

각막지형도(topography) 각막곡률로부터 토릭 각막형상의 수식화

김 대 수

서울과학기술대학교 안경광학과
투고일(2011년 8월 31), 게재확정일(2011년 12월 17일)

목적: 수평축과 수직축 비가 다른 토릭각막의 형상을 수학적인 함수로 표현하여 각막곡률 분포의 분석과 콘택트 렌즈 착용에 필요한 눈물두께 계산에 적용한다. **방법:** 각막을 타원함수로 가정하고 함수로부터 유도된 곡률반경식과 각막 토포그래피 측정 곡률반경을 일치시켜 타원함수의 변수를 결정하였다. 계산은 작성한 엑셀프로그램을 사용하였다. **결과:** 중심이 각막 정점에 위치하지 않는 리본(나비)형 토포그래피 이미지를 가지는 직난시 각막의 수평, 수직 각 축에 대해 각막의 형상을 수치적으로 알 수 있는 타원함수를 구하였다. **결론:** 각막에 대해 고도의 수차 등이 요구되지 않는 응용, 예를 들면 콘택트렌즈 피팅, 난시교정 등에 각막 형상을 단순한 타원함수로 표현하는 것이 편리할 것으로 판단된다.

주제어: 토릭, 토포그래피, 곡률반경, 각막정점, 직난시, 타원, 장축, 단축

서 론

각막은 우리 몸에서 투명한 탄성체 조직으로서 단단하기는 플라스틱 정도(탄성율 $\sim 10^9$ Pa)된다¹⁾. 각막은 외부로부터 빛을 최대한으로 투과시키는 역할을 한다. 이를 위해서는 각막내 조직(예를 들면 실질)은 광학적으로 잘 배열되어 있다. 각막 역시 살아있는 조직이므로 산소/탄산가스의 신진대사가 필요하고 투명성을 유지하기 위해서는 각막 내 수분이 일정하게 유지되어야 한다. 각막은 혈관이 존재하지 않기 때문에 대기로부터 확산이라는 프로세스를 통해서 주로 산소를 공급받는다. 대기 중 산소는 직접 각막으로 흡수되지 않고 각막을 적시고 있는 눈물에 용해된 후 농도차에 의해 각막으로 흡수된다. 이 때 각막을 적시고 있는 눈물은 그 두께가 두꺼울수록 산소의 확산을 감소시킨다. 하지만 질환이 없는 정상인은 각막을 적시는 눈물의 두께가 약 5 μm 정도로 대단히 얇기 때문에 눈물이 산소흐름에 전혀 방해되지 않는다. 그러나 콘택트렌즈를 착용하게 되면 렌즈와 각막 사이에 눈물이 또 하나의 층을 이루게 된다²⁾. 경우에 따라 이 갭힌 눈물층이 나안에 비해 수십 배로 두터워지면 각막으로 유입되는 산소는 억제되어 산소 부족까지 이어질 수 있다. 콘택트렌즈는 구면 또는 비구면 함수로 주어지기 때문에 각막의 형상을 함수로 나타낼 수 있다면 렌즈 착용에 따른 눈물층의 프로필

(두께 분포)을 계산할 수 있을 것이다.

시력 교정을 위해서는 각막의 굴절력을 측정할 필요가 있다. 일반적으로 각막은 타원체로 묘사하는데 이 경우 굴절력은 두 개의 경선(90° 축, 180° 축)의 굴절력으로 나타난다. 이 렌즈가 각막에 피팅될 때 주변부를 포함한 각막전체의 형상을 수학적으로 나타낼 수 있다면 눈물 두께의 계산이 가능할 것이다. 이 경우 최대 눈물두께만이 문제된다. 왜냐하면 눈물두께가 얇을수록 산소이동은 증가하기 때문이다. 앞서 해설에서는³⁾ 수직 및 수평경선의 곡률이 동일한(대칭적) 타원체 각막에 대하여 피팅 형태(*tight, flat*)별로 산소 부족이 없는 조건에서 요구되는 렌즈의 D_k 값을 구하거나 또는 D_k 값이 주어졌을 때 최적의 렌즈 BC, 두께, 직경 등을 구할 수 있는 이론 및 방법을 엑셀 프로그램을 사용하여 소개하였다. 콘택트렌즈를 착용하는 경우 렌즈 재료의 산소확산계수 및 두께를 고려하여 이 두 축에서 눈물 두께의 최대값이 산소 결핍이 발생하지 않는 임계값 이하이어야 할 것이다.

