

## 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 영재 학급용 수학 수업 소재 발굴과 활용<sup>1)</sup>

구 본 왕\* · 송 상 현\*\*

본 연구는 폴리오미노에 What if (not)?이라는 기법을 적용하여 영재학급용 수학 수업 소재를 발굴하고 이를 수업에 활용한 사례 분석을 통해 수학영재교육의 시사점을 도출하고자 한다. 이를 위해 학생들이 흔히 접할 수 있는 블로커스라는 게임을 사용하여 폴리오미노의 특징을 이해하도록 구성하였고, 한중일 동양 3국의 전통적인 두뇌스포츠인 오목이라는 게임을 접목한 탐구 활동을 개발하였다. 블로커스 오목이라는 새로운 소재에 Pick의 정리를 적용하면서, 블로커스 오목 활동을 하는 동안 창의적인 학습이 되도록 구성하였다. 본 연구는 수학 수업 소재를 발굴 및 활용하여 학생들에게서 나타나는 각 소재별 특징과 결과를 바탕으로 최종적인 수업 소재를 제안하였다. 이를 통해 초등학교 수학영재 학생과 교사들을 위한 5가지 시사점을 얻을 수 있었다.

### 1. 서론

지난 10년 동안 우리나라의 영재교육은 중흥기를 맞아 활발히 진행되면서 교육대상자의 수도 늘어나고 있다. 이에 따라 수학영재교육용 교수학습 자료의 다변화가 요구되고 있다. 특히 영재교육에서 학습자들은 훌륭한 문제해결자(good problem solver)라는 지식의 소비자 역할을 넘어 문제제기자(problem poser)라는 보다 능동적이고 생산적인 역할을 요구받고 있다. 이를 위해 영재들을 위한 교수학습 자료는 문제제기의 기회를 제공하는 것이어야 한다.

문제제기의 한 가지 전략 및 기법으로 Brown & Walter(1983)는 수용과 도전의 단계로 구분하여 다루고 있는데, 문제제기의 두 번째 단계에서 'What-If-Not' 전략으로 문제의 속성 하나 하나에 '만약 ~이 아니라면...'이라는 속성부정의

의미를 첨가하고 있다. 그 단계는 5가지의 세부적인 수준으로 구분된다.

학생들에게 'What-If-Not' 전략을 이용하도록 하려면 교사가 학습 소재를 개발할 때도 이런 전략을 먼저 사용해 보아야 한다. 폴리오미노와 Pick의 정리를 방법적인 면, 내용적인 면, 교구적인 면에 속성을 굳이 부정할 뿐만 아니라 새로운 속성도 추가해 볼 수 있다. 따라서 그래서 본 연구에서는 'What-If-Not'이라는 원래의 표현을 What if (not)?으로 쓰기로 한다. 교사가 What if (not)? 전략을 이용하여 개발한 수업 소재를 바탕으로 학생들이 그 자료를 활용하면 학생들도 What if (not)? 전략을 적용하여 수학적으로 사고하며, 이를 적용 발전할 수 있다.

이에 본 연구는 폴리오미노라는 수업 소재에 What if (not)?이라는 전략을 적용하여 영재학급용 수학 수업 소재를 개발하고 그것을 영재학급에 활용할 수 있는 좋은 아이디어가 있음에

\* 서암초등학교(bondking@hanmail.net, 제1저자)  
\*\* 경인교대/아주대(song2343@hanmail.net, 교신저자)  
1) 이 글은 구본왕(2011)의 석사학위논문을 요약/수정한 것임.

도 불구하고 그간 영재학생들을 지도하는 과정에서 개발된 폴리오미노를 활용한 수학영재교육용 프로그램들이 상세한 안내나 활용 방법 면에서 미흡하다고 판단하여 이를 활용한 수학 수업 소재를 발굴하고 그것의 올바른 교육적 활용 방법을 모색해 보고자 한다.

## II. 폴리오미노

1953년 Solomon Golomb이 하버드 대학 수학 클럽의 한 강연에서 최초로 ‘polyominoes’라는 이름을 붙이고 이에 대한 연구를 하였다. 폴리오미노는 합동인 정삼각형을 변끼리 붙여서 만든 여러 가지 모양 조각들을 통칭하는 데 개수에 따라 모노미노(monomino), 도미노(domino), 트로미노(tromino), 테트로미노(tetromino), 펜토미노(pentomino), 헥소미노(hexomino), 헵토미노(heptomino) 등으로 부르고 있다. 이러한 폴리오미노를 활용하는 방법으로는 ① 폴리오미노와 체스판 - 체스판에 색칠을 하여 증명을 하는

<표 II-1> What if (not)?을 적용한 폴리오미노 정리표

모양	What if (not)?	변형
Polyominoes ↓정삼각형이라면?	→ 절반으로 잘라내면?	polyares
	→ 이웃하는 칸을 구분하여 색깔을 입히면?	chequered Polyforms
	→ 모서리부분에 붙인다면?	polyplet
	→ 사각형의 각이 달라진다면?	polykite
polyiamonds ↓입체라면?	→ 정삼각형이 아니라면?	polypon (30-30-120)
	→ 삼각형을 여러 개 붙여서 사용하면? → 뒀음이 있다면?	polyhexes, polyhes
	→ 꼭 도형으로만 해야할까? (선으로 표현한다면?)	polyedge
polycubes	→ 큐브를 이용하여 가장 단순한 정육면체를 만들려면?	somacube
	→ 또 다른 조각을 사용한다면?	변형된 소마큐브

문제 ② 패턴과 폴리오미노 - 조작하는 활동을 통하여 패턴을 익히기, ③ 퀴즈형식의 문제 ④ 교과서 탐구활동 등으로 활용 할 수 있다. Polyform에 따른 종류 및 특징과 사용하는 개수, 대칭의 유무에 따라 만들어 진다. 각각의 Polyform에 What if (not)? 전략을 적용하여 정리하면 <표 II-1>과 같다.

