Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 34, No. 1, pp.67－73, March 2011.

삼변수 Max(N, T, D) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 busy period 기대값의 상한과 하한 유도

이 한 교†

한남대학교 산업경영공학과

Derivations of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating Under the Triadic Max(N, T, D) Policy

Hahn-Kyou Rhee†

Department of Industrial and Management Engineering Hannam University

Using the known result of the expected busy period for a controllable M/G/1 queueing model operating under the triadic Max (N, T, D) policy, its upper and lower bounds are derived to approximate its corresponding actual value. Both bounds are represented in terms of the expected busy periods for the dyadic Min (N, T), Min (N, D) and Min (T, D) and simple N, T and D operating policies. All three input variables N, T and D are equally contributed to construct such bounds for better estimation.

Keywords : Expected Busy Period, Operating Policy, M/G/1, Upper and Lower Bounds

1. 서 론

서비스를 기다리는 고객이 없어도 server는 앞으로 서비스를 받기 위해 도착하는 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 창구에서 항상 대기상태를 유지해야 하는 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)에서는 server의 업무시간 활용도가 효율적이지 않다. 이러한 server의 업무시간 활용도를 향상시키기 위해 새롭게 제안된 방법이 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)이다. 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server는 서비스를 제공하는 서비스 창구를 즉시 폐쇄하고 다른 업무를 수행할 수 있기 때문에 server의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 그러나 일단 폐쇄된 서비스 창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 서비스를 기다리는 고객들에게 다시 서비스를 제공할 수 있도록 규정되어 있다. 다시 말해 서비스 창구가 폐쇄된 후 서비스를 기다리는 고객이 있어도 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스 제공을 위한 서비스 창구의 재개는 허용되지 않는다. 이러한 미리 정해진 서비스 창구의 재개조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)이라 한다. 따라서 조정가능한 대기모형에서의 운용방침이 매우 중요한 역할을 하고 있기 때문에 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있다(Teghem[13]). 특히 운용방침에 포함된 시스템 상태를 표현하는 입력변수가 한 개인 경우를 단순 운용방침(simple operating policy)이라고 하며 가장 대표적인 단순 운용방침에는 아래와 같이 정의되는 N, T 그리고 D 운용방침이 있다.

논문접수일 : 2011년 03월 07일　　게재확정일 : 2011년 03월 21일
† 교신저자 hkrhee@hnu.kr

(i) N 운용방침 : Yadin and Naor[14]가 제안한 것으로, 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 서비스 제공이 재개되어 또다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

(ii) T 운용방침 : Heyman[4] 등이 제안한 것으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 재개하여 서비스의 제공이 재개된 후 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 그러나 T 단위시간이 경과된 후 서비스를 기다리는 고객이 없을 경우 또 다시 T 단위시간 혹은 또 다른 T 단위시간 등 서비스를 기다리는 고객이 최소한 한 명이상이 있을 때까지 서비스 창구가 폐쇄된다.

(iii) D 운용방침 : Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 서비스 제공을 재개하여 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

단순 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 고객이 없어도 server가 항상 대기상태에 있는 일반적인 대기모형보다는 server의 업무시간을 효과적으로 활용할 수 있다는 장점이 분명히 있다. 그러나 시스템의 상태를 나타낼 수 있는 많은 조건들 중에서 단순히 한 가지 시스템 상태에 따라 폐쇄된 서비스 창구를 재개해야 하기 때문에 시스템 운용에 유연성이 부족하여 실제 상황에 적용하기에는 미흡한 점이 있을 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위한 방법으로 현재 적용되고 있는 단순 운용방침에 또 다른 하나의 시스템 내부의 조건을 나타내는 단순 운용방침을 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee and Sivazlian[3]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스 창구가 재개될 수 있는 조건에 유연성이 추가된 이변수 운용방침은 선정된 두 개의 단순 운용방침들이 특이한 형태로 결합된 것으로 여기에는 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$, $Min(T, D)$, $Max(N, T)$, $Max(N, D)$, $Max(T, D)$ 운용방침 등이 있다. $Min(N, D)$과 $Max(N, D)$ 운용방침은 다음과 같은 의미로 정의되며 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee, and Sivazlian[3]; Rhee [7, 8, 9]).