최근 각막 토포그래피는 각막 전체의 토릭 굴절력을 곡률 또는 디오퍼터로 측정된 후 그 결과를 곡률이 동일한 부분을 등고선 형태로 연결하여 굴절력분포를 색변화로 읽을 수 있다. 이 토포그래피 결과로부터 각막의 형상을 대략 그릴 수 있지만 렌즈 피팅에 필요한 각막 형상은 얻을 수 없다. 본 해설에서는 각막을 축(90° , 180°)별로 두 개의

타원함수로 전제하고 이 함수로부터 역으로 곡률반경을 구하는 식을 유도한 다음 토포그래피 측정 결과와 일치시켜 각막 함수에 필요한 상수를 결정 할 수 있었다. 일반적으로 정상적인 토릭 각막은 정점부분의 곡률반경이 최저이고 주변부로 갈수록 증가하는 형태이지만 40안에 대한 토포그래피 측정 결과 90% 이상 대부분의 토릭 각막은 각막 정점의 곡률반경이 주위보다 작은 리본(나비)형태를 보이고 있다. 이것은 중심 부분이 정상 토릭각막의 정점부분에 비해 상대적으로 평평한 것을 의미한다. 따라서 수학적으로 중심 부분과 중심 부분을 제외한 나머지 부분을 분리하여 각 2개의 함수(총 4개)를 구하였다.

이 론

1. 토릭 각막 형상의 수식(함수)화

1) 각막 정점에 대한 대칭형 토포그래피 측정 곡률반경으로부터 토릭 각막형상 함수 유도

토릭 각막의 수직경선(90°축) 및 수평경선(180°축)이 이루는 곡선을 개략적으로 Fig. 1에 나타내었다. y축은 각막에서 세운 수직축, x는 각막정점에서 수직으로 각막을 뚫고 들어가는 축, z축은 각막 정점에서 가로놓인 수평축을 가리킨다. Ay, By, Az, Bz 는 각축에 대해 타원의 중심에 대한 장축과 단축의 길이로 정의할 때 각막의 수직 및 수평 경선은 각막 정점을 원점으로 하는 타원식 (1) 및 (2)로 표현 할 수 있다.

$$\frac{(x-A_y)^2}{A_y^2} + \frac{y^2}{B_y^2} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{(x-A_z)^2}{A_z^2} + \frac{z^2}{B_z^2} = 1 \tag{2}$$

각 축에 대한 단축/장축의 비를 $p_y(=B_y/A_y)$, $p_z(=B_z/A_z)$ 로

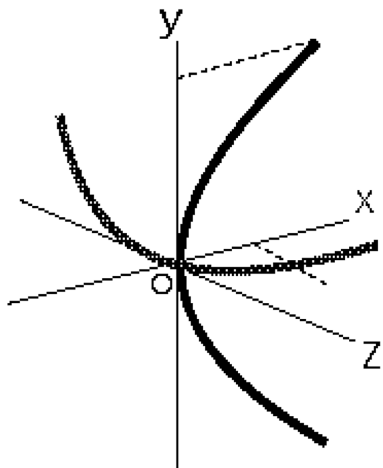


Fig. 1. 3-D repre sentation of cor neal axes.

두고 (1), (2)를 y, z의 함수로 표현하면 식 (3), (4)과 같아진다.

$$y = p_y \sqrt{A_y^2 - (x - A_y)^2} = p_y \sqrt{2A_y x - x^2} \tag{3}$$

$$z = p_z \sqrt{A_z^2 - (x - A_z)^2} = p_z \sqrt{2A_z x - x^2} \tag{4}$$

각막 함수 y(x) 및 z(x)가 나타내는 곡선상의 임의의 점에서 곡률반경 r은 식 (5), (6)로부터 구할 수 있다^[4].

$$r_y = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{5}$$

$$r_z = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx^2}} \tag{5}$$

각막의 수직 및 수평 경선을 나타내는 식 (3), (4)를 식 (5), (6)에 대입한 후 정리하면 각 축에 대한 곡률반경이 식 (7), (8)로 간략화 된다.