Picciotto(1999)는 폴리오미노 활용의 특징에 대해 대칭, 타일 붙이기(tiling), 둘레의 길이와 넓이와 관련이 있으며, 학생들의 시각적인 감각과 수학적인 습관, 특별히 체계적인 조사, 분류, 확신하는 주장에 대한 구성을 할 수 있는 특징이 있다고 하였다.

## III. 연구 방법 및 절차

### 1. 수업 소재 개발 준거와 절차

본 연구는 폴리오미노에 What if (not)?을 적용하여 수업 소재 발굴과 그 활용방안에 목적을 가지고 있으므로 김지영(2002, 46-47), 이종욱(2000, 36-37), 김양권(2009)의 연구에서 제시한 자료 개발의 준거 중 본 연구의 학습목표를 기초로 개발된 준거 가운데 본 학습 활동과 관계가 적은 준거는 삭제하여 아래와 같은 준거를 바탕으로 수업 소재 발굴 및 개발을 하였다.

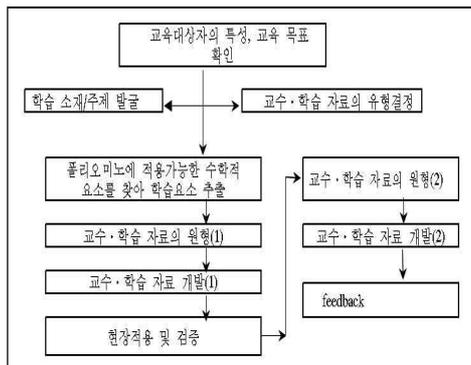
첫째, 교수·학습 자료는 주제에 대한 수학적으로 의미있는 탐구활동을 포함하고 있는가?

둘째, 학습 자료는 새롭고, 유연하며, 상호작용이 강조되는 문제 상황을 포함하고 있는가?

셋째, 수학 영재들의 창조적 생산능력을 극대화 할 수 있는 다양한 수업 방법이 활용되도록 하며, 수학 영재들에게 적합한 수학적인 생각과 태도를 형성시킬 수 있는 교수방법을 제시하고 있는가?

넷째, 교사가 학생들로 하여금 실제적인 주제 학습 과정에서 자기 주도적인 탐구를 수행할 수 있도록 자세히 안내할 뿐만 아니라 후속적인 탐구 활동을 유발하여 관련되는 학습 주제로 안내하는 방법에 도움을 줄 수 있도록 가능한 자세히 기술하고 있는가?

본 연구에서는 폴리오미노 교수·자료를 개발하기 위하여 최중현(2004)의 모형과 유미애(2002)의 활동을 바탕으로 What if (not)? 전략과 레크리에이션 요소를 적용하여 개발하였다. 프로그램의 효과와 학생들의 수학적 사고의 변화를 알아보기 위하여 학생들의 학습지, 면담을 통하여 분석하였다. 본 연구에서 폴리오미노를 이용한 수업소재 개발을 위하여 사용한 절차의 모형은 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] 폴리오미노를 활용한 수업소재 개발 절차 모형

## 2. 수업 교구와 활동 내용 분석

근래 보드게임이 유행하면서 많은 학생들에게 수학 교구는 흥미를 불러일으키는 소재이다. 그 중 블로커스라는 보드게임은 학생들이 쉽게 접할 수 있는 2~4인용 게임이다. 블로커스는 테트로미노로 만든 테트리스라는 게임을 확장하여 5개 이하의 정사각형을 이어 붙여 만

들 수 있는 모든 조각을 활용한 게임으로 도형의 밀기, 돌리기, 뒤집기를 활용한 공간감각과 직사각형의 둘레와 넓이, 비율 등을 반영한 수학적 요소가 있음에도 불구하고 주로 흥미 위주의 게임으로 활용되고 있다. 블로커스 Trigon, 3D 블로커스 등도 있어 삼각형, 입체라는 모양을 활용하여 학생들이 보다 창의적인 생각을 할 수 있도록 도움을 준다.

폴리오미노의 특징 중 하나는 폴리오미노가 만들어진 모양에 따라 만들어진 점(내부점)에 따라 도형의 둘레와 넓이를 구할 수도 있다. Pick의 정리는 흔히 칠교판(탱그램)이나 기하판(지오보드)에서 유용하게 사용되고 있다. 예를 들면, 정동권(2001)은 기하판 사용에 따른 활용의 의에서 기하판에 넓이가 5인 폴리오미노 조각을 찾는 활동을 하면서 이를 통해 'What if (not)?' 전략에 따른 새로운 문제 활동도 가능하다고 하면서 사각형이라는 조건에서 삼각형으로 변형하여 문제를 만들어 활용하였다. 또한 기하판에 만들어진 내부에 포함되는 점의 수, 경계에 놓이는 점의 수를 변화함으로써 Pick의 정리를 활용하였다.

본 연구는 폴리오미노에 Pick의 정리를 적용하고 내부점을 한 눈에 알아 볼 수 있도록 오목 게임을 접목하면 학생들은 레크리에이션 활동을 통해 Pick의 정리에 필요한 내부점(오목점)을 찾고, 폴리오미노의 둘레와 넓이를 쉽게 확인할 수 있다는 것을 확인하면서 시작되었다. 본 연구에서 사용될 수업 교구는 블로커스, 오목이며 수학적 이론은 Pick의 정리이다. 각각의 특성을 자세히 살펴보면 다음과 같다.

### 가. 수업 교구의 특성

#### 1) 블로커스

블로커스는 21종 타일 조각(모노미노(1조각), 도미노(1조각), 트로미노(2조각), 테트로미노(5조

각), 펜토미노(12조각))이 4가지 색으로 총 84조각의 타일과 보드 게임판으로 구성되어 있다. 블로커스의 게임판은 3종(정사각형으로 구성된 일반적인 블로커스, 정삼각형 조각으로 된 블로커스 trigon, 정육면체로 구성된 3D 블로커스)이 있다.



[그림 III-2] 블로커스(3종)

## 2) 오목

오목은 두 사람이 흑백의 바둑돌을 이용하여 바둑판의 교차점에 자신의 돌을 차례로 놓아가며 자신의 돌 5개를 가로, 세로, 대각선으로 일렬로 먼저 늘어놓은 사람이 이기는 게임이다.

