J. of the Chosun Natural Science
Vol. 4, No. 2 (2011) pp. 121 – 129

Estimation of Volatility of Korea Stock Price Index Using Winbugs

Hyoung Min Kim[1], In Hong Chang[2†] and Seung Woo Lee[3]

Winbugs를 이용한 우리나라 주가지수의 변동성에 대한 추정

김형민[1] · 장인홍[2†] · 이승우[3]

Abstract

The purpose of this paper is to estimate the fluctuation of an earning rate and risk management using the price index of Korea stocks. After an observation of conception of fluctuation, we can show volatility clustering and fluctuation phenomenon in the Korea stock price index using GARCH model with heteroscedasticity. In addition, the effects of fluctuation on the time-series was evaluated, which showed the heteroscedasticity. MCMC method and Winbugs as Bayesian computation were used for analysis.

Key words : GARCH Model, MCMC, Volatility, Winbugs

1. 서 론

1.1. 연구 배경 및 목적

증권 산업을 비롯한 국내 외 금융시장의 상황은 하루가 다르게 급격하게 변화해가고 있다. 이에 따라 금리, 환율, 주가, 유가, 부동산과 같은 시계열 자료들은 시간에 따라 변화가 커지고 있다. 사람들은 이런 시간적 자료들에 대해 분석을 하고 예측을 하고 싶어 한다. 그런데 이러한 자료의 예측을 한다는 것은 그리 쉬운 일은 아니다. 예를 들어 시계열 자료인 주가의 자료를 보면 자료의 변동성이 매우 크다는 것을 알 수가 있다. 즉, 경제시계열 자료들은 시간에 따라 상승이 지속되기도 하고 하락이 지속되기도 하며 갑작스레 큰 폭으로 변동하기도 한다. 이러한 상황 하에서 사람들은 정확한 판단 없이 기대 수익률에만 관심을 둔 비합리적인 투자를 하고 있다. 보다 합리적인 투자를 위해 변동성(Volatility)을 추정하고 예측하는 합리적인 투자의사결정을 해야 한다.

여기서 나오는 변동성이라는 것은 통계학적으로 보면 분산을 의미한다. 이 변동성이라는 것은 Risk(위험)를 분석하는데 사용을 한다. 이러한 변동 현상이 나타나는 이유는 미래의 값의 분산이 현재의 상황에 관련이 있다는 것을 의미한다. 즉, 주가의 자료에서 보듯이 시계열자료는 변동성이 매우 크다는 것을 알 수 있다. 그래서 자료의 현시점에서 변동폭인 분산이 최근의 자료에 영향을 많이 받는다는 것에 착안하여 이를 모형화하기 위해서 Engle(1982)은 조건부 이분산 자기회귀(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity : ARCH) 모형을 제안하였다. 시간 가변적 분산을 측정할 수 있는 방법은 각 관찰치의 우도를 조건부 확률밀도로 분해하는 것이다. 즉, ARCH모형의 추정은 최우추정법을 사용해서 추정된다. 이렇게 함으로써 불확실성의 척도를 무조건부분산이 아닌 조건부분산으로 해석하여 우도함수가 용이하게 만들어 질 수 있다. ARCH모형은 자산수익률의 변동성의 특징을 표현하기 위해 GARCH, EGARCH, IGARCH, TGARCH 등과 같은 조건부분산모형으로 확대되었다. ARCH모형 이후 Bollerslev(1986)가 오차의 분산에 자료의 값과 전 시점의 분산을 일반화시키므로 GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)모형을 제시하였다. 최근 변동성 연구로는 윤재호(2009)는 최적필터 방법을 이용하여 주가의 확률변동성과 점프를 신속하게 추출함으로써 주가 변동의 원인 분석은 물론 향

[1]조선대학교 대학원 전산통계학과 (Department of Computer Science & Statistics, College of Natural Sciences, Chosun University)
[2]조선대학교 컴퓨터 통계학과 (Department of Computer Science & Statistics, College of Natural Sciences, Chosun University)
[3]조선대학교 대학원 전산통계학과 (Department of Computer Science & Statistics, College of Natural Sciences, Chosun University)

†Corresponding author : ihchang@chosun.ac.kr
(Received : May 24, 2011, Revised : June 17, 2011, Accepted : June 20, 2011)

후 주가변동성을 예측하는데 유용함을 보였고, 장원(2009)는 Bayesian UHF GARCH-M모형을 이용한 변동성 및 European option 가격분포를 추정하였다.

본 논문에서는 GARCH(1,1)모형을 국내 시계열 자료인 KOSPI를 이용하여 최우추정법이 아닌 Bayesian 방법으로 접근을 해보고자 한다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 GARCH모형의 이론적 배경을 설명하고, 3장에서는 베이지안 방법의 이론적 배경을 설명하고, 4장에서는 실증분석으로 주가종합주가지수인 KOSPI를 사용하여 Winbugs를 이용한 베이지안 접근방법으로 GARCH모형의 변동성의 특성을 알아보고자 한다. 5장에서는 본 연구에 대한 결론을 제시하는 것으로 논문을 마치고자 한다.

2. 이분산성 시계열 모형

시계열자료를 설명하기 위해 확률모형을 이용하는 것은 이미 잘 알려져 있다. 정상적인 확률모형의 하나로 자기회귀이동평균(AutoRegressive Moving Average : ARMA)모형이 있다. ARMA모형은 과거의 정보가 주어졌을 때의 현재 관측값 Y_t의 모형은 기댓값을 이용한다.

$$Y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots) + \varepsilon_t$$

여기서 ε_t는 $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$인 백색잡음(white noise)이다. Y_{t+1}의 예측값은 다음과 같이 주어진다.

$$E(Y_{t+1}\ Y_t,\ Y_{t-1},\ Y_{t-2}, \ldots)$$

기본 가정들은 조건부 평균은 일정하지 않고, 조건부 분산은 일정하다. 그리고 조건부 분포는 정규분포이다. 그러나 어떤 자료들에서는 조건부 분산이 일정하다는 가정은 사실이 아니다. 예를 들어, 근래의 주가들은 일반적으로 변동성을 가지고 있다고 생각한다. 그러면 현재의 주가들도 높은 변동성을 가지고 있으리라 예측된다. 만약 주가 자료에 대한 모형을 ARMA모형을 이용한다면, 시간의 변화에 따라 변하는 조건부 분산에 대한 형태를 찾아내지 못할 것이다. 그 과정의 형태는 통상적으로 이분산성과 관련이 있다. 즉, 과거의 정보로부터 분산의 영향에 대해 부가적으로 생각해야 하며, 모형을 좀 더 일반화 할 필요가 있다.