$$r_y = \frac{[A_y^2 + (p_y^2 - 1)(x - A_y)^2]^{3/2}}{p_y A_y^2} = \frac{(p_y^4 A_y^2 - y^2 p_y^2 + y^2)^{3/2}}{p_y^4 A_y^2} \tag{7}$$

$$r_z = \frac{[A_z^2 + (p_z^2 - 1)(x - A_z)^2]^{3/2}}{p_z A_z^2} = \frac{(p_z^4 A_z^2 - z^2 p_z^2 + z^2)^{3/2}}{p_z^4 A_z^2} \tag{8}$$

각막 정점 O(좌표 y=0, z=0)에서 각막 곡률반경을 토포그래피 측정결과로부터 R_{oy} , R_{oz} 라 두고 식 (7), (8)에 y=0, z=0를 대입하고 정리하면 A_y , A_z 는 식 (9), (10)과 같이 p_y , p_z 의 함수로 구해진다.

$$A_y = R_{oy} / p_y^2 \tag{9}$$

$$A_z = R_{oz} / p_z^2 \tag{10}$$

식 (9), (10)을 식 (7), (8)에 대입한 후 정리하면 각 축상 임의의 위치에서 곡률반경을 구할 수 있는 식이 식 (11), (12)과 같이 얻어진다.

$$r_y = \frac{(R_{oy}^2 + y^2 - y^2 p_y^2)^{3/2}}{R_{oy}^2} \tag{11}$$

$$r_z = \frac{(R_{oz}^2 + z^2 - z^2 p_z^2)^{3/2}}{R_{oz}^2} \tag{12}$$

각막 정점이 아닌 각 축상 임의의 좌표 Y, Z에서 측정한 곡률반경을 각각 R_y , R_z 라 두고 이 값들을 식 (11), (12)에 대입하면 p_y , p_z 는 계산 가능한 식 (13), (14)로 유도된다.

$$p_y = \frac{\sqrt{R_{oy}^2 + Y^2 - (R_y R_{oy})^{1/3}}}{Y} \tag{13}$$

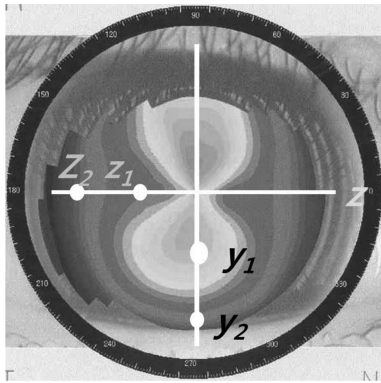


Fig. 2. Typical pattern of toric cornea.

$$p_z = \frac{\sqrt{R_{oz}^2 + z^2 - (R_z^2 R_{oz}^4)^{1/3}}}{Z} \quad (14)$$

토릭 각막을 나타내는 함수 (3), (4)에 필요한 상수는 측정결과를 식 (9), (10), (13), (14)에 적용하면 구해진다.

2. 각막 곡률반경의 최소값이 각막 정점에 위치하지 않는 리본(나비)형 토포그래피 결과부터 토릭 각막형상 함수 유도

Fig. 2는 직난시 안의 대표적인 토포그래피 도형을 나타내고 있다. 앞서 언급한 바와 같이 각막정점(중심) 곡률반경이 존재하지 않기 때문에 각막 전체를 하나의 곡선으로 설명하기 보다는 Fig. 3에서와 같이 중심영역(0~Yc)과 바깥영역(y > Yc)으로 나누어 두 개의 곡선으로 설명하는 것이 오차가 적을 것이다.

1) 각막 정점 바깥 영역의 각막함수 유도

각막 함수 (3), (4)의 미지수의 값을 부여하기 위해 Fig. 3에서와 같이 각막 바깥 부분의 2점 Y1, Y2에서 측정한 곡률반경 R_{y1}, R_{y2}을 식 (7), (8)에 적용하여 식 (15), (16)을 구한다.