본 연구에서 사용되는 블로커스 오목은 블로

커스의 게임 방법에서 만들어지는 내부점(격자점)에 자신의 바둑돌을 두고 자신의 돌 다섯 개를 가로, 세로, 대각선으로 일렬로 만들어 오목을 만드는 것이다. 오목을 통해서 눈으로 내부점을 파악할 수가 있다.

## 3) Pick의 정리

좌표평면에서 좌표가 정수인 점들을 격자점(lattice point), 격자점으로 이루어진 평면을 격자평면(lattice plane), 각 꼭짓점들이 격자점으로 이루어지는 다각형을 격자다각형(lattice polygon)이라 하자. 격자점을 꼭지점을 하는 격자다각형의 넓이를  $S$ , 그 다각형의 둘레(모서리) 위에 놓인 격자점의 개수를  $B$ , 내부점의 개수를  $I$ 라 할 때,  $S = I + \frac{B}{2} - 1$ 가 성립한다.

## 나. 활동별 소재 내용

본 연구에서는 다양한 교구를 바탕으로 게임

<표 III-1> 수업소재 활동내용 및 활동 선정이유

차시	구분	활동내용	활동 선정 이유	소재별 코드화
1	활동 1	1 블로커스 구성요소 알아보기	블로커스를 소개하여 앞으로 이루어질 활동의 기초 활동이며, 폴리오미노의 특징을 파악함.	P-1
		2 블로커스 구성요소의 둘레와 넓이 구하기	Pick의 정리에 앞서 둘레와 넓이의 상관관계를 파악하는 기초 활동	P-2
2	활동 2	1 블로커스 오목	폴리오미노의 특징과 오목의 특징을 살려 게임 실시 - 블로커스 사용개수와 내부점의 관계 파악 실시	PO-1
3	활동 3	1 블로커스 조각의 내부점 찾기	내부점 개수에 따른 폴리오미노 조각의 특징을 찾고, 둘레와의 관계를 찾는 활동	I-1
		2 내부점과 둘레의 관계를 활용한 활동	넓이가 동일할 때의 둘레와 내부점의 관계를 알아내는 문제해결력 기를.	IB-1
4	활동 4	1 내부점의 개수 일반화하기	모양에 따른 내부점 개수의 일반화하기	I-2
		2 둘레와 넓이의 관계 구하기	내부점 개수에 따른 폴리오미노 조각의 특징을 찾고, 넓이와의 관계를 찾는 활동	SB-1
5	활동 5	1 넓이를 Pick 내부점도 pick(넓이를 고르고 내부점도 골라라!)	넓이, 내부점, 둘레의 관계를 파악할 수 있도록 학생이 넓이와 내부점의 값을 직접 고르고 모양을 그려봄으로써 Pick의 정리를 이해하고 발견하는 활동	SIB-1
6	활동 6	1 What if (not)? 전략을 적용한 내부점과 넓이의 관계 구하기	새로운 문제 만들기 및 창의력을 기르고, 내부점과 넓이, 둘레의 관계를 이해하고 파악함.	W-1

과 수학적 요소를 What if (not)? 전략을 이용하여 개발 준거에 맞추어 개발하였으며, 목표와 시간, 학생들의 수준에 따라 수업 소재를 어떻게 구성하는 것이 바람직한 것이 알아보기 위한 것으로 소재 내용과 선정 이유, 활동과 관련된 소재를 다음과 같이 표시하여 <III-1>과 같이 정리하였다.

수업 소재 중 활동 5는 넓이를 Pick, 내부점을 Pick은 학생들이 직접 넓이와 내부점의 개수를 고른 후 그려보는 활동이다. 이 활동을 통해 Pick의 정리를 발견하도록 유도하였으며, Pick의 정리를 오랫동안 인지할 수 있도록 1899에 Pick의 정리를 발견한 Georg Alexander Pick의 이름 ‘Pick’과 ‘고르다’라는 뜻을 지닌 동사 ‘pick’을 결합하여 활동 5의 제목은 ‘넓이를 Pick, 내부점도 pick’라 하였다.

학생들이 만든 다양한 모양에서의 넓이와 내부점의 관계를 다루면서 하형수(2010)는 Pick의 정리에 대한 의의와 증명소개를 하였다. 하형수(2010)에서 Pick의 정리는 ① 격자선 위에 네 변이 놓여있는 직사각형인 경우 ② 격자선 위에 직각을 끼고 있는 두 변을 갖는 직각삼각형인 경우 ③ 격자다각형 A가 두 개의 격자다각형 B, C 로 분할되는 경우 ④ 격자점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 경우 ⑤ 격자점을 이어서 만든 일반적인 격자다각형의 경우에 성립함을 증명하였다.

### 3. 연구의 대상자 및 자료 수집 방법

#### 가. 연구의 대상자

본 연구의 대상자는 G교육청 영재교육원 영재학급 4. 5학년 재학생 각 4명씩 총 8명이다. 그들은 4학년 초에 각 지역교육청에서 실시하는 영재 선발 3단계 과정에 따라 선발된 20명 중에서 지도교사들로부터 의사소통 능력이 뛰

어나다고 추천을 받았다. 연구의 대상자에 대한 코드화는 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 연구의 대상자 코드

학생 ID	학년	성별	학업성취도
4A-M	4	남	상상
4B-W	4	여	상하
4C-W	4	여	중상
4D-M	4	남	중중
5A-W	5	여	상상
5B-M	5	남	상하
5C-M	5	남	중상
5D-M	5	남	중중