Engle(1982)은 조건부 평균과 조건부 분산의 모형을 위해 다음의 정의를 이용하였다.

정의 : Y_{t-1}, Y_{t-2},...가 주어졌을 때 Y_t의 조건부 평균 모형에서 조건부 분산은 일정하지 않으며, 조건부 표준편차의 항은 다항 백색잡음이다. 이것을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_t = f(Y_{t-1},\ Y_{t-2}, \ldots) + \varepsilon(Y_{t-1},\ Y_{t-2}, \ldots)\varepsilon_t$$

Engle의 모형은 위의 원칙으로 인해 조건부 분산을 모형화 하였으며, 이 모형은 자기회귀 조건부 이분산(Autoregressive Conditional Heteroscedastic : ARCH) 모형으로 많이 알려져 있다. ARCH모형은 다양한 특성들을 가지고 있으며, 여러분야에서 적용할 수 있어 관심을 많이 받아왔다.

2.1. ARCH모형(Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity)

자산가격의 변동성에서 흔히 관찰되는 시계열 의존성(serially dependence)을 모형화한 것이 ARCH모형이다. 일반적으로 경제 시계열들의 종속구조는 분산값이 자신의 값(auto)에 조건부(conditional)로 의존하는 이분산(heteroscedasticity)현상이 발생하게 된다. 예를 들어, 현재의 분산과 조직적인 관계를 지니고 있는 '군집현상'은 이분산의 대표적인 예라 할 수 있다. 변동성 군집 또는 fat tail의 특성을 갖는 시계열을 조건부분산의 관점에서 모형화 하기 위하여 Engle(1982)은 다음과 같은 p-차 자기회귀형 조건부분산(autoregressive conditional heteroscedasticity) 또는 줄여서 ARCH(p)모형을 제안하였다.

$$Y_t = X_t\beta + \sigma_t\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\psi_{t-1},\ \varepsilon_t \sim (0,\ \sigma_t^2)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2$$
$$(\text{단},\ \alpha_0 > 0;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0)$$

Y_t은 보통의 다중회귀식이며, 다만 다른 점은 확률오차항이 ε_t에서 보는 것처럼 조건부정규분포 한다는 것이다. 설명변수 벡터 X_t는 t시점에서 고정되어 있다고 가정하는 것도 일반 다중회귀식과 같다. 흔히 금융시계열 분석에 있어서 X_t는 종속변수 자신의 래그들과 σ_t^2 식에 정의된 조건부 분산이나 표준편차 또는 기타의 외생적 설명변수들을 포함할 수 있다. 이러한 모형을 ARCH모형이라고 하는 이유는 다음과 같다.

위의 식을 고쳐쓰면

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + (\varepsilon_t^2 + \sigma_t^2)$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_t\varepsilon_{t-p}^2 + \upsilon_t$$
$$(\text{단},\ \upsilon_t = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1))$$

가 되어 잔차항의 제곱이 AR(p) 과정을 따른다.

$$\sigma_t^2 \equiv Var(y_t\psi_{t-1}) = Var(\varepsilon_t\psi_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2\psi_{t-1})$$

로 정의되므로 위의 식(1.)의 양변에 (t-1)시점의 기댓값을 취하면,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2$$

가 되어 보통의 p-차 자기회귀(autoregressive)모형을 따르는 것을 알 수 있다. 또한 이분산성을 갖게 되는 이유는 ε의 실현된 래그값에 따라 σ_t^2가 항상 변할 수 있기 때문이다. 일정한 조건하에서 y_t는 첨예분포를 가지며, ε_t^2(또는 y_t^2)는 안정적 자기회귀과정을 따르고 따라서 분산집중을 야기할 수 있다. 그러므로 ARCH(p) 모형은 꼬리가 두터운 특성을 가지는 금융시계열을 모형화 하는 데 유용할 수 있음을 알 수 있다.

2.2. GARCH 모형

ARCH(p)모형을 추정하는 경우 래그 p를 크게 설정해야 하는 경향이 있다. 대안으로 Bollerslev(1986)는 ARCH모형을 일반화하는 다음과 같은 GARCH(p,q)모형(Generalized ARCH)을 제안하였다.

$$Y_t = X_t\beta + \sigma_t\varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$$
$$\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t, \varepsilon_t\psi_{t-1}, \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q}^2$$
$$= \alpha_0 A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\sigma_t^2$$

단,

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots \beta_q, A(L)$$
$$= \alpha_1 L + \cdots + \alpha_p\sigma^p, B(L) = \beta_1 L + \cdots + \beta_q L^q, p = q = 1$$

인 경우, 즉 가장 간단한 GARCH(1,1)모형을 예로 들어보자.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

식 (1.2.18)의 양변에 (t-1)시점 조건부 기대값을 취하면

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

가 되므로 이를

$$(1 - \alpha_1 L - \beta_1 L)\sigma_t^2 = \alpha_0$$

로 다시 쓰면 GARCH(1,1)모형이 의미하는 비조건부 분산은 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1-\beta_1)}, (\alpha_1+\beta_1) < \text{인 경우}$$

GARCH모형을 도입하는 이유는 GARCH(1,1)모형을 예로 들 때 이를 반족적 대입과정을 통하여 다음과 같은 ARCH(∞)모형으로 다시 쓸 수 있기 때문이다.