(i) $Min(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없으면 server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 처음으로 N명이 되는 순간 혹은 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 두 가지 조건 중에서 어느 것이나 먼저 만족될 때 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \rightarrow \infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \rightarrow \infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침은 D 운용방침과 동일하게 된다.

(ii) $Max(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없으면 server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 처음으로 service를 기다리는 고객의 수가 N명 이상이 되고 또한 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간을 처음으로 초과하는 순간, 즉 두 조건이 처음으로 모두 만족될 때 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \rightarrow 0$이면 $Max(N, D)$ 운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \rightarrow 0$이면 $Max(N, D)$ 운용방침은 D 운용방침과 동일하게 된다.

특히 최근에는 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순 운용방침이 모두 결합된 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee and Oh[10, 11]에 의해 제안되었다. 예를 들면 아래와 같이 정의되는 삼변수 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침 등이 있다. 이들은 다양한 시스템 상태를 고려하기 때문에 유연성 확보라는 장점이 있지만 상대적으로 많은 입력변수가 포함되어 있기 때문에 분석의 과정이 이변수 운용방침의 경우보다는 더욱 더 복잡하고 어려워지는 단점이 있다.

(i) $Min(N, T, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명 이상이 되거나 혹은 $mT(m=1, 2, 3..)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명의 고객이 도착하거나, 그리고 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 세 가지 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을

때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$ 운용방침과 동일하고, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(D, T)$ 운용방침과 동일하며 $T \to \infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다. 따라서 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$, $Min(D, T)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침의 일반형으로 볼 수 있다.

(ii) $Max(N, T, D)$ 운용방침 : 단순 혹은 이변수 운용방침과 마찬가지로 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server는 즉시 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 보조업무를 수행한다. 그 후, 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객수가 N명 이상이 되고, mT $(m = 0, 1, 2 \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명이상의 고객이 서비스를 받기 위해 도착하며 또한 서비스를 받기 위해 기다리는 모든 고객에게 예상되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간 이상의 조건 모두를 처음으로 만족하는 순간 server는 수행중인 다른 보조업무를 중단하고 폐쇄된 서비스 창구를 재개하여 서비스를 받기 위해 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to 0$이면 $Max(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 또한 $N \to 1$이면 $Max(T, D)$과 동일하게 되고, 그리고 $T \to 0$이면 $Max(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 직접 적용하기 위해 적절한 운용방침이 선정될 경우 이에 따른 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기대값, 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기대값, 등 다양한 형태의 시스템 특성치들이 의사결정과정에서 매우 중요한 역할을 하게 된다. 여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스 창구를 폐쇄할 때까지 소요되는 시간간격을 말한다(Rhee[6, 7, 12]). 이미 앞서 언급한 것과 같이 이러한 시스템 특성치는 운용방침에 포함된 입력변수의 수가 증가하면 증가할수록 유도과정이 어렵고 복잡해지는 특징이 있다. 다시 말해 이변수 혹은 삼변수 운용방침이 적용될 때와 단순 운용방침이 적용될 때의 경우를 살펴보면 쉽게 확인할 수 있다(Rhee and Oh[10, 11]). 제기된 문제점을 해결하기 위한 하나의 방편으로 가장 많은 유연성을 지닌 삼변수 운용방침을 실제상황에서 쉽게 적용할 수 있도록 시스템 특성치의 근사값을 제공해 줄 수 있는 상한과 하한을 단순 운용방침과 이변수 운용방침이 적용될 때의 시스템 특성치들로 표현하는 것이다. 이미 $Min(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값의 상한과 하한은 Rhee[8]에 의해 제안되었기 때문에 여기에서는 또 다른 형태의 삼변수 운용방침인 $Max(N, T, D)$에 따른 busy period 기대값에 대한 상한과 하한을 유도함을 본 연구의 목적으로 설정한다. 객관성과 정확성을 담보하기 위해 삼변수 운용방침에 포함된 모든 단순 N, T 그리고 D 운용방침의 역할이 모두 포함되도록 한다. 또한 기존의 알려진 단순 혹은 이변수 운용방침의 busy period 기대값을 사용함으로서 추가적인 정보의 도출없이 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값 등의 다른 특성치들에 관해서도 근사값으로 활용되는 상한과 하한을 확보할 수 있는 접근방법과 이에 따른 유도과정을 제시한다.