#### 나. 자료수집 방법

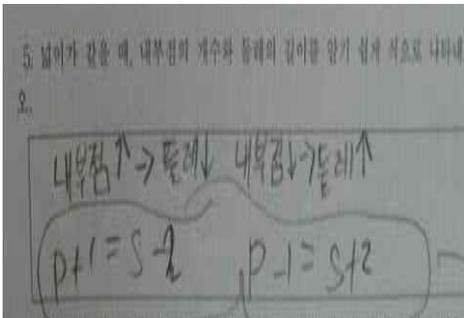
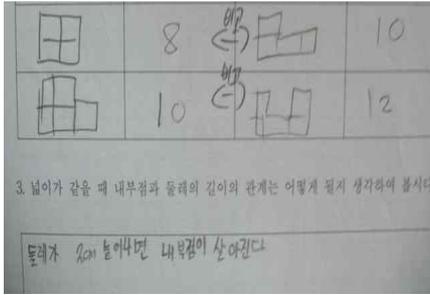
본 연구는 질적 연구방법을 택하여 학생들과 사전·사후 인터뷰를 하고 연구자는 참여 관찰 및 비디오 촬영을 수행하면서 연구 대상자와의 인터뷰과정에서 그들이 보이는 변화의 양상을 시간의 순서에 따라 기록하였다. 대상자들이 기록한 문서를 수집하여 학생들의 사례 유형을 분석한다. 관찰과 면담 결과에서 얻은 자료를 분석하는 방법으로는 먼저, 연구자가 기록한 대로 사례에 대한 사실들을 진술하는 내러티브 기술(narrative description)을 사용한 후, 단일 사례 내에서 주제를 확인하는 사례 내 분석을 하였다. 인터뷰, 관찰 및 비디오 촬영, 학생들의 학습지를 서로 비교하면서 수업 이전, 수업 중, 수업 이후 동안 학생의 변화 상태를 알아보고자 한다.

## IV. 현장 적용 및 결과 분석

### 1. 소재에 따른 1차 적용 결과 분석

#### 가. 5학년 과제 적용 결과

블록스 조각의 내부점 찾기(I-1)의 경우 사용되는 조각과 모양에 따라 내부점이 하나씩 늘어나면 둘레는 2씩 커진다. 5학년의 경우 모



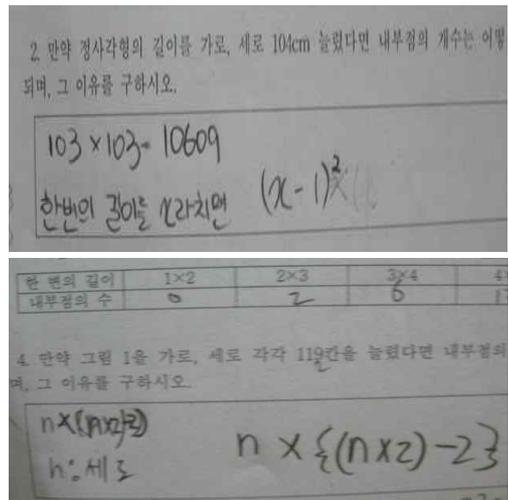
[그림 IV-1] 내부점과 둘레의 관계를 구하는 활동 사례

든 조각을 조사하거나 연역적으로 설명하기보다는 일부 조각에 대해 일부의 예를 통한 귀납적 정당화를 시도하였다. Pick의 정리를 유추하기 위하여 고안된 문제(넓이가 같을 때 내부점과 둘레의 관계)를 표현하는 경우 학생들은 내부점이 하나씩 늘어나려면 둘레는 2씩 줄어든다는 것을 관찰하였다.

실제로, Pick의 정리  $S=I+\frac{B}{2}-1$ 에서  $S+1$ 을 고정된 상수  $K$ 라 하면  $K=I+\frac{B}{2}$ 가 된다. 이로 인해  $I$ 가 1이 커지면  $\frac{B}{2}$ 의 영향을 받아 2가 줄어든다는 것을 알 수 있다. 본 소재로 Pick의 정리를 완전히 해결하지는 못하였지만 둘레와 내부점의 관계가 반비례적이라는 것은 파악할 수 있었다.

내부점 개수 일반화하기(I-2)는 둘레에 따른 내부점 개수의 일반화를 알아보는 과정이다. 수의 귀납적 추론을 통해 일반화를 찾음으로서 수학적 사고력을 계발시킬 수 있다. 본 소재의 경우 학년에 따라 구하는 방식은 상이하였다. 문제해결은 모두 가능하였으나 일반화를 위해 문자를 도입하느냐 않느냐에 따른 차이가 학년 간에 나타났다. 즉,  $S=I+\frac{B}{2}-1$ 에서  $I$ 의 값에 대하여 정리하면  $I=S-\frac{B}{2}+1$ 이 되며 정사각형 변의 길이가 가로, 세로 각각 1씩 계속 커질 때 내부점의 수를 파악하는 문제에서 넓이( $S$ )의 값은  $N$ 번째일 때  $N^2$ 이, 이때 둘레( $B$ )는  $4N$ 으로 나타난다. 이를 각각 대입을 하면  $I=N^2-\frac{4N}{2}+1=N^2-2N+1=(N-1)^2$ 이다. 즉, 정사각형 다각형의 내부점의 개수는  $I=(N-1)^2$ 이다.

I-2는 Pick의 정리를 알기 위한 과정과 더불어 Pick의 정리 중 변수의 조건이 달라짐에 따른 이유를 해결하는 등의 소재로 활용하여도 좋다. 하지만 학생들이 문자에 대한 이해가 정립이 되어 있지 않을 경우 [그림 IV-2]와 같은 실수를 범할 수 있다. 고학년이 문자를 사용할 경우 문자 사용에 대한 사전 지도가 필요하다.



[그림 IV-2] 식에 문자를 잘못 사용한 예

나. 1차 실험 적용 결과

1) 소재 적용 후 문제점

1차 수업소재를 적용하면서 나타난 아동의 반응과 성취도, 각 소재별 활동 시간을 평가하면서 발견한 문제점과 개선안은 <표 IV-1>과 같다.