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\beta_1)} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2$$

즉, 작은 수의 파라미터를 사용함에도 불구하고 긴 래그의 ARCH모형을 추정하는 것과 유사한 효과를 가져오기 때문이다. 실제로 우리가 자주 접하는 금융시계열들의 변동성은 매우 지속적(persistent)인 것으로 보이며, 흔히 단순한 GARCH(1,1)모형으로도 대부분 잘 모형화 할 수 있는 것으로 알려져 있다.

GARCH(p,q)모형에 관해서는 다음의 두 정리를 기억할 필요가 있다.

(1) GARCH(p,q) 모형이

$E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \alpha_0(1 - A(1) - B(1))^{-1}$ 그리고 Cov $(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0(t \neq s)$ 를 갖는 약한 의미에서의 안정성을 갖기 위한 필요충분조건은

$$A(1) + B(1) < 1$$

따라서 $p = q = 1$인 경우, GARCH모형의 약안정성 조건은 $\alpha_1 + \beta_1 < 1$이고 비조건부분산은 위에서 살펴본 바와 같이 $\sigma^2 = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$이다. 비조건부 분산식을 보면 왜 α_0가 영(0)보다 커야 하는 이유를 알 수 있다.

(2) GARCH(1,1) 과정의 경우

만일 $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ 이면 4차 모멘트가 존재한다. 즉,

$$E(\varepsilon_t^4) = 3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)$$
$$[(1-\alpha_1-\beta_1)(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)]^{-1}$$

따라서 초과첨도(excess kurtosis)는 다음과 같이 계산된다.

$$x = [E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2]E(\varepsilon_t^2)^{-2}$$
$$= 6\alpha_1^2(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)^{-1} > 0$$

즉, GARCH(1,1)은 leptokurtic하고 fat tail을 갖는 시계열 자료를 모형화하는 경우에 적합함을 알 수 있다.

대부분의 경우 GARCH모형은 금융시계열 자료를 분석하고 조건부 변동성을 추정하는데 합리적이고 좋은 모형이다. 그러나 특별한 자료의 다양한 특성을 잘 나타낼수 있어 모형의 접합도를 높일 수 있는 다양한 모형들이 있어 이들에 대해 알아보고자 한다.

2.3. EGARCH 모형

GARCH모형의 경우 조건부 분산이 항상 양(positive)의 값을 갖기 위해 제약조건이 존재하는데 이 조건은 조건부 분산을 필요 이상으로 제약적으로 만들 가능성이 있으며, 원래의 GARCH모형은 현재의 수익률과 미래 수익률의 변동성 사이의 음(negative)의 상관관계를 고려하지 않고 있다. 이는 시장이 참가자들의 기대 밖의 하락세에 있을 때 양의 충격에 비하여 음의 충격이 변동성에 더 큰 영향을 미친다는 정보효과인 레버리지 효과(leverage effect)를 고려하지 않은 것으로 해석할 수 있다. 반면에 일반적인 GARCH모형은 현재수익률의 잔차항의 제곱이 미래의 수익률의 변동성에 영향을 미치게 되어 조건부 변동성에 대한 충격이 양인지 음인지 상관없이 대칭적인 효과를 미치기 때문에 이점을 고려하여 Nelson(1991)은 다음과 같은 EGARCH(Exponential GARCH)모형을 제안하였다.

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_1 \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q}\beta\ln\sigma_{t-j}^2$$

위의 식에서 $\varepsilon_{t-1} > 0$, 즉 좋은 정보(good news)이면 효과는 $(1+\gamma_i)\varepsilon_{t-i}$ 이고, 반대로 $\varepsilon_{t-1} < 0$, 즉 나쁜 정보(bad news)이면 효과는 $(1+\gamma_i)\varepsilon_{t-i}$ 이 된다. 여기서 γ_i가 통계적으로 유의한 음의 값을 갖는다면 레버리지 효과가 있는 것으로 나쁜 정보가 좋은 정보보다 변동성에 더 큰 영향을 미치게 된다는 것을 의미한다.

EGARCH모형은 모수에 대한 제약조건이 없어도 조건부 분산이 항상 양이 되며, $\beta < 1$이면 $\ln\sigma_t^2$과정은 정상성을 만족하며, 선형 ARCH모형들과는 달리 원계열의 제곱 (y_t^2)과정의 자기상관계수는 부호를 바꿔가는 사이클 형태를 보일 것이다.

EGARCH모형은 오차항 ε의 확률밀도함수를 가정하고 최우추정법으로 추정할 수 있는데 정규분포를 가정하는 경우 $\varepsilon_t = \sigma_t\varepsilon_t$의 분산을 $\sigma_t^2 = \exp(\ln\sigma_t^2)$으로 변환하여 우도함수에 대입해야 한다. Nelson은 정규분포 대신 평균과 분산을 각각 0과 1로 정규화한 일반화오차분포(Generalized Error Distribution ; GED)를 제안하기도 하였다.

2.4. TGARCH 모형

레버리지 효과를 고려하는 또 다른 모형으로 Glosten, Janganathan과 Runkle(1993)은 다음과 같은 TGARCH(Threshold GACRH)모형을 제안하였다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{p}\gamma_i S_{t-i}\varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_i\sigma_{t-j}^2$$

$$S_{t-1} = \begin{cases} 1, \varepsilon_{t-i} > 0 \\ 0, \varepsilon_{t-i} < 0 \end{cases}$$

위의 식에서 ε_{t-1}가 0을 기준으로 크고 작음에 따라서 조건부 분산 σ_t^2에 다른 영향을 미치게 되는데, $\varepsilon_{t-1} < 0$이면 나쁜 정보로 효과는 $\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2$ 이고, 반대로 $\varepsilon_{t-1} > 0$이면 좋은 정보로 효과는 $(\alpha_i+\gamma_i)\varepsilon_{t-i}^2$ 이 된다. 여기서 레버리지 효과가 있다면 는 통계적으로 유의한 양의 값을 갖는다.