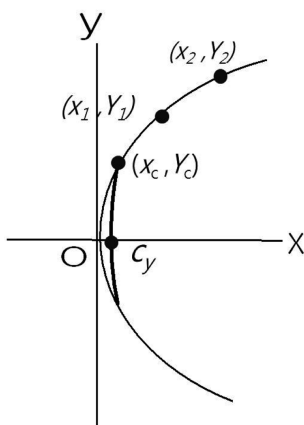


Fig. 3. Configuration of corneal shape.

$$R_{y1} = \frac{[A_y^2 + (p_y^2 - 1)(A_y^2 - Y_1^2/p_y^2)]^{3/2}}{p_y A_y^2} \quad (15)$$

$$R_{y2} = \frac{[A_y^2 + (p_y^2 - 1)(A_y^2 - Y_2^2/p_y^2)]^{3/2}}{p_y A_y^2} \quad (16)$$

식 (15)를 정리하면 식 (15-1)이 얻어진다.

$$(p_y^2 - Y_1^2 + Y_1^2/p_y^2)^3 = p_y^2 R_{y1}^2 A_y^4 \quad (15-1)$$

K_y = (R_{y1}/R_{y2})^{2/3}로 두고 식 (15), (16)을 연립하여 풀면 식 (17)이 얻어진다.

$$A_y^2 = \frac{(Y_1^2 - K_y Y_2^2)(1 - 1/p_y^2)}{p_y^2(1 - K_y)} \quad (17)$$

z축에 대해서도 마찬가지로 (x₁, Z₁), (x₂, Z₂)에서 측정 곡률반경을 R_{z1}, R_{z2} 및 K_z = (R_{z1}/R_{z2})^{2/3}로 두고 전개하면 식 (18)이 구해진다.

$$A_z^2 = \frac{(Z_1^2 - K_z Z_2^2)(1 - 1/p_z^2)}{p_z^2(1 - K_z)} \quad (18)$$

K_{y1} = (Y₁² - K_y Y₂²)/(1 - K)로 두고 식 (15-1), (17)을 연립하여 풀면 식 (19)이 얻어진다.

$$(1 - 1/p_z^2)^3 (K_{y1} - Y_1^2)^3 = R_{y1}^2 K_{y1}^2 (p_y^2 - 1)^2 / p_y^6 \quad (19)$$

K_{y2} = (K_{y1} - Y₁²)³ / (R_{y1}² K_{y1}²)로 두고 식 (19)를 정리하면 각막 함수에 필요한 상수 p, A 값이 결정된다(식 (21)-(22)).

$$p_y = \sqrt{1 + 1/K_{y2}} \quad (21)$$

$$A_y = \frac{\sqrt{K_{y1}/K_{y2}}}{1 + 1/K_{y2}} \quad (22)$$

z축에 대해서도 앞에서와 마찬가지로 K_{z1} = (Z₁² - K_z Z₂²)/(1 - K_z), K_{z2} = (K_{z1} - Z₁²)³ / (R_{z1}² K_{z1}²)로 두고 전개하면 식 (23)이 얻어지고 이로부터 함수 정의에 필요한 변수 A, p 값이 식 (24), (25)로 구해진다.

$$(1 - 1/p_z^2)^3 (K_{z1} - Z_1^2)^3 = R_{z1}^2 K_{z1}^2 (p_z^2 - 1)^2 / p_z^6 \quad (23)$$

$$p_z = \sqrt{1 + 1/K_{z2}} \quad (24)$$

$$A_z = \frac{\sqrt{K_{z1}/K_{z2}}}{1 + 1/K_{z2}} \quad (25)$$

2) 각막 정점 부근의 각막함수 유도

Fig. 1에서 보듯이 각막 정점 부근의 형상은 x축으로 c_y만큼 이동된 타원으로 간주할 수 있기 때문에 식 (26)로 표현할 수 있다.

$$y = p_y \sqrt{2A_y'(x - c_y) - (x - c_y)^2} \quad (26)$$

마찬가지로 180°축(z축)에서 정점 부근 각막형상도 마찬가지로 정의하면 식 (27)로 표현할 수 있다.