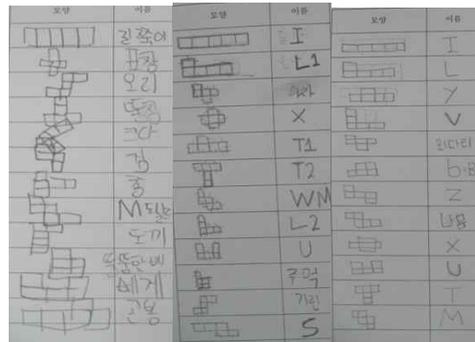
<표 IV-1> 1차 적용 자료의 문제점과 개선안

구분	문 제 점	개 선 안	
활동	1	합동의 개념을 정확히 이해 못함.	합동의 개념을 제시
	2	블로커스의 조각의 둘레와 넓이를 구할 때 많은 시간이 소요 조각의 종류를 암기하여 해결하는 학생들로 인하여 단조로움.	각 조각별 이름을 붙여보는 활동을 추가
활동	1	규칙에 따라 시간이 부족함.	활동시간을 늘림 학년에 따라 다양한 규칙을 적용
활동	1	내부점과 둘레의 관계를 파악하는 활동의 난이도가 높아 성취도가 떨어짐.	서술형으로 풀어서 해결하도록 함.
	2	$K = \frac{S}{P}$ 를 제시하여 비율 관계를 인식하도록 하였으나 비율관계는 아직 인식하지 못함.	$K = S \times P$ 로 바꾸어 K값을 구하도록 문제 변형 실시
활동	1	나만의 폴리오미노 만들기 중복	나만의 폴리오미노 삭제
	2	$K = \frac{S}{P}$ 를 제시하여 비율 관계를 인식하도록 하였으나 비율관계는 아직 인식하지 못함. 조건이 주어지지 않았을 때 K의 값을 구할 수 없음	$K = S \times P$ 로 바꾸어 K값을 구하도록 문제 변형 실시 정사각형의 사용 개수를 제시함.
활동	1	제시된 도형만으로는 둘레, 넓이, 내부점의 관계를 파악하는데 어려움	둘레, 넓이, 내부점의 관계를 다양한 도형에서 파악하도록 활동 6과 연계하여 실시
활동	1	Pick의 정리를 찾는 데 난이도가 높음.	활동 5와 연계하여 수의 패턴을 많이 경험할 수 있도록 제공.

2. 소재에 따른 2차 적용 결과 분석

가. 4학년 과제 적용 결과

블로커스 구성요소의 둘레와 넓이 구하기 (P-2)는 블로커스 조각의 특징을 파악하는 소재이다. 블로커스 조각을 파악 함에 있어 도형의 둘레와 넓이를 파악하는 단계로 개정된 7차 교육과정의 경우 도형의 둘레와 넓이는 4학년으로 내려와 적용되고 있다. P-2의 경우 1차 실험 적용에 비해 조각의 이름을 붙여 넣는 활동을 추가하였다. 이는 영어식으로 정의되어져 있는 조각이지만 학생 스스로 이름을 붙여보는 활동을 함으로써 창의적으로 조각을 바라보는 관점을 제시하고, 조각의 특징을 이해하는데 효과적이다. [그림 IV-3]과 같이 학생들이 조각에 이름을 붙이는 경우를 살펴보면 한글, 영문, 한글과 영문, 사물 모양 등으로 이름을 붙이며, 자신의 창의적 사고력을 충분히 발휘하였다.



[그림 IV-3] 폴리오미노 조각의 이름을 붙이는 활동 사례

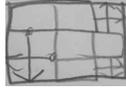
학생들은 이름을 붙임과 동시에 펜토미노 조각의 둘레와 넓이를 구하였다. 둘레를 구함에 있어 대부분의 학생은 하나하나 변의 수를 세면서 둘레를 구하였으나 학생 4C-W 경우 [그림 IV-4]와 같이 조각의 변을 양쪽 끝으로 밀어서 직사각형 혹은 정사각형의 모양을 만들어 둘레의 길이를 구하였다.

블로커스 오목(PO-1)은 Pick의 정리를 접근하기에 앞서 게임을 통해 자연스러운 내부점을

이해하도록 고안한 활동으로 오목 게임과 폴리 오미노 조각을 이용함으로써 자연스럽게 넓이

I조각이었다. 이는 오목을 올려놓기 위해 I모양 을 이용하면 한 번에 끝난다는 발견함과 동시

오목	이름	용량	면적
	I	12(3x2x2x3)	5
	J	12(3x2+2x3)	5
	X	12(3x4)	5
	T	12(3x3+2x1)	5
	L	12(3x2x2x3)	5
	Y	12(3x2+2x1)	5
	V	12(3x2x2x3)	5
	W	12(3x2x2x3)	5



[그림 IV-4] 폴리오미노 조각의 둘레 구하는 활동 사례

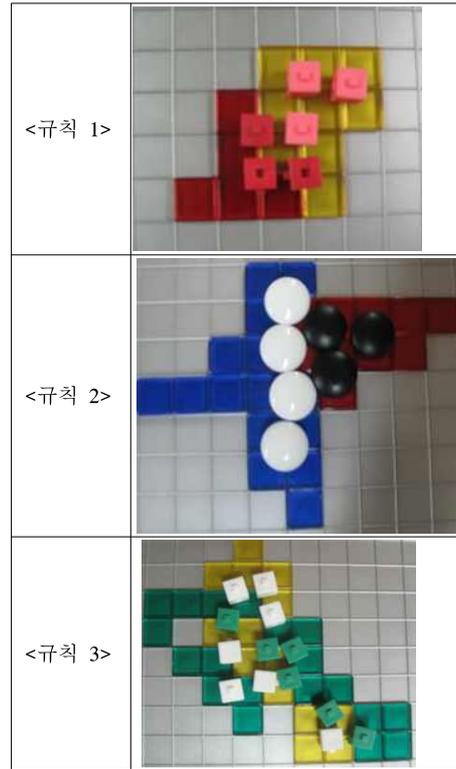
와 둘레를 쉽게 적용하고 발전시키는데 중점을 두고 개발하였다.

블로커스 오목의 경우 기본적인 규칙은 블로커스 조각을 이용하여 내부점을 만들고 만들어진 내부점을 오목돌로 표시하여 가로, 세로, 대각선중 한 부분이 5개가 놓이면 이기는 활동이다. 블로커스 조각을 놓는 방법은 블로커스 게임을 하는 것처럼 같은 색 타일의 모서리 부분이 이어지는 것만 허용하는 것이다. 블로커스 오목의 경우 조각을 어떻게 놓느냐에 따라 흥미와 속도에 차이가 많이 났다. 기본 규칙을 바탕으로 학생들이 제시한 게임 규칙에 추가 사항은 크게 3가지로 블로커스의 조각을 어느 위치에 놓느냐가 중요한 요소가 되었다. 학생들이 제시한 3가지 규칙은 <표 IV-2>와 같으며, 그에 따른 각각의 활동 모습은 [그림 IV-5]와 같다.