2.5. IGARCH 모형

실증분석에 있어서 관측치의 빈도가 높을수록 $\lambda = \alpha_i + \beta_i$은 1에 매우 가까운 경우가 때때로 있는데 IGARCH (Integrated GARCH)모형은 $\lambda = 1$인 경우에 사용하는 모형으로 이때는 $1 = \alpha_i + \beta_i$이므로 α_i이나 β_i 중 하나만 추정하게 된다. 간단히 $p = q = 1$인 GARCH(1,1)모형의 경우 조건부 분산은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1-\beta_0)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2, 0 \le \beta_1 \le 1$$

IGARCH모형은 위의 식에서 오른쪽의 σ_{t-i}^2 을 반복적으로 대입하면 EWMA모형과 동일한 효과를 갖게 된다. 또한 IGARCH모형의 변동성 예측치는 정상성을 갖는 GARCH(1,1)모형과 달리 수렴하지 않으며 다음 식과 같다.

$$E_T[\sigma_{T+k}^2] = \sigma_T^2 + k \cdot \alpha_0$$

따라서 현재의 변동성은 무한한 미래의 변동성에 영향을 미친다.

IGARCH(1,1)모형은 표류항(drift)으로 α_0를 갖는 선형임의보행과정과 유사하게 보이지만 실제로는 일반적으로 ε_0의 비조건부 분포가 모든 t에 대해 항상 같아서 강한 의미의 정상성을 만족한다.

2.6. GARCH-M 모형

재무이론에서 위험이 높아지면 기대위험프리미엄도 커져서 높은 수익률을 기대할 수 있게 된다. 이런 이론에 기초하여 Engle. Lilimen과 Robins(1987)는 조건부 분산의 변동뿐만 아니라 이러한 변동이 조건부평균 즉 조건부 수익률에 미치는 영향(δ)을 고려하여 모형의 평균 방정식에 조건부 분산을 포함시킨 GARCH-M(GARCH-in-mean)모형을 제안하였다.

$$y_t = xb + \varepsilon_t + \delta\sigma_t^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_i\sigma_{t-j}^2$$

그동안 재무이론에서 위험프리미엄(risk premium)의 평가는 매우 중요한 문제였는데 이를 예측하거나 측정하기 위한 방법으로 단순회귀모형은 부적절한 것으로 알려져 왔으며 최근의 연구 성과에 의하면 자산수익률의 위험과 기대수익률이 시간이 지남에 따라 변하는 것으로 밝혀지고 있어 GARCH-M모형은 이러한 관계를 모형화한 것으로 볼 수 있다.

위 식을 보면 위험을 나타내는 σ_t^2가 수익률의 조건부 평균에 대한 설명변수이므로 이전에 조건부 평균과 조건부 분산이 일정하다고 가정하는 CAPM(Capital Asset Pricing Model)검증방법의 문제도 GARCH-M모형을 이용하여 검증할 수 있어 유용하다.

3. 베이지안의 이론적 배경

3.1. 베이지안 추론

'베이지안 통계학'이란 관심있는 모든 것(모수, 결측치, 예측치 등)들에 대한 불확실성(uncertainty)을 확률분포로써 나타낸다는 가정에서 출발하는 것으로서 전통적인 통계학의 기본 가정인 "고정된 미지"라는 관점과는 근본적으로 출발점이 다르다. 따라서 베이지안 추론의 근간은 사후분포 또는 사후밀도함수이다. 사후밀도함수(posterior density function)함수는 우도함수(likelihood function)와 사전밀도함수(prior density function)의 곱에 비례하는 함수로서 우도함수에 따라 압축된 표본정보와 사전밀도함수에 암축된 사전정보를 베이지 정리에 의하여 합성한 것이다. 따라서 베이지안 패러다임은 개념적으로 간단하고, 직관적, 확률적 타당성을 지닌다고 볼수 있다.

3.1.1. 전통적 접근방법과 베이지안 접근방법

전통적 접근방법은 우리가 흔히 통계적 접근이라고 명명하는 일반적인 추정과 검정의 절차에 사용하는 방법을 말한다. 그러므로 전통적 접근방법을 일반적 접근방법(the general approach to inference)라고 불러도 별 무리는 없을 듯하다. 이러한 접근방법은 크게 두 가지의 상식적인 이론적 명제를 기반으로 하고 있다. 첫째는 전체사건(N)에서 임의의 사건 (N_i/N)이 일어나 상대도수(N_i/N)가 N을 무한히 증가시킬 경우 안정적이 되며 이때 이를 흔히 N_i가 발생할 확률이라고 얘기한다는 것이다. 두 번째 명제는 첫 번째 명제를 확장시킨 것으로써 어떤 모집단에 대한 표본의 수가 무한히 증가할수록 그 표본의 모수(parameter)에 추정치는 안정적으로 주어진다는 것이다. 이렇게 도수나 표본의 수가 무한히 증가할 경우 안정적인 상태를 가정하는 것이 전통적 접근방법이다. 우리가 불편성이나 최소분산을 중요시하는 것도 이러한 안정성과 관련하여 이해할 수 있다. 결국 전통적인 접근방법은 확률과 모수추정치의 안정성을 전제로 오직 객관적인 유일해만을 상정한다. 이는 단순한 통계적 계산과정의 반복이며 인간의 선택이나 주관이 존재하지 않는다.

이러한 전통적 접근방법에 비해 베이지안적 접근방법은 자주 접할 수 있는 방법은 아니었다. 또한 전통적인 통계학자들로부터 한때는 이단으로 취급받기도 하였다. 이 접근 방법도 역시 두 가지의 명제로 그 성격을 대변한다고 할 수 있다. 첫째는 확률을 어떤 사건이 일어나리라고 예상되는 각자의 주관적인 신념(subjective belief)이라고 정의하였다. 그러므로 하나의 사건에 대한 발생확률은 각자의 다 천차만별일 수밖에 없다. 둘째로 모수의 추정치는 모수에 대한 불확실성(uncertainty)에 입각하여 모수에 대한 각자의 모든 지식(knowledge)을 집약한 하나의 확률분포의 형태로 주어진다는 것이다. 결국 베이지안 접근방법은 확률과 모수가 각자 다른 주관적인 시각을 제시한다. 이는 단순히 통계적 계산만 하는 것이 아니라 각자의 선택과 주관이 개입된 것을 말한다.

