해 분지 끝(fathom)을 효율적으로 확인할 수 있는 하한 값(lower bound)을 더욱 강화시키는 전략으로 이루어져 있다. 선형 이완한 기존 연구를 살펴보면, Sa(1969)는 설비 변수를 대체하여 입지결정문제를 운송문제로 선형 이완하고 추가-제거(Add-Drop) 접근법을 사용하여 분지한계법으로 문제를 해결하였다. Akinc and Khumawala(1977)은 애드혹 규칙(Ad hoc Rules)을 통한 분지한계법을 제안하였으며 Klose(1999, 2000)는 2단계(Two-stage) 문제에 대해 선형 이완을 통한 발견적 기법을 통해 문제를 해결하였다. 상한과 하한을 얻기 위해 선형계획 접근법을 사용하였으며, 유효부등식을 사용하여 근사해를 찾아내는 발견적 기법을 제시하였다. 라그랑쥐 이완한 기존 연구로는 Nauss(1978)가 수요 제약을 이완하고 후입선출(LIFO: Last In First Out) 규칙을 사용한 분지한계법을 적용하여 문제를 해결하였다. Klincewicz and Luss(1986)는 공급 제약 이완과 추가 규칙(Add Rules)의 발견적 기법을 통해 초기 가능해를 찾아냈었으며 그 이후에 조정 기법을 사용하여 근사해를 발견하는 기법을 제안하였다. Holmberg *et al.*(1997)은 사용한 라그랑쥐 이완 방법과 반복 매칭 기법(Repeated Matching), 분지한계법을 이용하여 최적해를 구하였다. 또한 Barahona and Chudak (2005)은 라그랑쥐 이완을 통해 볼륨(Volume) 알고리즘과 무작위 반올림을(Randomized Rounding)을 이용한 발견적 기법을 통해 근사해를 계산하였으며, Prins *et al.*(2007)은 서브그래디언트 방법을 이용하여 이완된 문제를 푼 후, 그래뉴얼 타부 탐색(Granular tabu search)을 이용하는 발견적 기법을 제시하였다. 그러나 이러한 분지한계법 기반의 알고리즘들은 대부분 복잡한 마스터 문제를 풀어야 하고 좋은 하한 값에 의한 분지 끝으로 탐색공간을 줄여도 다항(polynomial) 시간 내에 탐색할 수 있는 범위로 축소되지 않기 때문에 여전히 많은 계산비용이 요구된다. 이와는 다른 접근방법으로는 Van Roy(1983)에 의해 개발된 교차분할법(Cross Decomposition)과 Holmberg(1992)에 의해 개발된 평균치교차분할법(MVCD : Mean Value Cross Decomposition)이 있다. 이 두 방법은 분지한계법의 탐색공간을 줄일 수 있는 좋은 하한 값을 제공할 뿐만 아니라 원시문제와 쌍대문제의 구조를 동시에 이용한 알고리즘의 절차에서 생성된 해가 최적해로 수렴하는 특징이 있다. Benders 분할법과 라그랑쥐 이완법을 하나의 알고리즘으로 통합한 교차분할방법은 쌍대하위문제의 해를 원시하위문제에 가능한(feasible) 해로 만들기 위해 대리(surrogate) 제약식 (1-7)을 쌍대하위문제에서 추가로 고려하여 제한용량이 있는 설비입지결정문제를

풀었다(Van Roy, 1986).

$$\sum_j d_j \le \sum_i s_i y_i \tag{1-7}$$

이는 매우 좋은 상한 값(Upper Bound)와 하한 값(lower bound)를 동시에 제공했지만 3번 이상의 주기에 걸쳐 동일한 해가 반복해서 나타나는 현상이 발생하여 수렴성 테스트를 거쳐 때때로 매우 복잡한 마스터 문제를 풀어주어야 하는 단점이 있다. 교차분할법과 매우 유사하지만 마스터문제를 풀지 않아 계산 비용 상의 이점이 매우 큰 평균치교차분할법은 처음에는 Holmberg(1992, 1994)에 의해 선형계획법 문제를 풀기 위해 개발되었으나 이 후 혼합정수계획법에도 적용되어 라그랑쥐 쌍대법보다 좋은 한계 값(bound)을 제공하는 것으로 밝혀졌다(Holmberg, 1997). 또한 볼록 비선형계획법(Convex Nonlinear program)의 해법으로도 유용하다고 보고되었다(Holmberg, 2003). 이 방법은 설비입지결정 문제 중 제약식의 구조가 비교적 단순한 제한용량이 없는 경우에만 적용되었으나(Holmberg, 2005) 제한용량이 있는 경우에는 라그랑쥐 이완 시 제약식의 구조가 Integrality 성질을 얻기 까다롭기 때문에 아직까지는 성공적인 연구 결과가 보고되지 않고 있다.