<표 IV-2> 블로커스의 3가지 규칙

- <규칙 1> 조각을 구별 없이 자유롭게 놓을 수 있다.
- <규칙 2> 나의 조각은 반드시 나의 조각 면을 만나야 한다.
- <규칙 3> 나의 조각은 반드시 면이 아닌 모서리를 만나야 한다.

<규칙 1>을 선택하여 게임을 할 경우 학생들은 필승 조각을 선택함과 동시에 그 조각은



[그림 IV-5] 블로커스의 3가지 규칙에 따른 활동의 예

에 누가 먼저 I조각을 사용하느냐에 초점이 맞추어져 있으며, 필승조각이 있어 게임이 쉽게 끝나고 흥미면에서도 다소 떨어졌다.

<규칙 2>를 선택하여 게임을 할 경우 <규칙 1>보다는 시간이 오래 걸렸으나 <규칙 1>과 같은 필승 조각으로 인해 게임이 쉽게 끝나고 흥미면에서도 다소 떨어졌다. 하지만 <규칙 1>과 <규칙 2>를 통해서 학생들은 내부점을 보다 정확하게 만드는 방법을 알고 이를 응용한 것이 바로 <규칙 3>이다.

학생들이 <규칙 3>을 사용하였을 때에는 상당한 집중력을 보였다. <규칙 1>과 <규칙2>에 없는 규칙인 모서리끼리 만나야함과 블로커스

게임에 대한 친숙함이 집중력을 배가 시켰으며, 흥미면에서도 상당한 효과를 가져왔다. 무엇보다 <규칙 1>과 <규칙2>의 경우 게임이 너무 일찍 끝나 단순함을 느꼈다면 <규칙 3>을 필승조각이 있기보단 변수가 많아 학생들이 집중하는데 좋았다. 하지만 <규칙3>의 경우 내부점을 만들기 <규칙 1>, <규칙 2>보다 어렵기 때문에 게임의 시간이 오래 걸린다는 단점이 있다. 블로커스 오목에 <규칙 1, 2, 3>을 추가하였을 때 장단점을 정리하면 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 블로커스 오목 결과 분석표

	흥미도	시간	내부점	적합학년
규칙1	하	짧음	발견하기 쉬움	1학년 ~3학년
규칙2	중	보통	발견하기 쉬움	4학년 ~5학년
규칙3	상	길다	발견하기 어려움	5학년 ~6학년

넓이를 Pick, 내부점을 Pick(SIB-1)에서는 2명의 학생이 내부점, 둘레, 넓이의 관계를 찾았는데 4D-M는 숫자의 패턴을 이용해서 우연히 발견하였다. 하지만 학생 4A-M은 <표 IV-4>와 같이 설명하여 해결하였다.

<표 IV-4> Pick의 정리를 해결하는 사례

교사 : 어떻게 Pick의 정리를 구했는지 설명해볼래 4A-M : 내부점이 1일 때 넓이의 값은 둘레÷2가 된다는 것을 알 수가 있어요. 그래서 만약 내부점이 3이고 둘레가 20 이라면 내부점에 -1을 해주고 남은 값이 2가 됩니다. 거기에 아까 둘레÷2를 해주면 10이 나오는데 아까 내부점에 1을 빼서 남은 값과 10을 더하면 넓이가 되는데 12가 되네요.
교사 : 근데 -1은 왜 해주었어? 선생님은 그 사실이 궁금해. 그리고 내부점에 -1을 해주고 나머지 값을 더해 주는 이유는 무엇이지? 4A-M : -1은 우연히 발견하게 되었어요. 한 개씩 -1을 해보니 맞아 떨어지더라고요. 별다른 이유는 없습니다. 그리고 둘레÷2는 기본적인 모양에서 찾았는데 대부분 맞더라고요.

학생 4A-M의 경우 일반적인 증명은 아니지만 내부점과 둘레, 넓이의 관계를 파악하여

$S=I+\frac{B}{2}$ 의 관계를 파악하였다. 내부점이 1개 일 때 둘레와 넓이의 관계를 파악한 후 내부점의 개수 변화에 주목하여 -1을 발견하였으며 Pick의 정리를 파악하였다.

#### 나. 2차 실험 적용 결과

##### 1) 소재 적용 후 문제점 및 개선점

2차 수업소재를 적용하면서 나타난 아동의 반응과 성취도, 각 소재별 활동 시간을 평가하였다. 이에 발견된 문제점 및 개선점은 <표 IV-5>과 같다.

<표 IV-5> 2차 적용 자료의 문제점과 개선점

구분	문제점	개선점
활동 1	1 합동의 개념을 정확히 이해 못함.	합동의 개념을 제시 / 구체적 사례 제시
	2 조각에 대한 이름이 다양함.	영문으로 통일된 조각 이름 제시
활동 2	1 다양한 규칙에 따른 복잡함.	새로운 규칙의 제안을 받고 함께 실시하여 활동에 대한 토론 실시
활동 3	1 활동 시간이 짧음.	활동시간을 길게 하고, 학생들이 스스로 사고할 수 있도록 유도
	2 다양한 K값 제시를 못함.	K의 큰 값이 아닌 다양한 K값이 나오도록 수정 보완
활동 4	2 다양한 K값 제시를 못함.	K의 큰 값이 아닌 다양한 K값이 나오도록 수정 보완
활동 5	1 학생들이 만든 자료를 바탕으로 Pick의 정리를 찾는 데 어려움	발표와 더불어 다른 사람의 창의적인 작품을 통해 수의 패턴을 이해하고 발견하는데 도움이 되도록 수정 보완
활동 6	1 후속 활동이 부족함. 평가자료 미흡	학생들이 'What if (not)?' 전략을 적용하여 나만의 폴리오미노를 만들어 Pick의 정리를 적용하고 새로운 게임을 만드는 활동 수정 보완

