한국해양공학회지 제25권 제2호, pp 62-66, 2011년 4월 (ISSN 1225-0767)

수평 지반에 놓인 액체 저장용 막구조물 형상의 단면 체적에 따른 해석적 해

최윤락*
*울산대학교 조선해양공학부

Analytic Analysis of Liquid-Filled Membrane Container Resting on Horizontal Foundation with Given Cross-Sectional Volume

Yoon-Rak Choi*
School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan, Ulsan, Korea

KEY WORDS: Long membrane container 긴 저장용 막구조물, Analytic approach 해석적 방법, Elliptic integral 타원적분, Similarity solution 상사해, Sectional volume 단면 체적

ABSTRACT: *In this paper, a liquid-filled long membrane container resting on a horizontal foundation is considered. All of the quantities are normalized to obtain similarity solutions. A system of nonlinear ordinary differential equations with undetermined boundary conditions is solved analytically. The integration of the curvature gives the solutions, which are expressed in terms of the elliptic integrals. A method for finding the shape and characteristic values is proposed for a given cross-sectional volume. The validity of these solutions is confirmed, and some results are shown for characteristic values and shapes.*

1. 서　　론

최근 들어 제작 및 설치의 간편함과 저렴한 제작비용으로 인해 막구조물 형태의 저장 용기가 널리 사용되고 있다(Koerner, 2000; Restall et al., 2002). 청수, 유류, 그리고 슬러리(Slurry) 등을 저장하기 위한 용도로 막구조물이 사용되기도 하고, 모래 또는 모르타르(Mortar) 등을 채워 임시 제방, 해안 침식방지용 구조물, 그리고 경사면 안정화를 위한 구조물 등으로 다양하게 사용된다.

저장용 막구조물의 형상은 내부 액체의 유체 정역학적 압력에 의해 결정된다. 이러한 구조물은 단면의 형상과 비교하여 길이가 매우 길어 통상적으로 2차원 해석을 통해 단면 형상과 특성치들을 추정한다. 추정하여야 할 주요 단면 형상과 특성치들은 형상의 폭, 높이, 지반과의 접촉길이(Contact length), 단면체적(Sectional volume), 내부 액체의 압력, 그리고 구조물에 작용하는 장력 등이다.

Wang and Watson(1981)은 내부 압력이 매우 작은 경우와 큰 경우에 대해 근사해를 구하였다. Demiray and Levinson(1972)과 Plaut and Suherman(1998)는 주어진 내부압력에 대해 형상과 특성치들을 해석적으로 구하였고 Leshchinsky et al.(1996)과 Ghavanloo and Daneshmand(2009)는 준 해석적 방법을 사용하여 해석하였다. Malik(2009)은 높이, 압력, 단면 체적, 장력이 각각 주어진 경우에 대해 해의 수학적 존재성을 고찰하였다. 한편 최윤락(2007; 2008; 2009)은 경사면에 놓인 막구조물, 수중 막구조물, 그리고 부유식 막구조물 형상의 해석적 해를 도출한 바 있다.

내부 압력은 막구조물을 부풀리기 위해 내부 액체의 정수압에 더하여 과압(Overpressure)이 필요하며 막구조물 운용시 이를 측정하기가 어렵다. 그러나 내부 액체의 주입량은 손쉽게 측정 가능하다. 본 연구에서는 기존의 연구자들이 주어진 압력에 대해 형상과 해석치를 구한 데 반해 주입된 액체의 단면 체적이 주어진 경우 해를 도출하는 방법을 제시하였다. 도출된 형상과 특성치들은 해석적 형태로 표현되며 상사해(Similarity solution)이다.