본 논문에서는 제한용량이 있는 설비입지결정문제에 대한 해법으로 평균치교차분할법을 이용한 발견적 해법(Heuristic)을 제안하고자 한다. 이를 위해 제 2장에서 혼합정수계획법에 평균치교차분할법을 적용하기 위한 수렴조건 및 그 절차에 대해 소개하고 제 3장에서는 제한용량이 있는 설비입지결정문제가 수렴조건을 만족하기 위한 라그랑쥐 이완법을 제안하고 그로 인해 발생되는 문제점들을 알아보고자 한다. 그리고 제 4장에서 이러한 문제점들을 해결하기 위한 적응형 평균치교차분할법(AMVCD : Adaptive Mean Value Cross Decomposition)을 제안한다. 마지막으로 제 5장에서는 테스트 결과와 분석결과를 제공한다.

2. 평균치교차분할법

평균치교차분할법은 원시 하위문제의 입력 값으로 쌍대 하위문제의 이전 해들의 평균값을 교차 이용하고 반대로 쌍대 하위문제의 입력 값으로 원시 하위문제의 이전 해들의 평균값을 교차 이용한다. 이러한 방법을 사용하면 하위 문제만의 해들만으로 최적해로의 수렴이 가능하며, 마스터 문제를 풀지 않아 계산시간을 상당히 감소시킬 수 있다(Holmberg, 1994). 하지만 원시 마스터문제와 쌍대 마스터문제의 최적 목적식 값이 동일해야 하기 때문에 duality gap이 없는 선형계획법 문제에만 적용이 가능했으나 duality gap이 존재하는 혼합정수계획법의 경우에는 가능한 좋은 하한값으로 수렴할 수 있는 원시 마스터 문제와 쌍대 마스터 문제를 조합하여 구성하는 것이 중요하다. 우선 설비입지결정문제와 같이 특별한 제약식 구조를 갖는 혼합정수계획문제 [P]에 대해 특정 값으로 수렴하면서 계산 상의 이점을 가질 수 있는 원시문제 및 쌍대문제를 구성하는 조건 및 특징을 살펴보자.

[P]
$$\begin{aligned} v^* = \min\ & c^T x + d^T y \\ s.t.\ & \\ & A_1 x + B_1 y \le b_1 \\ & x \in X \\ & y \in Y \end{aligned}$$

문제 [P]에서 집합 X, Y, Y_{LP}는 다음과 같이 정의한다.

$$X = \{x : A_2 x \le b_2, x \ge 0\}$$
$$Y = \{y \in Y_{LP} : y \quad integer\}$$
$$Y_{LP} = \{y : B_3 y \le b_3, y \ge 0\}$$

[P]에서 A_1, B_1, A_2, B_3는 각각 $m_1 \times n_1$, $m_1 \times n_2$, $m_2 \times n_1$, $m_3 \times n_2$ 매트릭스이고 b_1, b_2, b_3는 m_1, m_2, m_3 벡터이다. [P]를 평균치교차분할법으로 풀기 위해서는 우선 X, Y_{LP}는 모두 유한한(bounded) 집합이라고 가정하고 $y \in Y_{LP}$에 대해 $A_1 x + B_1 y \le b_1$을 만족하는 일부 $x \in X$가 존재한다는 가정이 필요하다. 또한 Y_C가 Y의 convex hull이라면 $Y_C = Y_{LP}$일 때 "Y-convex"라고 정의하기로 하자. 그리고 원시문제 [P]에 대해 Benders 분할 기법(Benders Decomposition)을 이용하면 [P]는 다음과 같이 원시 마스터문제 [PM], 원시 하위문제 [PS]로 나누어지고 라그랑쥐 쌍대문제로 변환하면 쌍대 마스터문제 [DM], 쌍대 하위문제 [DS]로 나누어질 수 있다.

[PM]
$$\begin{aligned} v_P = \min & \psi(y) \\ s.t.\ & y \in Y \end{aligned}$$

[PS]
$$\begin{aligned} \psi(y) = \min\ & c^T x + d^T y \\ s.t.\ & \\ & A_1 x + B_1 y \le b_1 \\ & x \in X \end{aligned}$$

[DM]
$$\begin{aligned} v_L = \max & \varphi(u) \\ s.t.\ & u \ge 0 \end{aligned}$$

[DS]
$$\begin{aligned} \varphi(u) = \min\ & c^T x + d^T y + u^T (A_1 x + B_1 y - b_1) \\ s.t.\ & \\ & x \in X \\ & y \in Y \end{aligned}$$

[DM]은 [P]의 라그랑쥐 쌍대문제이기 때문에 $\varphi(u) \le v_L \le v^* = v_P \le \psi(y)$, $\forall\, u \ge 0, \forall\, y \in Y$이라고 할 수 있으며 [P]가

“Y-Convex” 성질을 갖고 있다면 $\varphi(u)=\varphi_{LP}(u)$이다.

$$\begin{aligned}\varphi_{LP}(u) = \min\, & c^T x + d^T y + u^T(A_1 x + B_1 y - b_1) \\ s.t.\ & \\ & x \in X \\ & y \in Y_{LP}\end{aligned}$$

Geoffrion(1974)에 따르면 $\varphi(u)=\varphi_{LP}(u),\ \forall u \geq 0$을 만족하는 [DS]는 “Integrality” 성질이 있다고 말할 수 있으며 [DS]에서 Y 대신에 Y_{LP}로 변경하여도 목적식 값은 변하지 않는다. 여기서 v_{LP}를 다음과 같이 정의하면 <정리 1>와 같은 결과를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}v_{LP} = \min & \psi(y) \\ s.t.\ & y \in Y_{LP}\end{aligned}$$

<정리 1> (Holmberg, 2005)
[DS]가 “integrality” 성질이 있다면 $v_L = v_{LP}$.