3. 대기모형의 정의

steady-state에 있는 $M/G/1$ 대기모형에 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 고객들은 Poisson 과정에 따라 대기시스템에 도착하며, 연속된 두 고객의 평균 도착시간간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $j = 0, 1, 2 \cdots$에 대한 $N(t)$의 확률분포함수는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t) = j] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_n(T) = P[N(T) \geq n] = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호독립이며 동일한(identical) 분포로 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시하며, 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(j)}(D) = \int_0^D [f_S(t)]^{*(j)} dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[5] or Conolly[2]).

$$E[B_o] = \frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

4. 단순, 이변수 그리고 삼변수 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값

Gakis, Rhee, and Sivazlian[3]의 결과에 따르면, 만약 단순 N, T 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period의 기대값을 각각 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$라고 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N] = NE[B_o] \tag{5}$$

$$E[B_T] = \frac{\lambda TE[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{6}$$

$$E[B_D] = E[B_o]\sum_{j=1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) \tag{7}$$

또한 이변수 운용방침 $Min(N, D)$, $Min(N, T)$, $Min(T, D)$, $Max(N, T)$, $Max(N, D)$ 그리고 $Max(T, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때의 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$, $E[B_{Max(N,D)}]$, $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$라고 하면 이들은 또한 다음과 같이 주어진다(Rhee[6]).

$$E[B_{Min(N,D)}] = E[B_o]\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \tag{8}$$

$$E[B_{Min(N,T)}] = \frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{9}$$

$$E[B_{Min(T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \tag{10}$$

$$E[B_{Max(N,D)}] = E[B_0]\left\{N + \sum_{j=N+1}^{\infty} G^{(j-1)}(D)\right\} \tag{11}$$

$$E[B_{Max(N,T)}] = N[B_0] + \frac{\lambda TE[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{12}$$

$$E[B_{Max(T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}\{H_j(T) + [H_1(T) - H_j(T)]\, G^{(j-1)}(D)\} \tag{13}$$

또한 삼변수 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용될 때의 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,T,D)}]$와 $E[B_{Max(N,T,D)}]$라 정의하면 다음과 같이 주어진다(Rhee and Oh[10, 11]).

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D)$$

$$E[B_{Max(N,T,D)}] = N[B_0] + \frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\{[H_1(T) - H_n(T)]G^{(n-1)}(D) + H_n(T)\} \tag{14}$$

각 busy period의 기대값에 포함되어 있는 $E[B_o]$, $H_j(T)$와 $G^{(j-1)}(D)$는 식 (4), 식 (2)와 식 (3)에 각각 정의되어 있으며 아래와 같은 중요한 관계식을 만족한다.

(i) $H_1(T) = P[N(T) \geq 1] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!}$

$$= 1 - P[N(T) = 0] = 1 - e^{-\lambda T} \tag{15}$$

(ii) $j = 1, 2, 3 \ldots$에 대해 $H_j(T) \geq H_{j+1}(T)$,

즉 $1 \geq H_1(T) \geq H_2(T) \geq H_3(T) \geq \ldots$ (16)

(iii) $j = 1, 2, 3 \ldots$에 대해 $G^{(j)}(D) \geq G^{(j+1)}(D)$,

즉 $1 \geq G^{(1)}(D) \geq G^{(2)}(D) \geq G^{(3)}(D) \geq \ldots$ (17)

5. $Max(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값의 상한 설정

식 (14)에서 제시된 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 삼변수 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 때 busy period 기대값 $E[B_{Max(N,T,D)}]$으로 부터

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\{[H_1(T) - H_n(T)]G^{(n-1)}(D) + H_n(T)\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{[H_1(T) - H_n(T)]G^{(n-1)}(D) + H_n(T)\}$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T) - H_n(T)]G^{(n-1)}(D) + H_n(T)\}$$

따라서 아래의 관계식이 성립한다.

$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\}=$$
$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\}$$
$$-\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\} \tag{18}$$

식 (18) 우변의 첫 번째 항은 식 (13)에서 주어진 결과를 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\}$$
$$=E[B_{Max(T,D)}] \tag{19}$$

또한 식 (18) 우변의 두 번째 항은 아래와 같이 표현된다.