$$z = p'_z \sqrt{2A'_z(x-c_z) - (x-c_z)^2} \quad (27)$$

그러나 Fig. 3에서 알 수 있듯이 대부분 직난시에서 z축 중심영역은 y축에 비해 대단히 좁기 때문에 2-1에서 유도한 함수를 그대로 적용해도 무리가 없을 것으로 생각된다. Fig. 2의 좌표 (x_c, Y_c)는 두 영역의 각막식을 동시에 통과하기 때문에 이 값을 식 (26) 및 (3)에 대입하여 정리하면 식 (27)이 구해진다.

$$c_y = A_y - \sqrt{A_y^2 - Y_c^2/p_y^2} - A'_y + \sqrt{A'^2_y - Y_c^2/p'^2_y} \quad (28)$$

p'_y는 (x_c, Y_c)에서 측정된 곡률반경을 R_c, 새로운 각막정점 c_y에서 측정된 곡률반경을 R'_{oy}로 정의하고 식 (13)에 대입하면 식 (29), (30)로 구해진다.

$$p'_y = \frac{\sqrt{R'^2_{oy} + Y_c^2 - (R_c^2 R'^4_{oy})^{1/3}}}{Y} \quad (29)$$

$$A'_y = R'_{oy}/p'^2_y \quad (30)$$

결과 및 고찰

직난시 리본(나비)형 토포그래피 측정 결과로부터 각막 함수를 구하기로 한다. 수치해를 구하기 위하여 엑셀 계산 프로그램을 Table 1과 같이 작성한다. 토포그래피 데이터는 중심(y=0)에서 곡률반경 7.6 mm이다.

수직(y)축상 2점 y=2, y=4.5 mm에서 각각 곡률반경 7.5, 7.7 mm, 수평(z)축상 2점 z=2, z=4.5 mm에서 각각 곡률반경 7.7, 8.6 mm를 Table 1에 입력하여 프로그램을 실행시

Table 2. Execution of Table 1 program

	A	B	C	D	E	F	G
1	Topography 측정 데이터(위치, 곡률)를 □에 입력할 것!!						
2	y=	0	mm	곡률=	7.6	mm	
3	y1=	2	mm	곡률=	7.5	mm	
4	y2=	4.5	mm	곡률=	7.7	mm	
5	z1=	2	mm	곡률=	7.7	mm	
6	z2=	4.5	mm	곡률=	8.6	mm	
7		Ky=	0.983		Kz=	0.929	
8		K1y=	-914.1		K1z=	-208.5	
9		K2y=	-16.46		K2z=	-3.72	
10		p _y =	0.969		p _z =	0.855	바깥부분
11		A _y =	7.933	mm	A _z =	10.23	
12		p' _y =	1.06		A' _y =	6.74	중심부분
		c _y =	0.005	mm			

키면 Table 2와 같은 결과가 구해진다.

Table 2의 결과로부터 각막형상은 식 (31~33)로 정리할 수 있다.

수직(90°)축 중심부 [0 < y < y₁(=2.5 mm)]

$$y = 1.06 \sqrt{2 \times 6.74(x - 0.005) - (x - 0.005)^2} \quad (31)$$

주변부 [y₁(2.5 mm) < y < y₂(=4.5 mm)]

$$y = 0.969 \sqrt{2 \times 1.933x - x^2} \quad (32)$$

Table 1. Excel program for the calculation of parameters of corneal function

	A	B	C	D	E	F	G
1	Topography 측정 데이터(위치, 곡률)를 □에 입력할 것!!						
2	y=	0	mm	곡률=		mm	
3	y1=		mm	곡률=		mm	
4	y2=		mm	곡률=		mm	
5	z1=		mm	곡률=		mm	
6	z2=		mm	곡률=		mm	
7		Ky=	=(E3/E4)^(2/3)		Kz=	=(E5/E6)^(2/3)	
8		K1y=	=(B3*B3-C7*B4*B4)/(1-C7)		K1z=	=(B5*B5-F7*B6*B6)/(1-F7)	
9		K2y=	=(C8-B3*B3)^3/(E3*E3*C8*C8)		K2z=	=(F8-B5*B5)^3/(E5*E5*F8*F8)	
10		p _y =	=SQRT(1+1/C10)		p _z =	=SQRT(1+1/F9)	바깥부분
11		A _y =	=SQRT(C8/C9)/(1+1/C9)		A _z =	=SQRT(F8/F9)/(1+1/F9)	
12		p' _y =	=SQRT(E2*E2+B3*B3-(E3*E3*E2^4)^(1/3))/B3		A' _y =	=E2/C12/C12	중심부분
13		c _y =	=C11-SQRT(C11*C11-B3*B3/B10/B10)-F12+SQRT(F12*F12-B3*B3/C12/C12)				