이 같은 사실을 바탕으로 평균치교차분할법을 [P]에 적용시킬 때 [P]가 “Y-convex” 성질을 갖고 있다면 Y_C에 대한 하한값과 동일한 v_{LP}로 수렴하는 원시문제와 쌍대 문제로 구성이 가능하다. 이 때 [DS]는 “integrality” 성질을 가질 수 있도록 라그랑쥐 이완방법을 적용해야 하며 [DS]는 선형계획법의 해법을 적용하여도 동일한 값이 산출되므로 계산 상의 이점이 매우 크다고 할 수 있겠다. 다음 제 3장에서는 제한용량이 있는 설비입지결정문제에 평균치교차분할법을 적용할 때 이러한 조건을 만족시키기 위한 라그랑쥐 이완 방법을 소개하고 발생하는 문제점 및 한계점을 분석한다.

3. 제한용량이 있는 설비입지결정문제에 대한 라그랑쥐 이완법

[CFLP]가 “Y-convex” 성질을 가지고 있는지 살펴보면, Y에 대해 $Y_{LP}=\{y: 0 \leq y \leq 1\}$으로 $Y_C = Y_{LP}$이기 때문에 “Y-convex” 성질을 만족하고 있다고 할 수 있다. 여기서 문제 [P]에 대해 Benders 분할기법을 적용하고 변수 x와 y로 구성된 결합제약식(coupling constraints) (1-3), 식 (1-4)을 라그랑쥐 이완시키면 다음과 원시문제 [CFLP-PM], [CFLP-PS]와 쌍대문제 [CFLP-DM], [CFLP-DS]가 생성된다.

[CFLP-PM]

$$\begin{aligned}v_P = \min & \psi(y) \\ s.t.\ & y \in Y\end{aligned}$$

[CFLP-PS]

$$\begin{aligned}\psi(y) = \min & \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ s.t.\ & \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \text{ for } all\ j \\ & x_{ij} \leq y_i \ \text{ for } all\ i, j \\ & \sum_{j=1}^{n} d_j x_{ij} \leq s_i y_i \ \text{ for } all\ i \\ & x_{ij} \geq 0 \ \text{ for } all\ i, j\end{aligned}$$

[CFLP-DM]

$$\begin{aligned}v_L = \max & \varphi(u) \\ s.t.\ & u \geq 0\end{aligned}$$

[CFLP-DS]

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) = \min & \sum_{i=1}^{m} (f_i - u_i s_i - \sum_{j=1}^{n} v_{ij}) y_i \\ & + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + d_j u_i + v_{ij}) x_{ij} \\ s.t.\ & \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \text{ for } all\ j \\ & x_{ij} \geq 0 \ \text{ for } all\ i, j \\ & y_i \in \{0, 1\} \ \text{ for } all\ i\end{aligned}$$

이 경우 [CFLP-DS]는 변수 x와 y에 따라 문제가 완전히 분리되고 단순한 제약식만이 남아 각 변수의 계수만으로 문제를 풀 수 있는 문제로 변환된다. 또한 [CFLP-DS]의 y-변수의 이진 제약은 $0 \leq y_i \leq 1\ \forall i$와 같은 실수제약으로 변경하여도 $\varphi(u) = \varphi_{LP}(u)$를 만족하여 “integrality” 성질을 갖게 되어 평균치교차분할법을 적용시킬 수 있다.

하지만 [CFLP-DS]에서 공급제약식 (1-4)을 고려하지 않기 때문에 실제로 [CFLP-DS]의 해는 [CFLP-PS]에 가능(feasible)하지 않고 대부분의 제약식을 이완시켰기 때문에 쌍대 문제의 성능이 매우 낮은 문제점을 갖고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Van Roy(1983)가 사용했던 대리 제약식(surrogate Constraint) (1-7)을 이용하면 총 수요량보다 투자 결정된 설비의 용량이 더 커야 하기 때문에 [CFLP-PS]에 가능 해를 생성하고 쌍대의 성능을 어느 정도 향상시킬 수 있으나 “Integrality” 성질을 만족할 수 없어 $\varphi(u) \neq \varphi_{LP}(u)$가 되어 v_{LP}로 수렴하는 원시문제와 쌍대문제는 Y_C보다 좋은 하한값을 제공할 수 없다. 따라서 “Integrality” 성질을 유지하면서 [CFLP-PS]에 대한 가능 해를 생성시킴과 동시에 쌍대성능을 개선시킬 수 있는 방법의 개발이 필요하다.