$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\}$$
$$=\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_1(T)G^{(n-1)}(D)$$
$$-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D)$$
$$+\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T) \tag{20}$$

그런데 식 (20)에서 주어진 우측 첫 번째 항은 식 (15)에서 주어진 결과를 대입하면 식 (8)에서 주어진 것과 동일한 결과를 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_1(T)G^{(n-1)}(D)=E[B_o]\sum_{j=1}^{N}G^{(j-1)}(D)$$
$$=E[B_{Min(N,D)}] \tag{21}$$

그리고 식 (20)의 우측 마지막 항은 식 (9)에서 주어진 결과와 동일하다, 즉

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)=E[B_{Min(N,T)}] \tag{22}$$

마지막으로 식 (20)의 우측 두 번째 항은 식 (17)에서 주어진 결과를 사용하면 다음과 같은 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D)\le\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T) \tag{23}$$

따라서 부등식 (23)에 식 (9)의 결과를 대입하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D)\le E[B_{Min(N,T)}] \tag{24}$$

식 (20)에 식 (21), 식 (22) 그리고 식 (24)에서 주어진 결과를 결합하면 아래와 같은 부등식이 유도된다.

$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\}\ge$$
$$E[B_{Min(N,D)}]-E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(N,T)}]$$
$$=E[B_{Min(N,D)}] \tag{25}$$

따라서 식 (14)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$에 식 (5), 식 (19) 그리고 식 (25)의 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}]\le E[B_N]+E[B_{Max(T,D)}]-E[B_{Min(N,D)}] \tag{26}$$

그런데 식 (27)에서 주어진 $E[B_{Min(T,D)}]$와 $E[B_{Max(T,D)}]$의 관계식(Rhee[9])을

$$E[B_{Max(T,D)}]=E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Min(T,D)}] \tag{27}$$

부등식 (26)에 대입하면 아래와 같은 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 상한을 구축할 수 있다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}]\le E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Min(T,D)}]$$
$$-E[B_{Min(N,D)}] \tag{28}$$

$E[B_0]$, $E[B_N]$, $E[B_T]$, $E[B_D]$, $E[B_{Min(T,D)}]$와 $E[B_{Min(N,D)}]$는 각각 식 (4) ~ 식 (7), 식 (10)과 식 (11)에 주어져있다.

또 다른 형태의 상한은 $E[B_{Min(N,T,D)}]$와 $E[B_{Max(N,T,D)}]$ 관계식(Rhee[9])과 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 상한을 사용하면 유도할 수 있다(Rhee[8]). 즉, 아래의 식 (29)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$와 $E[B_{Max(N,T,D)}]$ 관계식을

$$E[B_{Max(N,T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}]$$
$$=E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]$$
$$-E[B_{Min(N,T)}]-E[B_{Min(N,D)}]-E[B_{Min(T,D)}] \tag{29}$$

부등식 (30)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$ 상한에 대입하면

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le \frac{E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(T,D)}]+E[B_{Min(N,T)}]}{3} \quad (30)$$

또 다른 형태의 상한을 아래와 같이 구축할 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le E[B_N]+E[B_T]+E[B_D] - \frac{2}{3}(E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(T,D)}]) \quad (31)$$

$E[B_{Min(N,T)}]$는 식 (12)에 주어져있다.

이와 같이 다양한 접근방법에 따라 다른 형태의 상한이 유도될 수 있지만 실제값에 가장 근접된 상한의 유도가 기본적인 목적이기 때문에 식 (28)와 식 (31)를 비교하여 작은 값을 선택하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

6. $Max(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값의 하한 설정

식 (16)에서 주어진 결과를 사용하면 다음과 같은 결과를 도출할 수 있다.

$$0 \le H_1(T) - H_n(T) \le 1$$

따라서 식 (20)는 다음과 같은 부등식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\} \\
&= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_1(T)G^{(n-1)}(D) \\
&- \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D) \\
&+ \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T) \\
&\ge \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D) \\
&- \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D) \\
&+ \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T) \\
&= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_n(T) \quad (32)
\end{aligned}$$

식 (9)에서 주어진 결과를 사용하면 부등식 (32)는 다음과 같다.