2. 문제의 정식화

막구조물은 굽힘 및 전단 강성이 없고 인장변형이 없는 매우 가벼운 재질로 제작되었으며, 폭에 비해 길이가 매우 긴 구조물이라 가정한다. 따라서 구조물 단면에 대한 2차원적 해석을 수행한다. Fig. 1에 구조물의 단면형상과 작용하중을 도시하였다. 그림에서 좌표축 원점은 오른쪽 분리점에 위치하고, ρ는 비압축성 저장 액체의 밀도, S는 원점으로 부터의 원호길이, θ는 구조물 형상 접선과 양의 X축 사이의 각도, P는 구조물 내부와 외부의 압력차, P_0는 구조물 밑바닥에 작용하는 압력차, W는 최대 폭, H는 최대 높이, 그리고 2Ξ는 지반과의 접촉길이이다. 압력 P는 저장 액체의 유체정역학적 압력에 의해 다음과 같이 표현된다.

교신저자 최윤락: 울산광역시 남구 대학로 98, 052-259-2158, yrchoi@ulsan.ac.kr

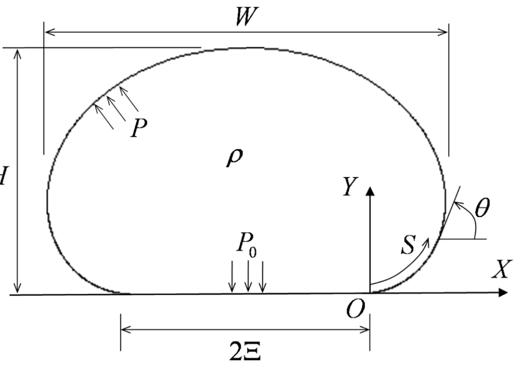

Fig. 1 The sectional shape of liquid-filled membrane container

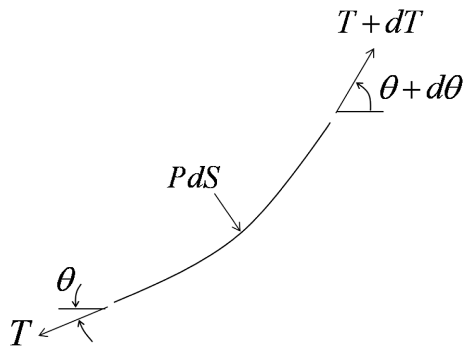

Fig. 2 Free-body diagram for differential element

$$P = P_0 - \rho g Y \tag{1}$$

Fig. 2의 미소 원호길이 dS에 작용하는 하중에 대한 힘의 정적평형을 고려하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{dT}{dS} = 0 \tag{2}$$

$$T\frac{d\theta}{dS} = P_0 - \rho g Y \tag{3}$$

식 (2)에 의해 구조물 단면에 작용하는 장력 T는 일정하다. 단면 체적 V는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$V = -\oint YdX \tag{4}$$

막구조물 단면의 길이를 $2L$이라 하고 이를 사용하여 모든 물리량들을 다음과 같이 무차원화 한다.

$$x = \frac{X}{L},\quad y = \frac{Y}{L},\quad s = \frac{S}{L},\quad \xi = \frac{\Xi}{L},\quad h = \frac{H}{L},$$
$$w = \frac{W}{L},\quad v = \frac{V}{L^2},\quad p = \frac{P_0}{\rho g L},\quad t = \frac{T}{\rho g L^2} \tag{5}$$

식 (5)에 의해 식 (3)은 다음과 같이 무차원화된 식으로 표현되며 이는 형상의 곡률에 관한 관계식이다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{p - y}{t} \tag{6}$$

기하학적 형상 적합성에 따라 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta,\quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{7a, 7b}$$

식 (6)과 (7)은 본 문제의 지배방정식으로 비선형 연립 상미분방정식이다. 형상의 대칭성을 고려하여 Fig. 1의 오른쪽 부분만 해석하면 이 문제의 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta = 0,\quad x = 0,\quad y = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \tag{8a, 8b, 8c}$$
$$\theta = \pi,\quad x = -\xi,\quad y = h \quad \text{at} \quad s = 1 - \xi \tag{9a, 9b, 9c}$$

식 (9)에서 보듯이 경계조건이 미지의 값 ξ와 h로 포현되어 지배방정식의 비선형성과 더불어 문제의 해석을 매우 어렵게 한다.