4. 제한용량이 있는 설비입지결정문제에 대한 적응형 평균치교차분할법

4.1 원시 가능해 회복 전략

[CFLP-DS]의 해는 [CFLP-PS]에 가능(feasible)하지 않기 때문에 평균치 교차분할법의 기본적인 가정인 $y \in Y_{LP}$을 만족하는 y에 대해 집합 X에 포함된 x중 $A_1 x + B_1 y \leq b_1$을 만족하는 일부 x가 존재한다는 가정이 위배된다. 본 연구에서는 [CFLP-DS]의 해가 [CFLP-PS]에 불가능(infeasible)할 때마다 평균치교차분할법의 과정에서 발생되는 정보를 이용하여 가능해(feasible)로 변환시켜주는 원시 가능해 회복 전략을 제안한다. k번째 반복(iteration)에서 [CFLP-DS]의 이전까지 해의 평균을 $\overline{y_i}, \forall i$ 라고 하고 [CFLP-PS]에 가능한(feasible) 입력변수를 $\widehat{y_i}, \forall i$ 라고 정의하면, 다음과 같은 절차로 원시 가능해 회복 전략을 수행한다. 이러한 절차를 통해 회복된 가능해 $\widehat{y_i}$는 $y_i \in Y_C \subseteq Y_{LP}$이기 때문에 v_L보다는 더 좋은 하한값을 제공할 수 있다.

<원시 가능해 회복 전략>

[초기화] $S_{total} = 0.\ \widehat{y_i} = 0, \forall i.$ 집합 $Q = \left\{ i : \overline{y_i^k} > 0 \text{ for } i \in I \right\}$를 구성한다.

[단계 1] 식 (4-1)을 이용하여 k번째 반복(iteration)에서의 t^k을 선택한다.

$$t^k = \underset{i \in Q}{\arg\min} \left\{ \overline{y_i^k} \times s_i \times \frac{\sum_j c_{ij} \times d_j}{\sum_j d_j} + f_i \right\} \tag{4.1}$$

[단계 2] $S_{total} = S_{total} + S_{t^k},\ \widehat{y_{t^k}} = 1.$

[단계 3] 만약 $S_{total} \geq \sum_j d_j$이라면 중지하고 아니면 **[단계 1]**를 반복한다.

4.2 서브그래디언트 방법을 이용한 쌍대해 성능 향상 방안

[CFLP-DS]에서 보듯이 원시문제 [CFLP-P]에서 고려해야 하는 대부분의 제약식을 라그랑쥐 이완시켰기 때문에 쌍대 해의 성능이 낮아 좋은 하한 값을 제공하지 못하고 있다. 본 연구에서는 적응형 평균치 교차분할법을 사용하기 전에 좋은 하한 값을 제공하기 위해 서브그래디언트 방법을 이용하여 쌍대 해의 성능을 개선하고자 한다. 또한 성능 개선을 위해 [CFLP-DS]에 대리 제약식 (1-7)까지 추가하여 고려한다. 이 경우 [CFLP-DS]는 m개의 배낭문제가 생성된다.

서브그래디언트 방법은 k번째 반복(iteration)에서 탐색방향 d_k로 식 (4-2)와 같이 k까지의 서브그래디언트 g_k의 평균을 이용한 평균탐색방향전략(ADS : Average Direction Strategy)를 사용하고 이동거리(step length) λ_k는 식 (4-3)과 같은 목표값 방법(Target Value Method)를 사용한다.

$$d_k = \frac{1}{k} g_k + \frac{k-1}{k} d_{k-1} \tag{4-2}$$

$$\lambda_k = \beta \frac{w - \varphi(u, v)}{\| g_k \|^2} \tag{4-3}$$

식 (4-3)에서 β는 $0 \leq \beta \leq 2$이고 w는 목표값(target value), $\varphi(u, v)$는 쌍대하위문제[CFLP-DS]의 현재 목적값(incumbent objective value)이다.

4.3 적응형 평균치교차분할법>

제한용량이 있는 설비입지결정문제를 위한 적응형 평균치 교차분할법은 우선 [단계 1]에서는 서브그래디언트 방법을 이용하여 M 번의 반복을 거쳐 하한 값을 제공하는 쌍대 해 u, v를 구한다. [단계 2]에서는 [단계 1]에서 계산한 u, v에서 평균치 교차분할법을 시작하고 [CFLP-DS]의 해의 평균이 [CFLP-PS]에 불가능(infeasible)할 때 마다 원시 가능해 회복 전략을 수행하여 [CFLP-PS]에 가능한(feasible)한 해로 변환하고 이 해를 [CFLP-PS]의 입력 값으로 사용한다. 그리고 상한 값과 하한 값의 차이가 특정 범위 내로 줄어들거나 반복회수가 N번을 만족하면 알고리즘을 종료한다.

< 적응형 평균치교차분할법 >

[초기화]

$k = 1, u^0 = v^0 = 0, v_P = \infty, v_L = -\infty$

[단계 1] 서브그래디언트 방법을 이용한 쌍대 성능 향상

[단계 1-1] 쌍대 하위문제 $\varphi(u^k, v^k)$를 풀어 x^k, y^k 해 생성한다.
만약 $v_L < \varphi(u^k, v^k)$ 이면 $v_L = \varphi(u^k, v^k)$.