#### 3. 최종 수정된 수업소재

본 연구의 소재들을 실험 적용한 결과 목표,

시간, 수준에 따라서 <표 IV-6>과 같이 정리할 수 있다. What if (not)? 전략을 이용하여 개발한 본 소재는 수업 시 목표, 시간, 수준에 따라 선택을 할 수 있도록 구성함으로써 영재학생들을 대상으로 수업 진행시 다양한 방법으로 사용할 수 있다. 수업 진행을 위한 소재 선정 시 시간을 중심으로 선택을 할 경우 각 활동별 각 소재에 시간을 참고하여 소재를 구성하면 되고, 최대 10차시의 소재를 지도할 수 있다. 또한 학습 목표에 따라서 폴리오미노, 내부점, 둘레, 넓이 등의 각 특징적인 요소를 중점적으로 지도할 수 있다.

최종 수정된 수업소재의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 수학 영재학생들의 학년별 다양한 특징을 바탕으로 학년에 맞는 각 소재별 수준을 제시하였으므로 학년 혹은 능력에 맞는 소재를 선택할 수 있다. 또한 심화 활동이 필요시 학년 수준보다 높은 소재를 선택하여 해결하면 된다.

둘째, 각 소재에 폴리오미노의 특성을 살려 What if (not)?을 적용하여 각 소재를 바꾸어 적용할 수 있다. 예를 들어 정사각형이 아니라면? 이라는 질문을 바탕으로 삼각형으로 한다면 블로커스의 Trigon을 이용하여 같은 방법으로 소재의 다양화를 추구할 수 있다. Pick의 정리는 삼각형, 다각형에서 성립함을 알 수가 있다. <표 II-1>에 개발된 소재에 적용을 한다면 보다 많은 영재 학급용 수업 소재로 활용 가능성이 있다고 생각된다.

폴리오미노에 What if (not)? 전략을 활용함으로써 학생들이 실생활에서 접하는 소재들을 수학적 사고로 생각할 수 있는 기회를 주었으며, 수학에 대한 흥미를 자연스럽게 느끼고, 능동적인 학습태도를 갖게 되었다. 또한 학생들은 새로운 관점과 다양한 방법을 이용하여 문제를 만들어 가는 활동을 통해 수학을 재조명하게 되

고, 성공의 기쁨을 느끼게 되면서 수학 학습에 긍정적인 효과를 거두었다. 내부점에 따른 둘레, 넓이의 관계를 이해하는 성과를 거두었다. 지속적인 연구를 통하여 실험을 한다면 학생들에게 재미와 흥미를 심어주고 What if (not)?을 활용한

<표 IV-6> 최종 수정된 수업소재

구분	활동내용	목표	시간	수준	문형번호
활동 1	1 블로커스 구성요소 알아보기 (P-1)	폴리오미노의 특징을 파악할 수 있다.	40분	초급	1~2번
	2 블로커스 구성요소의 둘레와 넓이 구하기 (P-2)	폴리오미노의 둘레와 넓이를 구할 수 있다.	40분	중급	3~4번
활동 2	1 블로커스 오목 (PO-1)	게임을 통하여 내부점을 파악할 수 있다.	40~80분	초중급	1~6번
활동 3	1 블로커스 조각의 내부점 찾기 (I-1)	내부점의 특징을 파악할 수 있다.	20분	초급	1~3번
	2 내부점과 둘레의 관계를 활용한 활동 (IB-1)	내부점 개수에 따른 폴리오미노 조각의 특징을 찾고, 둘레와의 관계를 찾을 수 있다.	60분	중급	4~7번
활동 4	1 내부점의 개수 일반화 하기 (I-2)	넓이가 동일할 때의 둘레와 내부점의 관계를 알아낼 수 있다.	10분	중급	1~2번
	2 둘레와 넓이의 관계 구하기 (SB-1)	모양에 따른 내부점 개수의 일반화할 수 있다.	10분	중급	3~4번
활동 5	1 넓이를 Pick, 내부점을 Pick (SIB-1)	내부점 개수에 따른 폴리오미노 조각의 특징을 찾고, 넓이와의 관계를 찾을 수 있다.	40분	중고급	1~2번
활동 6	1 'What if (not)?' 전략을 적용한 내부점과 넓이의 관계 구하기 (W-1)	넓이, 내부점, 둘레의 관계를 직접 모양을 그려봄으로써 Pick의 정리를 이해하고 발견할 수 있다.	40~80분	초중고급	학습지

창의적인 사고 향상 및 영재교사 및 영재학생들을 위한 좋은 소재로 발전하리라 생각된다.

## V. 결론

폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 수업 소재는 수학 영재라 할지라도 학년에 따라서 각 소재에 나타난 시간과 결과와 학년에 따른 개인별 문제 해결력과 이들이 제시한 해결방법에는 몇 가지의 차이를 보였으며, 이를 통해 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 수업 소재에는 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 각 소재는 학년에 따라 기본학습과 심화학습을 선택하여 해결할 수 있다. 본 연구에서 개발된 소재는 초급, 중급, 고급으로 3가지로 분류 하였으며, 분류는 학생들의 문제 해결력과 성취도에 의해 구별하였다. 초급, 중급, 고급은 각 소재별 성취 수준을 해당 학년의 70% 이상 달성하였을 경우 설정하였다. 즉, 4학년의 경우 초급 수준은 70% 이상 달성하였으나 중급, 고급의 소재에서는 그 이하의 성취도가 나타났다. 초급 수준의 소재를 이수한 학생들은 중급과 고급의 소재를 통하여 좀 더 심화된 학습을 하고, 보다 진취적이고 발전적인 사고를 할뿐만 아니라 수학의 깊이를 한층 깊게 할 수 있다.