3. 해석해의 도출

식 (6)을 s에 대해 한번 더 미분하고 식 (7b)를 이용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{\sin\theta}{t} \tag{10}$$

식 (10)은 식 (6)보다 미분 차수가 하나 더 크기 때문에 식 (6)을 사용하여 추가적인 경계조건을 부여한다.

$$\frac{d\theta}{ds}(s=0) = \frac{p}{t},\quad \frac{d\theta}{ds}(s = 1-\xi) = \frac{p-h}{t} > 0 \tag{11a, 11b}$$

식 (11b)의 부등호는 양의 곡률을 가져야 함을 의미한다. 식 (10)은 한번 적분가능 하며 식 (11)의 경계조건으로 적분상수를 구하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{t}(\cos\theta - 1) + \left(\frac{p}{t}\right)^2 \tag{12}$$

$$\frac{p}{t} = \frac{h}{2t} + \frac{2}{h} > \frac{2}{\sqrt{t}},\quad \frac{p-h}{t} = -\frac{h}{2t} + \frac{2}{h} > 0 \tag{13a, 13b}$$

다음과 같이 무차원 매개변수 a를 정의하면 식 (12)는 아래와 같이 표현된다.

$$a = -1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{t} = 1 + \frac{1}{2}\frac{(p-h)^2}{t} \tag{14}$$
$$= -1 + \frac{t}{2}\left(\frac{h}{2t} + \frac{2}{h}\right)^2 = 1 + \frac{t}{2}\left(-\frac{h}{2t} + \frac{2}{h}\right)^2$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{t}(\cos\theta + a) \tag{15}$$

식 (14)에서 a의 크기는 $a > 1$임을 알 수 있다. 곡률은 항상 양의 값을 가지므로 식 (15)는 다음과 같다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\frac{2}{t}}\sqrt{\cos\theta + a} \tag{16}$$

식 (7)의 관계를 고려하여 위의 식을 적분하면 s, x, 그리고 y에 대한 해석적 해를 얻을 수 있다(Gradshteyn and Ryzhik, 2000).

$$s = \sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{a+1}}F\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) \tag{17}$$

$$x = \sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{a+1}}\left\{(a+1)E\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) - aF\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right)\right\} \tag{18}$$

$$y = \sqrt{2t}\left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+\cos\theta}\right) \tag{19}$$

여기서, F와 E는 각각 제 1종과 2종의 불완전 타원적분(Incomplete elliptic integral)으로 이들의 정의는 Gradshteyn and Ryzhik(2000)에 나와 있다. 식 (17)-(19)에 식 (9)의 경계조건을 적용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$1 - \xi = \sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{a+1}}F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) \tag{20}$$

$$-\xi = \sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{a+1}}\left\{(a+1)E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) - aF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right)\right\} \tag{21}$$

$$h = \sqrt{2t}\left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right) \tag{22}$$

여기서, 식 (22)는 식 (14)와 동일한 식이다.

한편, 식 (7b)를 사용하여 식 (6)을 θ와 x에 대해 적분하면 단면 체적 v를 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$v = 2p\xi = 4\sqrt{t}\sqrt{\frac{a+1}{2}}\,\xi \tag{23}$$

서론에서 언급한 이 전의 연구자들은 식 (20)과 (21)에서 ξ를 소거하여 주어진 p 또는 t에 대해 a를 구하여 형상과 특성치들을 구하였다. 본 연구에서는 막구조물의 운용시 활용도가 더 있는 주입된 액체 체적 v가 주어진 경우, 형상과 특성치를 구하는 해석법을 사용한다. 식 (20), (21), 그리고 (23)은 4개의 매개변수 ξ, a, t, 그리고 v로 표현되어 있다. 이 식들에서 ξ와 t를 소거하면 다음과 같이 a와 v로 표현되는 하나의 식을 얻을 수 있다.

$$v = -\frac{2(a+1)E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) - 2aF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right)}{(a+1)\left\{E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right)\right\}^2} \tag{24}$$