[단계 1-2] 만약 $k = M$이면 $k = 1$하고 [단계 2]로 넘어간다.
아니면 $k = k + 1$하고 [단계 1-3]를 수행한다.

[단계 1-3] 서브그래디언트 g_k를 계산하고 탐색방향 식 (4-2)를 이용하여 d_k 를 갱신한다.

[단계 1-4] 쌍대해 개선

$u^k = u^{k-1} + \lambda_k d_k,$

$v^k = v^{k-1} + \lambda_k d_k.$

[단계 2] 원시 가능해 회복 전략을 이용한 평균치 교차분할법

[단계 2-1] 쌍대해 평균값 계산 $(\overline{u}, \overline{v})$

$$\overline{u}^k = \frac{1}{k} u^k + \frac{k-1}{k} \overline{u}^{k-1},$$

$$\overline{v}^k = \frac{1}{k} v^k + \frac{k-1}{k} \overline{v}^{k-1}.$$

쌍대 하위문제 $\varphi(\overline{u}^k, \overline{v}^k)$를 풀어 x^k, y^k 해 생성한다.
만약 $v_L < \varphi(\overline{u}^k, \overline{v}^k)$ 이면 $v_L = \varphi(\overline{u}^k, \overline{v}^k)$.

[단계 2-2] 만약 $v_P - v_L < \epsilon$이면 알고리즘을 종료한다.

[단계 2-3] 원시해 평균값 계산 $(\bar{y})$

$$\bar{y}^k = \frac{1}{k} y^k + \frac{k-1}{k} \bar{y}^{k-1}.$$

[단계 2-3-1] $\sum_j d_j \le \sum_i s_i \bar{y}_i^k$ 만족한다면

원시 하위문제 $\psi(\bar{y}^k)$를 풀어 u^k, v^k를 생성한다.

만약 $v_P > \psi(\overline{y^k})$이면 $v_P = \psi(\overline{y^k})$.

[단계 2-3-1] 만족하지 않는다면 <원시해 회복 전략>을 수행하여 $\hat{y}^k$를 생성한다.

원시 하위문제 $\psi(\hat{y}^k)$를 풀어 u^k, v^k를 생성한다.

만약 $v_P > \psi(\widehat{y^k})$이면 $v_P = \psi(\widehat{y^k})$.

[단계 2-4] 만약 $v_P - v_L < \epsilon$이거나 $k = N$이면 알고리즘을 종료한다.

아니면 $k = k+1$하고 **[단계 2-1]**로 돌아간다.

5. 테스트 결과

5.1 실험 환경

적응형 교차분할법의 성능 실험을 위해 제한용량이 있는 입지설비결정문제는 Klose(1999)가 사용하였던 문제 생성 방식을 사용하여 생성하였다. 문제는 [10, 200]의 좌표 범위에서 설비 후보지 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$와 수요지 $J = \{1, 2, \cdots, n\}$를 난수를 발생하여 생성하였다. 그리고 파라미터 집합에서 공급량은 $s_i \sim U[100, 500],\ \forall i \in I$, 수요량은 $d_j \sim U[10, 50],\ \forall j \in J$에 따라 생성하면서 총 수요량과 최대 공급량의 비율이 3이 되도록 조정하였다. 또한 설비 투자 고정비는 $f_i \sim U[100, 500] + U[500, 800] + \sqrt{s_i},\ \forall i \in I$에 따라 생성하였고, 운송비는 각 공급후보지에서 수요지까지의 유클리디언 거리를 계산한 값에 scalar 값 0.01를 곱한 $c_{ij} = 0.01\sqrt{(i-j)^2},\ \forall i \in I,\ \forall j \in J$에 따라 계산하였다. 이러한 방식으로 <Table 1>에 정리된 바와 같이 설비 후보지와 수요지 개수에 따라 4가지 유형으로 총 40문제를 생성하고 실험하였다.

Table 1. Test Problems

문제	공급 후보지	수요지
M1～M10	30	90
M11～M20	40	80
M21～M30	50	70
M31～M40	60	60

실험환경은 CPU Core 2 Quad 2.4MHz, 2048MB RAM, OS는 Windows XP인 PC에서 Visual C++로 알고리즘을 구현하여 실험하였다. 그리고 적응형 평균치 교차분할법에서 수송문제로 변환되는 원시 하위문제 [CFLP-PS]와 쌍대 성능 개선 시 [CFLP-PS]에 대리 제약식 (1-7)를 추가로 고려한 배낭문제를 CPLEX 11.0을 이용하여 풀었다. 그리고 제안 알고리즘은 라그랑쥐 이완법보다 좋은 하한값을 제공한다고 알려져 있는 평균치교차분할법을 기반으로 원시 가능해를 생성하여 좋은 하한값을 제공하는데 초점이 맞춰져 있는 발견적 기법으로 비용 효과적인 관점에서 성능실험을 하는 유전자 알고리즘 등과 같은 메타휴리스틱과는 비교실험을 수행하지 않고 하한값 및 상한값의 성능을 확인하는 실험을 진행하였다. 알고리즘의 성능을 확인하기 위한 지표로 CPLEX 11.0을 사용하여 얻은 [CFLP]의 최적해 z^*와 적응형 평균치 교차분할법을 통해 계산된 목적값 v_P을 비교하기 위해 식 (5-1)과 같이 *P-Optimality*를 계산하였다.