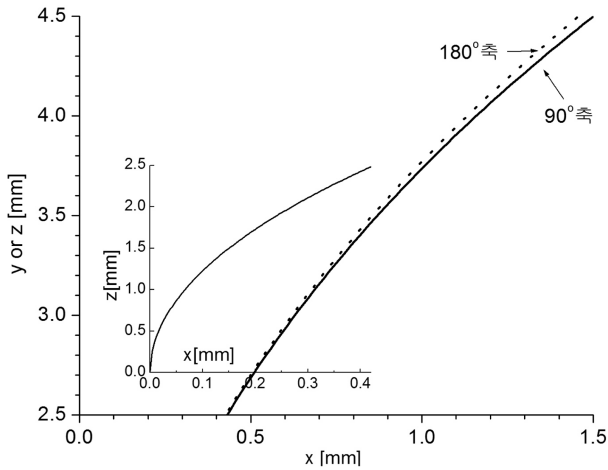


Fig. 4. Graphical profiles of corneal axes.

수평(180°)축 전체

$$z = 0.855\sqrt{2 \times 10.23x - x^2} \tag{33}$$

식 (31)-(33)를 Fig. 4에 그래프로 나타내었다. 그림에서 중심부는 주변부에 비해 곡률변화가 완만한 것을 알 수 있다. 본 해설에 적용한 각막의 단축/장축비(p=B/A)는 Table 2로부터 z축 쪽이 y축에 비해 약 12%정도 작다. 이에 비해 각막가장자리 x=1.45 mm에서 z/y비는 Fig. 4에서 1.013으로 180°축이 90°축보다 약 1.3% 정도밖에 길지 않은 것을 알 수 있다. 이로부터 p 값이 작아질수록 각막

은 주변부로 갈수록 더 완만해지는 것을 알 수 있다. 그러나 p값 변화에 따른 곡률변화는 실제 각막에서 미미한 것을 알 수 있다. 따라서 토릭 각막에 후면이 토릭이 아닌 타원면으로 이루어진 콘택트렌즈를 피팅하여도 콘택트렌즈 움직임이나 산소확산을 위한 눈물두께 유지에 어려움이 없을 것으로 판단된다.

결론

각막에 대해 고도의 수차 등 정밀도가 요구되지 않는 응용, 예를 들면 콘택트렌즈 피팅, 난시교정 등에는 각막 형상을 타원으로 표현하는 것만으로 충분한 효과가 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- [1] Hamilton K. E. and Pye D. C., "Young's modulus in normal corneas and the effect on applanation tonometry", *Optom. Vis. Sci.*, 85(6):445-50(2008).
- [2] 김대수, "콘택트렌즈 운동의 기초", *한국안광학회지*, 13(1):5-13(2008).
- [3] 김대수, "엑셀 프로그램을 이용한 콘택트렌즈의 Dk 결정", *한국안광학회지*, 16(1):11-20(2011).
- [4] Kreyszig E., "Advanced Engineering Mathematics", 4th ed., John Wiley & Sons, pp.380(1979).

<Review Article>

Mathematical Expression of the Toric Cornea using Corneal Topography Measurements

Dae Soo Kim

Department of Optometry, Seoul National University of Science and Technology
(Received August 31, 2011; Accepted December 17, 2011)

Purpose: To represent the shape of toric cornea in the elliptical function for the determination of curvature distribution and lacrimal thickness between cornea and contact lens when the lens is fitted. **Methods:** Topography measurements of corneal curvature and curvature equation derived from the assumed elliptical function were evaluated using the Excel program which included the necessary equation derived. **Results:** Mathematical expressions for the cornea whose ribbon shaped-topography image, in which the center does not coincide with the corneal apex, can be determined. **Conclusions:** For the application where the higher accuracy on the cornea is not required, such as higher order aberration, the cornea can be expressed in the simple elliptical function.

Key words: Toric, Topography, Radius of curvature, Corneal apex, Ellipse, Long axis, Short axis