3.1.2. 베이지안 방법

베이지안 분석 방법은 기존의 고전적인 분석 방법에 비해 유용한 사전정보의 사용을 가능하게 할 뿐 아니라 표본의 크기가 작을 때에 상대적으로 더 신뢰성 있는 분석을 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 베이지안 추론의 주된 목적은 관심 있는 모수의 사후밀도함수(posterior density)를 사전밀도함수(prior density function)와 우도함수(likelihood function)로부터 구하는 것이다. 이 추론 과정은 대부분의 경우에 복잡한 적분계산을 요구하고 있기 때문에 베이지안 분석 방법은 우도함수와 사전밀도함수가 공액관계(conjugacy)가 성립하는 몇몇 경우에 대해서만 국한적으로 사용되어 왔으며 실제 자료의 분석에는 많은 어려움이 있었다. 그러나 최근 들어 컴퓨터의 성능이 좋아짐으로써 사후밀도함수를 수치적으로 구할수 있는 몬테칼로 방법이 널리 사용됨에 따라 베이지안 분석 방법은 여러 분야에서 사용되어 지고 있는 추세이다.

몬테칼로 방법이란 사전에 모수(parameter)에 임의의 값을 설정하고 관측 안되는 변수(unobservable variables)의 값에 대해서는 일정한 밀도함수를 가정한 후 밀도함수로부터 관측값(random number)을 생성시킨 다음 이 값을 가지고 다시 거꾸로 모수를 추정하는 과정을 반복하여 모수에 대한 속성을 사후적으로 구하는 방법

이다. 특히 이러한 몬테칼로 방법을 통해 모수에 대한 단편적인 추론에서 보다 나아가 모수의 사후밀도함수에 대한 전체적인 분포를 추정하는 것이 가능하게 되었다.

3.1.2.1. 사전확률분포(prior probability distribution)

Bayes(1763)이래, 특히 Fisher(1992)이래 베이지안 추론의 장점에 대한 논쟁이 매우 활발하였다. 이러한 논쟁의 초점은 사전분포함수들의 선택의 임의성이었다. 그러나 오늘날 베이지안 방법들이 통계학의 이론, 응용분야 모두에서 폭발적으로 대중화되어 가고 있다. 이는 사전정보가 거의 없다하더라도 신뢰할 수 있는 추론을 유도할 수 있는 것은 비정보적 사전분포를 이용할 수 있기 때문이다. 따라서 지난 수년간 매우 많은 범위의 비정보적 사전분포가 제안되고 연구되어 왔다.

사후분포를 결정하기 위해서는 사전분포를 선택하는 문제가 남아있다. 사전분포는 크게 자료적 접근법과 비자료적 접근법으로 나눌 수 있다. 자료적 접근법 중에서 우도함수와 사전분포가 공액(conjugate)을 이루게 하는 방법이 주로 쓰이는데, 이는 결과적으로 사전분포와 사후분포가 똑같은 모수분포형태를 갖게 하려는 것이다. 이러한 사전분포는 잘 알려진 표준형의 분포형태인 경우가 많은데 근사값을 구하기 쉽고 계산이 편리한 장점이 있다.

과거 자료가 없는 경우에는 주로 정보가 없는 사전분포를 사용하게 되는데 이것을 비정보적 사전분포(non-informative prior)라 부른다.

① 비정보적 사전확률밀도함수(noninformative prior = vague)

사전확률함수를 구하는 방법 중에 하나로 모수에 관한 정보에 확신이 없을때 즉, 사전정보가 미흡할 때 비정보적 사저확률함수를 사용한다.

② 공액사전확률함수(conjuatet prior)

모수의 분포는 존재하지만 그 분포의 형태를 모를 때, 널리 알려져 있는 분포족(distribution family)들로 사전확률함수를 이용하게 된다. 이때 사전확률분포와 사후확률분포가 같은 분포족일 때, 그때의 사전확률함수를 공액사전확률함수라고 한다.

3.1.2.2. 사후확률분포

베이지안 추론의 근간은 사후분포 또는 사후밀도함수이다. 사후밀도함수는 우도함수는 우도함수와 사전밀도함수의 곱에 비례하는 함수로서 우도함수에 압축된 표본정보와 사전밀도함수에 압축된 사전정보를 베이즈 정리에 의하여 합선한 것이므로 베이지안 패러다임은 개념적으로 간단하고 직관적, 확률적 타당성을 지닌다고 앞에서 언급하였다. 그러나 베이지안의 실제 적용은 단순하지 않는 경우가 종종 발생하는데 이는 근간이 되는 사후밀도함수가 수리적으로 주어지지 않고 단지 그 함수형태만 알 수 있는 경우가 많기 때문이다. 따라서 사후밀도함수와 나아가서는 사후추론을 위한 베이지안 계산기법이 요구된다.

$x_1,...,x_n$이 분포 $f(x\ \theta)$ (f는 알려진 분포형태이다, $\theta = (\theta_1,...,\theta_p)$는 추론의 대상인 미지의 모수)에서 나온 관찰치(확률분포)일 때 θ에 대한 사전정보를 가지고 있으면 이를 관찰치와 함께 이용하여 θ를 추론하는 것이다.

다시 말하면 현재 자료인 $x_1,...,x_n$이 관찰되기 이전의 θ에 대한 과거경험 또는 믿음 등에서 나온 θ의 정보를 나타내는 분포를 사전분포 $g(\theta)$라 하면 $g(\theta)$와 표본정보 $x_1,...,x_n$을 합쳐서 θ를 추론하는 것이 베이지안 방법인데 이는 $g(\theta)$의 선택에 따라 추론결과가 달라지게 된다..사후확률분포는 현재 관측한 데이터로부터 얻은 새로운 표본정보와 사전정보에 의해 정해진다.