$$P - Optimality(\%) = \frac{v_P - z^*}{z^*} \times 100 \tag{5-1}$$

또한 상한 값(Upper Bound)인 원시 하위문제 [CFLP-PS]의 목적값 v_P와 하한 값(Lower Bound)인 쌍대 하위문제 [CFLP-DS]의 목적값 v_L의 차이를 뜻하는 *P-D Gap*도 식 (5-2)와 같이 사용하였다.

$$P - DGAP(\%) = \frac{v_P - v_L}{v_P} \times 100 \tag{5-2}$$

쌍대해의 성능을 분석하기 위해서 식 (5-3)을 사용하고 서브그래디언트 방법을 사용한 쌍대해의 성능은 *SG-Optimality*이라고 하고 적응형 평균치교차분할법의 쌍대해의 성능은 *D-Optimality* 라고 정의한다.

$$(D, SG) - Optimality(\%) = \frac{z^* - v_L}{z^*} \times 100 \tag{5-3}$$

알고리즘은 *P-D GAP*이 3% 이내인 경우에 종료를 하고 [단계 1]과 [단계2]의 반복회수를 $M = N = 50$로 설정하였고 서브그래디언트의 이동거리 파라미터인 β는 1.2로 설정하여 실험하였다.

<Figure 1>, <Figure 2>는 서브그래디언트 방법을 적용하여 쌍대 성능을 향상한 후 적응형 평균치 교차분할법을 적용한 경우와 쌍대 성능을 향상하지 않은 경우를 비교한 것으로 *P-Optimality*의 최대값은 두 방법 모두 98% 이상으로 유의한 차이가 없었으나 평균은 쌍대 성능을 개선한 후 알고리즘을 적용한 경우가 90.77%로 개선하지 않은 경우 84.96%보다 약 5%가 개선되었다. 그리고 최소값은 78.83%로 개선하지 않은 경우 17.66%보다 안정적인 결과를 보여주었다. *P-D GAP*의 경우는 평균, 최대값이 18.46%, 47.32%가 개선되었고 최소값은 차이가 약 0.5% 정도로 유의한 차이가 없었다.

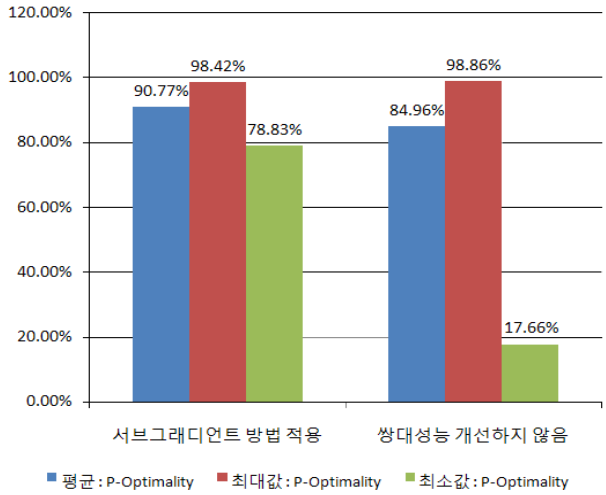

Figure 1. *P-Optimality* by a subgradient method

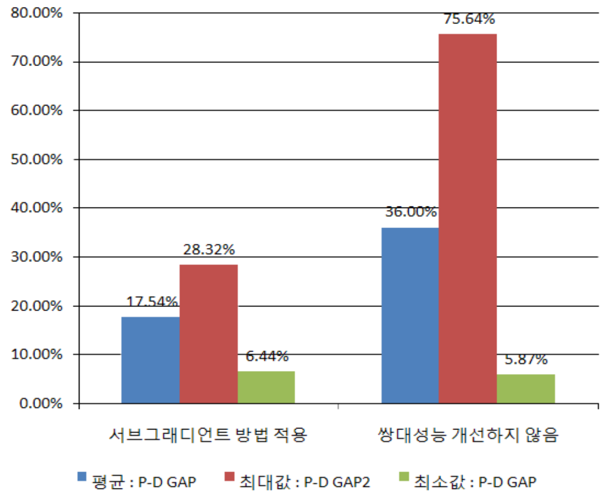

Figure 2. *P-D Gap* by a subgradient method

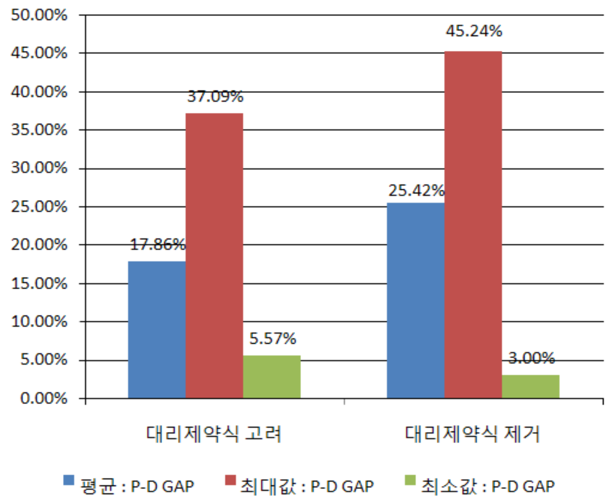

Figure 3. *P-D Gap* with the surrogate constraint vs. without the surrogate constraint