둘째, 수학 영재들은 레크리에이션 요소를 포함하고 있는 개발된 소재를 통해 Pick의 정리를 발견하였다. 본 연구의 소재는 수학이라는 학문에 즐거움을 더해 수학의 재미를 느끼게 하였다. 블로커스 오목을 통하여 내부점과 넓이, 둘레의 개념을 자연스럽게 익히고 일반화를 발견해 나가면서 Pick의 정리가 영재학생들에게 해결할 수 있는 과제로 확인되었다.

셋째, 각 소재에 연계성을 마련하여 각 소재

별로 넓이, 둘레, 내부점등을 해결할 수 있는 문제해결력을 향상시켰다. 학생들은 블로커스 오목 등을 통하여 개념을 친숙하게 인식하고, 넓이, 둘레, 내부점의 일부가 고정된 값일 때 도 관계를 찾아 해결하였다.

넷째, 기존의 프로그램이 목표와 시간, 학년을 정해서 나온 반면, 본 소재는 목표와 시간, 학년에 따라 다양하게 활동을 구성할 수 있다. 기존 영재 교수 학습 프로그램의 경우 초급, 중급, 고급의 3가지로 제작되어 영재 학생들에게 지도 하였으며, 시간이 부족하거나 혹은 남을 경우 다른 대체 자료가 없었다. 하지만 본 연구의 소재는 서로 다른 난이도와 시간을 제시하였고 유기적인 목표체계를 갖추고 있기 때문에 다양한 상황 속에서 특징에 맞는 소재를 선택하여 지도할 수 있다. 본 연구를 통해 개발된 소재를 통해 다양한 선택이 가능함으로써 학생들과 교사들에게 질적, 양적으로 우수한 교수학습 프로그램을 제공하였다.

다섯째, 학생들의 What if (not)? 전략을 이용한 문제 만들기에서 다양한 반응이 나타났다. 학생들에게 제시한 조건변형(What if (not)?) 전략 문제를 통해 학생들은 수 바꾸기, 도형의 종류, 단면에서 입체로 바꾸기 등 각기 다양한 반응을 보였다. 영재 학생들에게 단순히 주입하기 위한 소재가 아니라 What if (not)? 전략을 사용하여 창의적인 사고를 이끌 수 있다는 것을 발견하였다.

## 참고문헌

- 구분왕(2011). 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 영재 학급용 수학 수업 소재 발굴과 활용. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 김양권(2009). 초등수학 영재를 위한 도형수

- 과제의 수준별 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김지영(2002). **창의성 신장을 위한 초등학교 수학 영재학급용 프로그램 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김지원(2003). **한 수학영재아의 수학적 사고특성에 관한 사례연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 송상현(2000) 수학 영재아들을 위한 행동특성 검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 2(2), 427-457
- 송상현(2002). 수학 수학영재를 위한 교수 원리 및 방법의 적용에 대한 소론. **경인교육대학교 과학교육논총 제14집**, 1-19.
- 송상현(2004). 수학 영재 교수·학습 자료 개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. **경인교육대학교 과학교육논총 제16집**, 67-86
- 유미애(2002). **Polyominoes를 활용한 창의성 신장 학습 자료 개발 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 이종욱(2000). **초등학교 수학 영재의 확산적 사고 발달을 위한 학습 자료 개발 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이향훈(2007). **NIM 게임의 조건 변경을 통한 문제만들기와 일반화 과정 분석**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 최영미(2005). **‘What-If-Not’ 방법에 의한 문제설정에서 분석적 사고활동 및 수학 교수-학습 자료 개발 연구**. 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문
- 최종현(2004). **주제 탐구형 수학 영재 교수·학습자료 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 하형수(2010). 격자다면체 부피에 대한 역사적 고찰 및 그 응용 -수열 단원에서의 응용 -한 **국수학사학회지**, 23(2), 101 - 21
- Brown, S. I. & Walter, M. I.(1983). *The art of problem posing*. Philadelphia : Franklin Institute Press
- Golmb. S. W. (1994). *Polyominoes Princeton*. NJ: Princeton University Press.
- Krutetskii, V. A. (1969). *The structure of mathematical abilities*. Vol 2 of studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. In J.
- Krutetskii, V. A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. The Univ. of Chicago Press.
- Picciotto, H(1999). *Geometry Labs*. Key Curriculum Press.
- 웹사이트**  
<http://mathworld.wolfram.com/Polyiamond.html>  
 (검색일 : 2010. 05. 01) - wolfram mathworld. 다양한 폴리 형태의 종류 소개 및 설명.  
<http://www.recmath.com/PolyPages>(검색일 : 2010. 05. 01) - 다양한 폴리 형태의 종류 소개 및 설명.  
<http://omok.or.kr/> (검색일 : 2010. 05. 01 ) 한국오목협회. 오목의 역사 규칙 등 설명.

# Development and Utilization of Mathematics Teaching Materials for Gifted Class by the Use of Polyominoes and What if (not)? Strategy

Ku, Bon Wang (Seoam Elementary school)

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education/AJOU)

The purpose of this study is to develop and utilize various kinds of mathematics teaching materials for gifted class in elementary school by utilizing polyominoes and a what-if-not strategy. Blokus is used to let students understand the characteristics of polyominoes, and omok is utilized to let them grasp interior point. Thus, the activities that utilized the new materials, blokus and omok, are developed to teach Pick's theorem. Besides, recreation activities were additionally prepared to provide education in an easy, intriguing and creative manner. The findings of the study is as follows:

First, each of the materials was utilized in a different manner when the students engaged in basic and enrichment learning.

Second, the mathematically gifted students were able to discover Pick's theorem in the course of utilizing the materials that contained recreational elements.

Third, the students were taught to foster their problem-solving skills about area, girth and interior point by making use of the materials that were designed to be linked to each other.

Fourth, existing programs were just designed to attain particular objects, to be conducted at a fixed time and to cater to particular graders.

Fifth, when the students made problems by making use of the what if (not) strategy and the materials, they responded in diverse ways and were able to apply them.

\* key words : mathematically gifted students(수학영재), polyominoes(폴리오미노), what if (not) strategy(조건 변경 전략), Pick's theorem(피크의 정리)

논문접수 : 2011. 2. 14

논문수정 : 2011. 3. 4

심사완료 : 2011. 3. 11