$$\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(n-1)}(D)+H_n(T)\} \ge E[B_{Min(N,T)}] \quad (33)$$

따라서 식 (5)와 식 (19) 그리고 부등식 (33)의 결과를 식 (14)에 대입하면 아래와 같은$E[B_{Max(N,T,D)}]$의 하한을 유도할 수 있다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}] \ge N[B_0]+E[B_{Max(T,D)}]-E[B_{Min(N,T)}] \quad (34)$$

그리고 식 (35)에서 주어진 $E[B_{Min(T,D)}]$와 $+E[B_{Max(T,D)}]$의 관계식(Rhee(9)]을

$$E[B_{Max(T,D)}] = E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Min(T,D)}] \quad (35)$$

부등식 (34)에 대입하면 다음과 같은 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 하한을 확보할 수 있다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}] \ge N[B_0]+E[B_T]+E[B_D] - E[B_{Min(T,D)}]-E[B_{Min(N,T)}] \quad (36)$$

상한의 경우와 마찬가지로 다른 형태의 하한을 식 (29)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$와 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 관계식과 식 (37)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 하한(Rhee[8])을

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \ge \frac{2}{3}(E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(T,D)}]) - \frac{1}{3}(E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]) \quad (37)$$

사용하면 아래와 같은 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 하한이 유도된다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}] \ge \frac{2}{3}(E[B_N]+E[B_T]+E[B_D]) - \frac{1}{3}(E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(T,D)}]) \quad (38)$$

$E[B_{Max(N,T,D)}]$의 하한은 유도된 다양한 형태의 하한들 중에서 가장 큰 값을 선택하는 것이 실제값에 가장 근접된

값이 됨을 알 수 있다. 따라서 부등식 (36)와 부등식 (38)에서 주어진 하한 중에서 큰 것을$E[B_{Max(N,T,D)}]$의 하한으로 선택하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

7. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 삼변수 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값의 상한과 하한을 단순 N, T 그리고 D 운용방침 그리고 이변수 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$ 그리고 $Min(T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값으로 표현하였다. 이를 사용하면 현장에서 보다 수월하게 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값의 근사치를 확보할 수 있음을 확인하였다. 특히 상한과 하한의 값에는 고려된 모든 단순 그리고 이변수 운용방침이 동등하게 기여하고 있음을 또한 확인할 수 있다. 이를 기초로 보다 실제값에 근접된 상한과 하한의 값을 유도할 수 있는 다양한 접근방법론을 제시하였다. 둘째, 삼변수 운용방침의 상한과 하한의 값을 기초로 다른 시스템 특성치, 즉 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값 등에도 유사한 방법을 활용하면 복잡한 형태를 간편한 형태로의 변환이 가능함을 제시하였다. 마지막으로 또 다른 형태의 삼변수 운용방침 즉, 가장 일반적인 형태의 삼변수 $Med(N, T, D)$이 적용되었을 경우 busy period 기대값의 상한과 하한의 값을 유사한 접근 방법으로 유도할 수 있다는 가능성을 또한 제시하였다.

참고문헌

[1] Balachandran K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] Conolly, B.; Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY. 1975.

[3] Gakis, H. K., Rhee and Sivazlian B. D.; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[4] Heyman, D.; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[5] Kleinrock, L.; Queueing Systems, 1 : Theory, John Wiley and Sons, NY. 1975.

[6] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies," 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739, 1997.

[7] Rhee, H. K.; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침 (Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교논문집, 32 : 141-153, 2002.

[8] Rhee, H. K.; "조정가능한 M/G/1 대기모형에 삼변수 Min(N, T, D) 운용방침이 적용될 때 busy period의 기대값의 상한과 하한 유도", 한국산업경영시스템학회지, 33(2) : 97-104, 2010.

[9] Rhee, H. K.; "Busy period 기대값을 사용하여 삼변수 Min(N, T, D)와 Max(N, T, D) 운용방침 사이의 관계식 설정", 한국산업경영시스템학회지, 33(3) : 63-70, 2010.

[10] Rhee, H. K. and H. S. Oh.; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[11] Rhee, H. K. and H. S. Oh.; "가상확률밀도함수를 사용하여 Max(N, T, D) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모의 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 31(4) : 86-92, 2007.

[12] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic(0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[13] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[14] Yadin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963