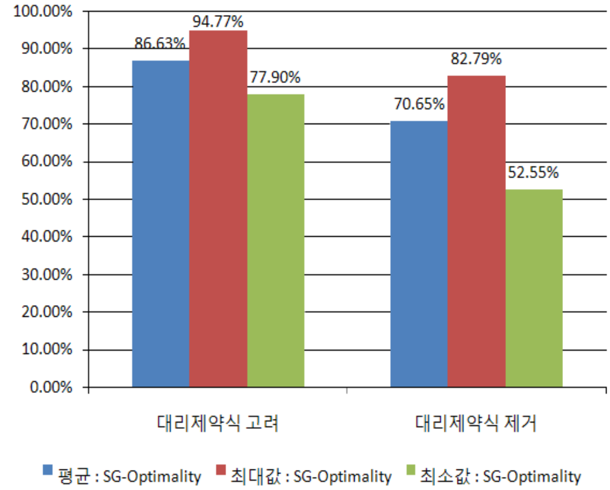

Figure 4. *SG-Optimality* with the surrogate constraint vs. without the surrogate constraint

서브그래디언트 방법을 이용하여 쌍대 성능 개선 시 쌍대하위문제 [CFLP-DS]을 풀어줄 때 <Figure 3>에서 보는 바와 같이 대리 제약식 (1-7)를 고려한 경우가 제거한 경우보다 *P-D GAP*이 더 개선되었으며, <Figure 4>에서 보듯이 *SG-Optimality* 에 있어서도 더 안정적인 결과를 보여주었다.

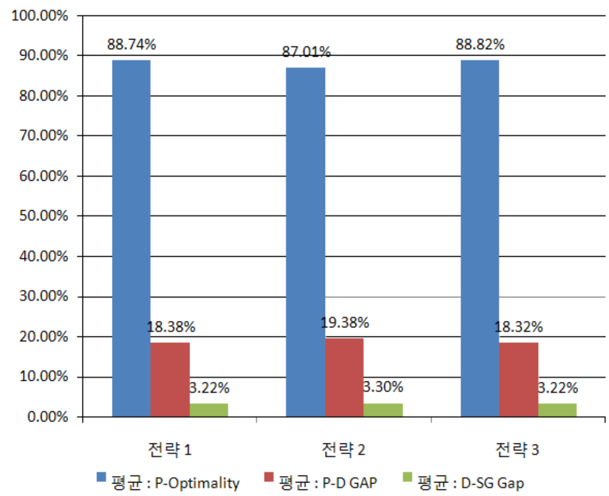

Figure 5. Performances for primal recovery strategies

<Figure 5>는 제 4.1절에서 소개한 원시 가능해 회복 외에 두 가지 전략을 다음 식 (5-4), 식 (5-5)와 같이 개발하여 성능 비교를 한 결과이다. 전략 1은 식 (4-1)와 같이 $\bar{y}$를 이용하여 최대 공급 가능한 제품의 평균 운송비에 설비투자 고정비를 합한 것이며 전략 2는 고정비에도 식 (5-4)와 같이 $\bar{y}$를 곱한 값을 기준으로 설비 투자 우선순위를 결정하는 것이다. 마지막으로 전략 3은 식 (5-5)과 같이 고정비용을 고려하지 않고 운송비용만 고려하는 방법이다.

$$t^k = \underset{i \in Q}{\arg\min} \left\{ \overline{y_i^k} \times s_i \times \frac{\sum_j c_{ij} \times d_j}{\sum_j d_j} + \overline{y_i^k} \times f_i \right\} \tag{5-4}$$

$$t^k = \underset{i \in Q}{\arg\min} \left\{ \overline{y_i^k} \times s_i \times \frac{\sum_j c_{ij} \times d_j}{\sum_j d_j} \right\} \tag{5-5}$$

<Figure 5>의 분석 결과에서 알 수 있듯이 3가지 방법 모두 성능에 있어서 유의한 차이는 없었다.

제안 알고리즘의 경우 어느 정도 규모 이상의 최적화 문제에 대해서만 계산시간에 대한 성능평가가 의미가 있기 때문에 설비입지 후보지 100개에 대해 수요지역 100개와 150개에 대한 실험문제를 6개를 생성하여 CPLEX와 비교하는 실험을 수행하였다. 실험 결과 제안 알고리즘의 반복(Iteration) 회수가 50번인 경우는 평균 335.64초, 반복회수 100번인 경우는 평균 627.01초가 소요되었으나 CPLEX의 수행시간은 평균 1236.56초가 소요되었다. 특히 CPLEX 수행시간이 2,930초와 3,455초가 소요된 복잡한 문제의 경우도 제안 알고리즘은 400초 이하의 계산시간만 소요되었다. 이러한 사실을 바탕으로 100번 이하의 반복회수로 제공된 하한값과 상한값을 기반으로 최적해와 가까운 가능해를 얻을 수 있는 발견적 해법을 개발하면 제안 알고리즘이 계산 성능 측면에서 더욱 경쟁력이 있을 것이다.