사후분포를 $g(x\ \theta)$라 할 때 이 분포는 앞의 사전지식과 표본들의 지식을 모두 종합한 분포라 할 수 있다. 그러므로 사후분포에 더 많은 신뢰가 주어짐은 말할 것도 없다. 이제 이 두 분포는 베이즈(Bayes) 정리를 이용하여 그 관계를 알아 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} h(\theta, x) &= f(x\ \theta) \cdot g(\theta) \\ &= g(\theta\ x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

여기서 함수 h는 확률변수 θ와 x의 결합함수(joint density function)이고 f와 g는 각각 개별변수의 확률분포(marginal distribution)와 조건부확률분포(conditional distribution)를 나타낸다. 식으로 나타내면

$$g(\theta\, x) = \frac{f(x\ \theta) \cdot g(\theta)}{f(x)}$$

와 같이 쓸 수 있다, 이때 $f(x)$를 하나의 상수로 간주하고 $f(x\ \theta)$를 우도함수(likelihood function)형태인 $l(\theta\ x)$로 쓴다면

$$g(\theta\ x) \propto l(\theta\ x) \cdot g(\theta)$$

의 형태가 된다. 결국 사후적 확률분포는 사전적 분포에 대한 정보와 표본으로부터 얻은 정보를 결합하여 얻어지는 것이다.

3.2. 베이지안 계산방법과 MCMC 알고리즘

사람의 요구가 점점 복잡해지고 커짐에 따라 그 욕

구는 충족시키기 위해서는 더 정교하고 복잡한 모형이 필요하게 된다. 통계학에서도 그러한 문제는 예외가 아닐 것이다. 이런 이유로 그에 부응하는 새로운 계산방법과 이론이 절실히 필요하게 되었다. 이러한 것 중의 대표적인 것으로 모의실험(simulation)을 들 수 있을 것이다. 특히 마코프 연쇄(Markov Chain)를 이용한 모의실험, 즉 MCMC (Markov Chain Monte Carlo)가 그것이다. 다차원 또는 고차원의 적분계산과 같은 문제에 직면하게 되었을 때 모의실험이 다른 수치적 계산법보다 효과적이라는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 이러한 모의실험을 하기 위해서는 고차원 확률분포에서 표본을 추출해야하고 이것은 언제나 쉬운 것만은 아니며 노력이 요구되는 작업이기도 하다.

베이지안 분석에서 사후분포에 대한 추론은 사후분포에서 표본을 추출하여 이를 요약하고 시각화시켜야 한다. 그러나 일반적으로 특정형태가 아닌 복잡한 사후분포에서 표본을 추출한다는 것은 과거에는 매우 어려웠다. 하지만 현재는 마코프 연쇄를 이용한 모의실험 즉 MCMC라고 하는 상호 종속적인 확률변수를 생성하는 방법을 이용하면 이러한 문제를 해결할 수 있다. MCMC는 다변량이면서 직접적으로 사후본포에서 표본생성이 불가능하거나 생성가능해도 시간과 경비가 허락하지 않을 경우의 임의의 분포에서 생성해서 그것을 사후분포의 표본으로 사용할 수 있는 방법이다.

MCMC방법 중에 대표적인 방법으로는 Gibbs 표본추출 방법과 Metropolis - Hastings 알고리즘이 있는데 이 방법들의 공통점은 반복적으로 확률변수를 생성하며 생성된 변수들은 상호독립이 아니라 상관관계가 있고 종속적이라는 점이다. 따라서 결과 분석에는 많은 세심한 주의를 기울일 필요가 있고 또한 얼마나 많은 표본을 생성해야 하며, 어떻게 빨리 충분한 정보를 갖는 표본을 생성해야 하는가의 문제가 대두되고 있다.

그 밖의 몬테칼로 적분계산의 기법으로는 1960년 초반에 나타난 몬테칼로 적분법이 Hit와 Miss기법과 표본평균기법(Sample-mean method)이다. 그러나 이 두 가지 방법은 수치해석적 기법에 비하여 추정효율이 떨어지는 문제가 있어서 각광을 받지 못하였다. 그러나 이후 분산축소기법(Variance reduction technique)이 등장하고 또 종래의 수치해석적 기법들이 쉽게 적용되기 어려운 다차원적분값의 산출 문제에 몬테칼로 기법의 유용함이 밝혀지면서 현재에는 여러가지 방법으로 즉, 주표본기법 (Imprtance sampling method), 깁스샘플링 기법(Gibbs-sampling-method),메트로폴리스 헤스팅스 알고리즘(Metropolis-Hastings)등 많은 새로운 기법이 제안되고 있다.

4. 실증분석

본 연구는 2004년 10월 19일부터 2010년 12월 30일까지의 주가종합지수 일별 종가 데이터 (1547일)를 대상으로 주가수익률 모형을 추정하였다. GARCH모형에 베이지안 접근을 하여 변동성을 구해본 후 변동성의 특성을 알아 보기로 한다. GARCH모형의 변동성의 특성을 알아 보기 위해 분석의 대상이 된 자료는 2004년 10월 19일부터 2010년 12월 30일까지의 1547개의 주가종합지수인 KOSPI 데이터를 사용하여 실증분석을 실시해보았다. 베이즈 추정을 하기 위해서는 먼저 관심 모수에 대한 우도함수와 사전분포 함수들을 정의해야 한다. GARCH모형의 우도함수는 다음과 같다.

$$l(y|\alpha,\beta) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

시점 t마다 조건부분산을 추정해야 하므로 위의 우도함수에서는 일정한 분산 σ^2 대신 σ_t^2이 사용되고 있다.

이제 모수 α, β에 대해 다음과 같은 사전분포를 가정한다.

$$P(\alpha,\beta) \propto N(\theta_\alpha,\phi_\alpha) \times N(\theta_\beta,\phi_\beta) \times I(\alpha,\beta)$$

여기서 $N(\theta, \phi)$는 평균이 θ이고, 분산이 ϕ인 정규확률밀도함수이고 θ_α, ϕ_α, θ_β, ϕ_β는 각 모수들의 사전평균과 사전분산을 나타낸다.