주어진 v에 대해서 식 (24)를 만족하는 근으로서 a를 수치적으로 구할 수 있는데 본 연구에서는 이분법(Bisection method)을 사용하였다. 이 경우 v는 식 (5)에서 보듯이 막구조물 둘레길이의 절반인 L을 사용하여 무차원화된 단면 체적이므로 v의 범위는 다음과 같다.

$$0 < v < v_{\max} = 1/\pi \tag{25}$$

여기서, $v_{\max}$는 원주가 2인 원의 단면적이다. a를 구한 후 식 (20)과 (21)에서 ξ를 소거하면 t를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$t = \frac{1}{2(a+1)\left\{E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{a+1}}\right)\right\}^2} \tag{26}$$

주어진 v에 대해 a와 t가 결정되면 식 (14), (21), 그리고 (22)로부터 p, ξ, 그리고 h를 구할 수 있고 형상도 식 (17)-(19)를 사용하여 결정된다.

주요 특성치로서 $x_{\max}$는 $\theta = \pi/2$를 식 (18)에 대입하여 구할 수 있으며 최대폭 w는 다음과 같다.

$$w = 2(\xi + x_{\max}) \tag{27}$$

본 연구에서 구한 해석해들은 무차원화된 값에 대한 것으로 상사해임을 알 수 있다. 따라서 임의의 둘레길이를 가진 막구조물 단면에 대해서 적용가능한 해이다.

4. 해석 결과

Fig. 3에 단면 체적에 대한 막구조물 형상의 특성치들을 도시하였고, 최대 체적인 경우에 해당하는 값들을 점선으로 함께 표시하였다. 그림에서 보듯이 체적이 작아질수록 막구조물이 완전히 겹쳐진 경우의 값들로 접근하고, 체적이 증가할수록 최대 체적, 즉 원주가 2인 원에 대한 값들로 접근함을 알 수 있다.