6. 요약 및 결론

본 논문에서는 제한용량이 있는 설비입지결정문제에 평균치 교차분할법을 적용할 때 특정 하한값으로 수렴하는 원시 마스터 문제와 쌍대 마스터 문제를 구성하기 위한 라그랑쥐 이완법을 소개하고 이로 인해 발생하는 문제점과 이를 극복할 수 있는 원시 가능해 회복 전략을 기반으로 한 적응형 평균치 교차분할법을 제안하였다. 또한 서브그래디언트 방법을 이용한 쌍대 성능 방안을 제안하였다. 비록 원시 가능해 회복 전략 후에도 계속 원시 하위문제 [CFLP-PS]에 불가능한 해가 생성되어 일정 반복 이후에도 계속적으로 원시 가능해 회복 전략을 사용해야 하기 때문에 수렴성을 보장할 수는 없지만 본 발견적 해법은 원시해와 쌍대해를 상당부분 개선시키는 테스트 결과를 보여주었다. 또한 평균치교차분할법에서 생성되는 정보를 이용하여 많은 양의 계산없이 빠르게 좋은 하한값과 가능해를 얻을 수 있는 발견적 해법개발은 제한용량이 있는 설비입지문제와 같은 조합 최적화 문제에 대한 평균치 교차분할법의 다양한 해법 개발의 가능성을 높였다고 생각된다. 또한 목적식 계수 $f_i - u_i s_i - \sum_j v_{ij}$에 의해 해가 결정되는 [CFLP-DS]의 y 변수 문제의 특징을 고려할 때, $\sum_j d_j \le \sum_i s_i y_i$를 만족시킬 수 있는 $\psi(\hat{y})$의 u, v 해가 생성될 수 있도록 원시 가능해 회복 전략을 보완한다면 하한값을 보장할 수 있는 개선된 알고리즘 개발이 가능할 것이다. 테스트 결과, 제안 알고리즘의 *P-Optimality*를 더 개선시킬 수 있는 방법개발이 필요하며, 적응형 평균치교차분할법의 과정 속에서의 개선된 쌍대해가 원시해 개선에 영향을 미친다는 점을 고려할 때, 알고리즘 과정속에서 지속적으로 쌍대의 성능을 향상시킬 수 있는 방법 개발이 향후 연구과제라 하겠다.

참고문헌

Akinc, U. and Khumawala, B. M. (1977), An Efficient Branch-and-bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location, *Management Science*, **23**(6), 585-594.

Geoffrion, A. M. (1974), Lagrangean relaxation for integer programming, *Mathematical Programming Study*, **2**, 82-114.

Holmberg, K. (1992), Linear mean value cross decomposition : A generalization of the Kornai-Liptak method, *European Journal of Operational Research*, **62**, 55-73.

Holmberg, K. (1994), A convergence proof for linear mean value cross decomposition, *Zeitschrift für Operations Research*, **39**, 157-186.

Holmberg, K. (1997), Mean value cross decomposition applied to integer programming problems, *European Journal of Operation Research*, **97**, 124-138.

Holmberg, K. and Kiwiel, K. C. (2003), Mean value cross decomposition for nonlinear convex problems, Research report LiTH-MAT-R-2003-10, Department of Mathematics, Linkoping Institute of Technology, Sweden.

Holmberg, K. (2005), Mean value cross decomposition based branch-and-bound for mixed integer programming problems, Research report LiTH-MAT-R-2004-13, Department of Mathematics, Linkoping Institute of Technology, Sweden.

Klincewicz, J. G. and Luss, H. (1986), A Lagrangean Relaxation Heuristic for Capacitated Facility Location with Single-Source Constraints, *The Journal of Operational Research Society*, **37**(5), 495-500.

Klose, A. (1999), An LP-Based Heuristic for Two-Stage Capacitated Facility Location Problems, *The Journal of the Operational Research Society*, **50**(2), 157-166.

Klose, A. (2000), Lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem, *European Journal of Operational Research*, **126**, 408-421.

Nauss, R. M. (1978), An Improved Algorithm for the Capacitated Facility Location Problem, *The Journal of the Operational Research Society*, **29**(12), 1195-1201.

Prins, C., Prodhon, C., Ruiz, A., Soriano, P., and Calvo, R. W. (2007), Solving theCapacitated Location-Routing Problem by a Cooperative Lagrangean Relaxation-Granular Tabu Search Heuristic, *Transportation Science*, **41**, 470-483.

Sa, G. (1969), Branch-and-bound and Approximation Solutions to the Capacitated Plant Location Problem, *Operations Research*, **17**, 1005-1016.

Van Roy, T. J. (1983), Cross decomposition for mixed integer programming, *Mathematical Programming*, **25**, 46-63.

Van Roy, T. J. (1986), A cross decomposition algorithm for capacitated facility location, *Operations Research*, **34**, 145-163.