$I(\alpha, \beta)$는 모수들에 대한 제약조건을 만족하면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 지시함수인데, 여기서 제약조건은 일반적인 GARCH모형에 적용되는 다음 정상성 조건을 말한다.

$C1$: $\alpha_i > 0$ for $0 \le i \le p$
$C2$: $\beta_l > 0$ for $1 \le l \le q$
$C3$: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{l=1}^{q} \beta_l < 1$

앞서 제시한 데이터 생성과정을 따르는 시계열자료 $y = [y_1, \ldots, y_n]$들에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$l(y|\alpha,\beta) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

y가 주어졌을 때 모수 α, β에 대한 사후분포함수는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P(\alpha,\beta \mid y) \propto l(y|\alpha,\beta) P(\alpha,\beta)$$

베이지안 MCMC 추정을 위해서 베이지안 소프트웨어인 Winbugs를 사용하였다. Winbugs는 MCMC 추정 시 모수의 사후분포(posterior distribution) 추출과 관련된 알고리즘이 프로그램 내에서 자동적으로 선택되는 구조를 가지고 있다. 다만 알고리즘의 선택기준은 알 수 없는 “블랙박스”의 형태이다. 이는 MCMC 관련 컴퓨터 코딩을 다른 소프트웨어에 비해 월등히 쉽게 하는 장점이 있으나 이는 추정대상 모형에 따라 계산상의 효율성이 낮아져 추정시간이 길어지는 문제점이 발생하기도 한다.

최근에 Winbugs를 이용한 연구로는 박태양(2003)은 Winbugs를 이용하여 베이지안 회귀분석을 하였고, Mayer and Yu(2000)와 Yu(2005)는 Winbugs를 이용하여 로그 확률변동성 모형(log stochastic volatility model)을 추정하였고, Yun and Hong(2009)은 이를 참조하여 미국 S&P 500 주가수익률을 대상으로 제곱근 확률변동성 모형을 추정한 바 있다.

MCMC 추정시 10,000회의 MCMC 순환을 수행하였으며, 이중 초기 2,000회의 순환결과를 MCMC 체인(chain)의 수렴성 확보를 위해 폐기하였다.

Fig. 1, 2는 MCMC를 이용한 모의실험 결과의 값들을 나타낸 것으로 미지의 모수들에 대한 깁스샘플링을 하였을 때는 그 값들이 수렴하는지를 살펴볼 필요가 있다. 즉, 그래프를 통해 살펴본 후 안정적인 상태로 수렴하는 값들을 얻기 위하여, 수렴하는지를 살펴볼 필요가 있다. 모의실험에서는 그래프를 통해 살펴본 후 안정적인 상태로 수렴하는 값들을 얻기 위하여, 수렴하지 않는 초반의 값들은 제거하였다. 이 그림들은 표본들이 얼마나 잘 혼합(well-mixing)되어 추출되었는지를 보여준다. 만약 Fig. 1, 2에서 반복(interation)하는 동안 값이 변하지 않고 일정하게 유지되는 부분이 존재한다면 이 표본은 잘 혼합되어 추출되었다고 볼 수 없다. 따라서 위의 2가지 생성표본 추이에 대한 그림을 살펴보면 어느 반복지점에서 값이 변하지 않고 일정하게 유지되는 부분을 찾아볼 수 없으므로 생성된 α와β 값들이 잘 혼합되었다고 할 수 있다.

그리고 Fig. 1, 2는 모의실험으로 얻어진 α와β 값들이 수렴상태를 나타내주는 척도는 될 수 없지만 이 그림들은 보면 α와β 값들이 잘 혼합되어 추출되었으므로 수렴하는데 특별한 문제가 없다는 것을 알 수 있다.

$\alpha+\beta$의 합은 변동성이 얼마나 지속적인가 또는 현재의 변동성이 미래에 어떤 속도로 소멸되어 갈 것인가를 측정하는 계수로 활용되고 있다. $\alpha+\beta$의 값이 1에 가까울수록 현재의 변동성이 유사한 수준에서 장래에도 지속될 가능성이 높다는 것이다. 일반적으로 실증분석에서 β의 값이 α값보다 큰 경우가 많고 1에 가까운 경향을 보인다. 아래의 Fig. 3, 4에서 보면 $\alpha+\beta=$ 0.91로 거의 1에 가까운 경향을 보이고 있다. 따라서 금융시계열에 있어서 많은 경우가 조건부 이분산에 대한 충격효과가 사라지는데 소요되는 시간은 매우 긴 영향이 있다고 볼 수 있다.

이제 베이지안 MCMC방법으로 도출된 GARCH모형의 변동성의 성질을 알아본다. 2004년 10월 19일부터 2010년 12월 30일까지의 주가종합지수인 KOSPI의 시계열 그래프를 보면 아래와 같이 나타난다.

Fig. 5에서 주가종합지수는 분석기간 동안 2007년 말까지 전반적으로 상승세를 보이다가 2007년 이후 전

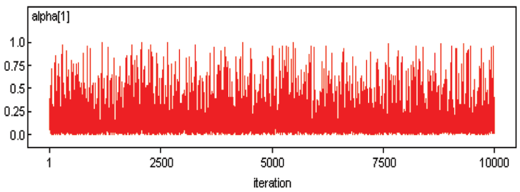

그림. 1. 알파의 추정.
Fig. 1. Trace of alpha.

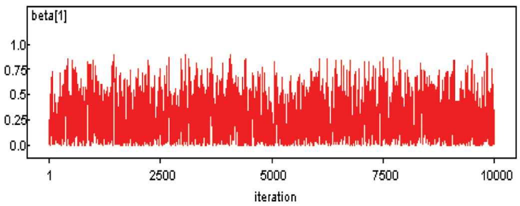

그림 2. 베타의 추정.
Fig. 2. Trace of beta.