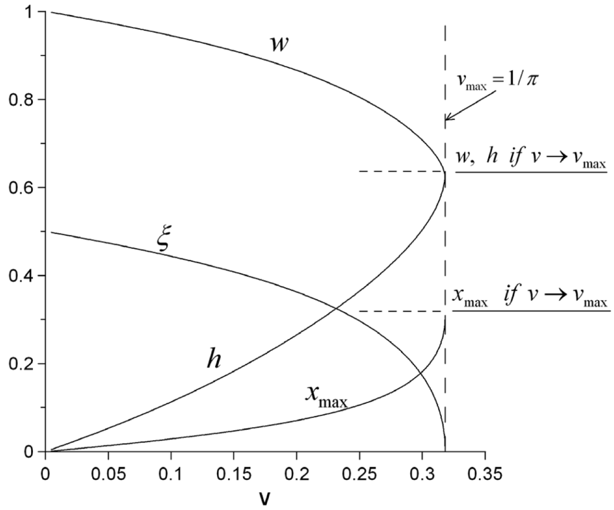

Fig. 3 Some characteristic values of shape

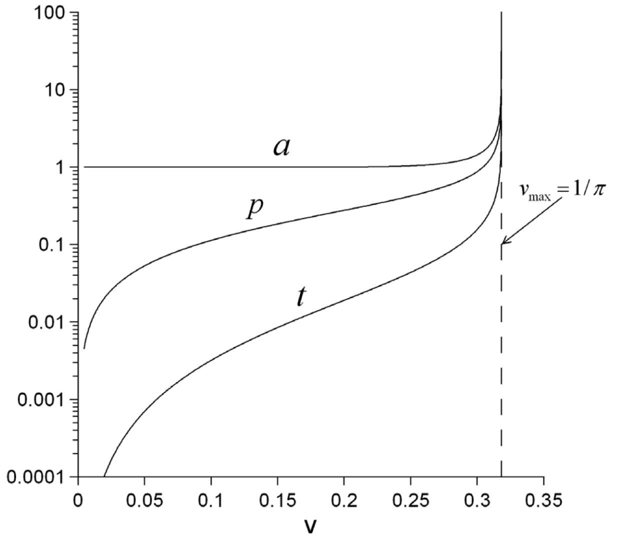

Fig. 4 Nondimensional pressure, tension, and a

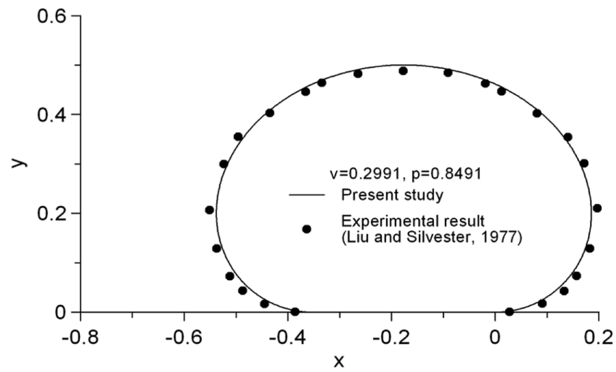

Fig. 6 Comparison of experimental and analytic results for $v = 0.2991$

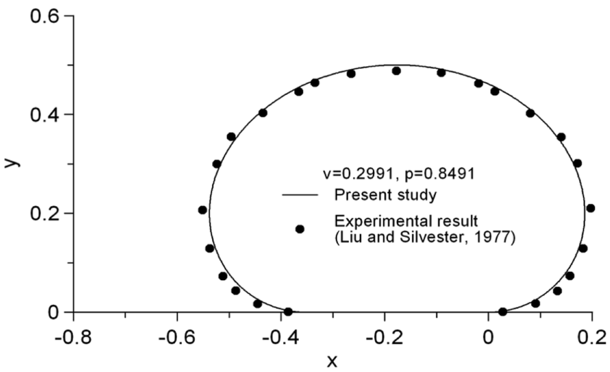

Fig. 5 Comparison of experimental and analytic results for $v = 0.2406$

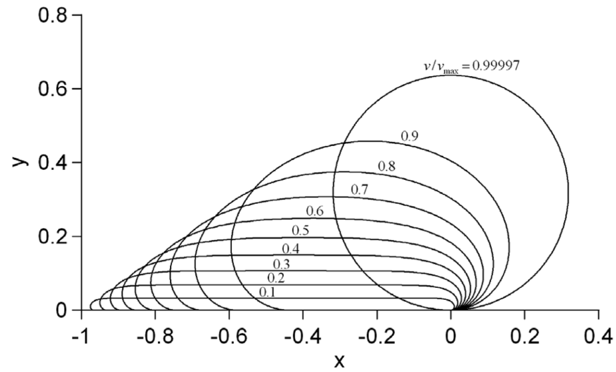

Fig. 7 Similarity shapes for various sectional volume

무차원화된 압력 p와 장력 t, 그리고 식 (14)로 정의된 a를 Fig. 4에 도시하였다. 압력과 장력은 체적이 증가할수록 증가하며 최대 최적부근에서 급격히 증가하여 최대 체적에서는 무한대의 값을 가진다. a는 넓은 체적영역에서 1에 근사하는 값을 가진다. 따라서 정확도 높은 a값의 계산이 요구되는데, 본 연구에서는 많은 유효수자 자리수 계산을 수행할 수 있는 Maple 프로그램을 사용하여 계산을 수행하였다(Maplesoft, 2003). a값 역시 최대 체적에서는 무한대의 값을 가진다.

본 연구결과로 얻어진 해의 타당성을 검증하기 위해 Liu and Silvester(1977)의 실험치와 비교하였다. Fig. 5와 6에 단면 체적이 각각 0.2406과 0.2991인 경우의 결과들을 도시하였는데 실험치와 식 (17)-(18)로 구한 이론치가 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 7에 단면 체적별 상사형상을 도시하였다. 체적이 증가함에 따라 단면 형상이 원에 가까워짐을 알 수 있다. 특히 최대 체적부근에서 체적 증가에 따른 단면 형상의 변화가 크다.

5. 결　　언

수평지반에 놓인 굽힘 및 전단강성이 없는 액체 저장용 막구조물의 형상에 대한 해석해를 도출하였다. 기존의 연구자들은 압력 또는 장력이 주어진 경우에 대한 해석법을 제시한 바 있는데, 본 연구에서는 실제적 응용에 더욱 유용한 저장 액체의 체적이 주어진 경우의 해석법을 도출하였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 사용하여 주입된 액체의 양에 따른 압력과 장력, 그리고 형상을 추정할 수 있으며 막구조물의 설계 및 운용에 따른 효율성과 안전성을 제고할 수 있다. 특히 압력과 장력은 막구조물 내부 액체 주입시 필요한 압력과 막구조물의 구조안전성을 평가하는데 필수적이다.

만약 막구조물이 수중에 완전히 잠겨있고 저장 물질이 물보다 더 무거운 슬러리, 모래 또는 자갈 등과 같은 물질인 경우, 저장 물질과 물의 밀도차를 ρ로 치환하여 본 해석법을 적용할 수 있다. 이러한 구조물은 파랑 제어 및 표사 이동 방지를 위한 불투과성 잠제로 이용가능하리라 생각된다.

참 고 문 헌

최윤락 (2007). “경사면에 놓인 유체 저장용 막구조물의 이론적 해석”, 한국해양공학회지, 제21권, 제1호, pp 45-50.

최윤락 (2008). "수중 유체저장용 막구조물 형상의 이론적 해석", 한국해양공학회지, 제22권, 제5호, pp 39-43.

최윤락 (2009). "부유식 유체저장용 2차원 막구조물의 이론적 해석", 한국해양공학회지, 제23권, 제4호, pp 32-37.

Demiray, H. and Levinson, M. (1972). "The Long Fluid Storage Bag: A Contact Problem for a Closed Membrane", Int. J. Mech. Sci., Vol 14, No 7, pp 431-439.

Ghavanloo, E. and Daneshmand, F. (2009). "A Semi-Analytic Approach for the Nonlinear Two-Dimensional Analysis of Fluid-Filled Thin-Walled Pliable Membrane Tubes", Eur. J. Mech. A-Solid., Vol 28, No 3, pp 626-637.

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2000). Table of Integrals, Series, and Products, 6th ed., Academic Press.

Leshchinsky, D., Leshchinsky, O., Ling, H.I. and Gilbert, P.A. (1996). "Geosynthetic Tubes for Confining Pressurized Slurry: Some Design Aspects", J. Geotech. Eng., Vol 122, No 8, pp 682-690.

Liu, G.S. and Silvester, R. (1977). "Sand Sausages for Beach Defence Work", Proc. 6th Australasian Hydraulics and Fluid Mechanics Conf., pp 340-343.

Koerner, R.B. (2000). "Emerging and Future Developments of Selected Geosynthetic Applications", J. Geotech. Geoenviron., Vol 126, No 4, pp 293-306.

Malik, J. (2009). "Some Problems Connected with 2D Modeling of Geosynthetic Tubes", Nonlinear Anal-Real., Vol 10, No 2, pp 810-823.

Maplesoft (2003). Maple 9 Learning Guide, Waterloo Maple Inc.

Plaut, R.H. and Suherman, S. (1998). "Two-dimensional Analysis of Geosynthetic Tubes", Acta Mech., Vol 129, No 3-4, pp 207-218.

Restall, S.J., Jackson, L.A., Heerten, G. and Hornsey, W.P. (2002). "Case Studies Showing the Growth and Development of Geotextile Sand Containers: An Australian Perspective", Geotext. Geomembranes, Vol 20, No 5, pp 321-342.

Wang, C.Y. and Watson, L.T. (1981). "The Fluid-Filled Cylindrical Membrane Container", J. Eng. Math., Vol 15, No 2, pp 81-88.

2011년 1월 10일 원고 접수
2011년 4월 6일 심사 완료
2011년 4월 22일 게재 확정