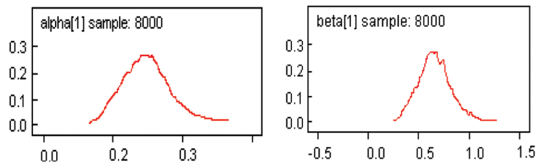

그림. 3. 알파와 베타의 커널밀도.
Fig. 3. kernal density of alpha & beta.

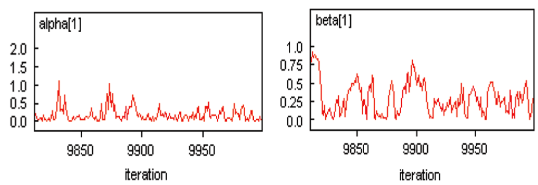

그림. 4. 알파와 베타의 변화과정.
Fig. 4. history of alpha & beta.

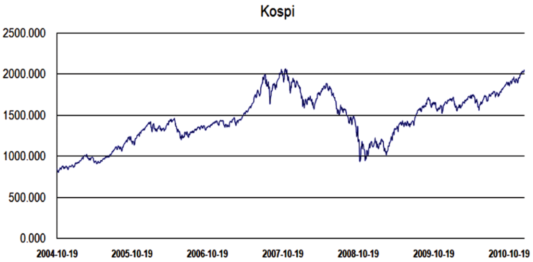

그림 5. 코스피 시계열 그래프.
Fig. 5. Time Series Graph of KOSPI Index.

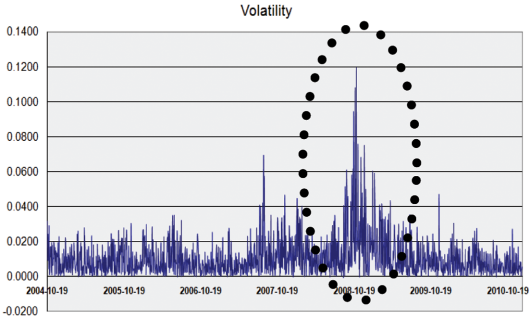

그림 6. 변동성 시계열 그래프.
Fig. 6. Time Series Graph of volatility.

반적으로 하락세를 보이고 있다.

Fig. 6에서보면 일일 수익률 자료의 변동성 추이를 살펴볼수가 있다. Fig. 6에서 타원형으로 표시되어 있는 부분에서 수익률의 등락이 연속적으로 일어나는 변동성 군집현상(volatility clustering)을 발견할 수 있다. 따라서 우리는 GARCH모형을 이용하여 베이지안 접근방법에 의해 변동성 군집현상을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

최근 경제가 급변하면서 자산의 위험관리에서 변동성의 중요성이 더욱 커지고 있다. 이러한 변동성은 분산을 지칭하며, 위험(Riks)을 측정하는 수단이 되고 있다. 본논문에서는 이분산성을 나타내는 GARCH모형을 이용하여 2004년 10월 19일부터 2010년 12월 30일까지의 주가종합지수 일별 종가 데이터 (1547일)를 대상으로 변동성을 베이지안 방법으로 접근하였다. 계산방법으로는 MCMC 추정을 위해서 쓰이는 베이지안 소프트웨어인 Winbugs를 이용하여 gibbs samlping 알고리즘을 이용하여 마코프 체인 몬테칼로(MCMC) 방법을 전개 하였다. 실증분석을 통해 수익률의 등락이 연속적으로 일어나는 변동성 군집현상을 발견할 수가 있었고. 뿐만 아니라 현재의 변동성이 유사한 수준에서 장래에도 지속될 가능성이 높다는 것을 알 수 있었다. 결과적으로 우리는 GARCH모형을 이용하여 우리나라 주가지수의 확률변동성에 대하여 베이지안 방법에 의해 변동성에 대한 군집현상을 확인할 수 있었다.

참고문헌

[1] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional Heteroskedasticity”, Journal of Econometrics, Vol. 31, p. 307, 1986.
[2] Bolstad, M. William, “Introduction to Bayesian Statistics(Second Edition)”, JohnWilley&Sons lnc., 2007.
[3] Chen, Ming-hui, Shao, Qi-Man, lbrahim, and Joseph George, “Monte Carlo Methods in Bayesian Computation”, 2000.
[4] Carlin and P. Bradley, “Bayesian Methods for Data Analysis”, CRC Pr LIc., 2007.
[5] R. F. Engle, “Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”, Econometrica, Vol. 55, p. 391,1982.
[6] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. b. Rubin, “Bayesian Data Analysis”, London : Chapman & Hall, 1995.
[7] J. Albert, “Bayesian Computation with R”, Springer, 2007.
[8] F. Kleibergen and H. K. van Dijk, “Non-stationarity in GARCH model : A Bayesian analisis”, Journal of Applied Econometrics, Vol. 8, p. S41, 1993.
[9] T. Nakatsuma, “A Markov-Chain Sampling Algorithm for GARCH models”, Studies in Nonlinear Dynamics Econometrics, Vol. 3 No. 2, p. 107, 1998.
[10] M. Lee and Peter, “Bayesian Statistics An Introduction”, Arnold Publication, 2004.
[12] 김달호, “R과 WinBUGS를 이용한 베이지안 통계학”, 자유아카데미, 2005.
[13] 김병훈, “옵션시장에서의 변동성 추정에 관한 비교분석연구”, 건국대학교, 2009.
[14] 박태양, “마케팅 조사의 Bayesian 접근에 관한 연구 : Winbugs를 사용한 베이지안 회귀분석”, 숭실대. 2003.
[15] 윤재호, “최적필터(optimal filter)를 이용한 우리나라 주가지수의 확률변동성 및 점프추출”, Working paper, 한국은행 금융경제연구원, 2009).
[16] 장원, “Bayesian UHF GARCH-M 모형을 이용한 변동성 및 European Option 가격분포 추정”, 고려대학교, 2009.