

## GSP를 활용한 역동적 기하 환경에서 기하적 성질의 추측<sup>1)</sup>

손 홍 찬\*

본 논문에서는 GSP(The Geometer's Sketchpad)를 이용한 역동적 기하 환경이 학생의 기하학적 성질의 추측에 어떤 영향을 미치는지를 살펴보았다. 좀 더 구체적으로 살펴보면, GSP 환경에서 학생들은 문제 상황에서 주어지지 않은 새로운 조건들을 생성하고 그 조건하에서 성질을 추측하는 활동이 활발하고, 문제의 조건이 너무 적은 개방적인 문제 상황에서는 추측 활동이 미약하였다. 또한 GSP 환경에서 추측한 성질은 지필환경에서 추측한 성질보다 복잡하였고 증명하기 어려웠으며 GSP의 다양한 기능 중 'Alt' 키를 이용하여 화면을 이동시킬 수 있는 기능은 측정과 계산 기능 등과 같이 기하적 성질의 추측에 요긴하게 사용되었다. 또한 학생들은 기하적 성질을 증명할 때보다 스스로 기하적 성질을 발견하였을 때 더 자부심을 갖게 되며 더 기쁘게 생각하였다.

### 1. 서론

기원 전 3세기경에 확립된 유클리드 기하학은 그리스 이래 수학의 원형이자 학문의 전형으로 여겨져 왔으며 지금까지 수학교육의 주요 내용으로 자리 잡고 있다. 유클리드 기하학은 수학의 논리적 구성 방법과 학문의 이론적 구성을 배우기에는 훌륭한 교재로 여겨져 왔으나, 수학교육학적인 측면에서는 수학적 성질의 발견 과정이 숨겨져 있고 학생의 수준에 비해 너무 엄밀하여 기하교육을 형식적 교육에 머물게 만든다는 점에서 많은 비판이 제기되어왔다. 18세기 이후부터는 학교수학에서 유클리드 기하를 다루는 것이 적당한지 또는 유클리드 기하를 어떻게 개선할 수 있는지에 대한 논의가 활발하게 이루어져왔으며 많은 시도가 있었다(우정호, 2002).

우리나라 수학과 교육과정의 중학교 2학년에서부터 다루게 되는 유클리드 기하학은 학생들이 가장 어려워하고 기피하는 분야이며 증명 능력이 낮고, 학업 성취도도 낮은 것으로 나타나고 있다(우정호, 1994; 류성립, 1998). 이와 같은 사실은 2007 수학과 개정 교육과정을 개발하는데도 영향을 미쳐서 2007 수학과 개정교육과정에서 기하학습의 목표는 제7차 수학과 교육과정보다 다소 약화되어 기술되어 있다. 예를 들면 7차 교육과정의 8-나 단계의 '답음의 응용' 편에서 '평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 증명하고, 이를 활용할 수 있다'와 '삼각형의 중점연결 정리를 증명하고, 이를 활용할 수 있다'(교육부, 1997)는 7차 교육과정 개정안의 중학교 2학년 '답음의 활용'에서 '평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다'와 '삼각형의 중점연결 정리를 이해하고, 이를 활용

\* 전북대학교(hcson@jbnu.ac.kr)

1) 이 논문은 2008년도 전북대학교 신입교수 연구비 지원에 의하여 연구되었음

할 수 있다'(교육인적자원부, 2007)와 같이 약화되어 서술되어 있다. 그리고 7차 교육과정의 9-나 단계에서의 '원과 직선'에서 '원의 접선에 대한 성질을 이해하고, 이를 증명할 수 있다'는 7차 개정안에서의 '원과 직선'에서 '원의 접선에 대한 성질을 이해한다'와 같이 증명이 약화되어 기술되어 있다. 이것은 유클리드 기하가 학생들에게 어렵기 때문에, 학습량을 경감하고 학생의 수준을 고려하여 증명 지도를 허용하고자 하는 의도를 반영한 것이다.

학생들이 유클리드 기하에서 어려움을 겪는 것은 비단 우리나라의 경우만 해당되는 것은 아니다. 1982년의 NAEP의 결과를 보면 17세 되는 학생들에게 있어서 기하에서의 증명은 가장 싫어하는 주제였고 50%미만의 학생이 증명을 중요한 것으로 여긴 것으로 드러났다(Bennett, 1997). Fuys, Geddes, & Tischler (1988)와 Schmidt (2005)는 고등학생들이 기하학적 성질이나 관계에 대한 지식이 거의 없고 서로 다른 기하학적 도형을 구분할 수 있을 정도의 지식만 가지고 있음을 지적한 바 있다. Olive (1998) 또한 4차 NAEP의 결과를 인용하면서 상당히 많은 학생들의 기초적인 기하학의 지식이 부족하고 이것이 10여 년 전과 별로 나아지지 않았음을 지적한 바 있다.

전통적으로 우리 기하 교육에서는 학생 중심의 탐구활동으로부터 수학자와 유사한 경험 즉 기하학적 성질을 추론하고 증명해보는 교수학습 방법보다는 유클리드 기하의 교과서를 따르는 교사 중심의 연역적 증명 지도가 주를 이루어 왔다고 해도 과언이 아니다. 이와 같은 방법은 학생들이 기하를 어려워하고 흥미를 떨어뜨리는 요인이 되어왔다.

학교기하 교육은 유클리드 기하의 단점을 보완하기 위해 관찰과 조작활동을 통하여 기하학적 성질을 직관적으로 추측하고 학생의 수준에

맞는 정당화 과정을 구현하는 것에 초점을 맞출 필요가 있다. 오늘날 공학이 발달하면서 탐구형 기하 소프트웨어들이 출현하였고, 이를 이용한 역동적 기하환경에서의 기하 탐구는 기하교육 개선의 요구를 충족시킬 수 있는 것으로 기대를 모으고 있다. 이러한 기대 속에 학생들이 어려워하는 기하학의 교수학습을 돕기 위하여 컴퓨터 소프트웨어에 의해 작동하는 역동적 기하를 효과적으로 활용하여 학생들의 기하 학습을 지도하는 것이 연구되어 왔다. 역동적 기하 프로그램으로 The Geometer's Sketchpad(GSP)나 Cabri 3D와 같은 프로그램은 우리나라에도 많이 보급되어 있으며, 이들 소프트웨어를 이용한 교수 학습의 효과를 탐구하는 연구들이 있다. 많은 연구들은 역동적 기하 환경이 도래함으로써 이러한 교수 학습 방식에서 학생 중심의 탐구활동이 주가 되는 기하 교수 학습이 가능함을 시사하고 있다.

이 논문에서는 주로 GSP를 활용한 역동적 기하 환경이 학생의 기하학적 성질의 추측에 어떤 영향을 미치는지를 알아보고 교수·학습에서의 유의점을 도출하고자 하였다.

## II. 이론적 배경

오늘날 공학은 수학 교수학습에서 그 사용이 권장되고 있고, 공학을 활용함으로써 나타나는 효과에 대한 연구가 지속적으로 이루어지고 있다. 기하 교육에서 사용할 수 있는 역동적 기하프로그램의 하나로 오늘날 우리 학교현장에서 어렵지 않게 찾아볼 수 있는 GSP는 미국 국립과학재단의 지원으로, Swarthmore 대학의 Eugene Klotz 박사와 펜실바니아의 Moravian 대학의 Doris Schattscheider 박사가 주도한 VGP(Visual Geometry Project)의 한 부분으로 개

발되었다. 개발자는 Nicholas Jackiw로 VGP에 참여한 1년 뒤에 처음으로 매킨토시용 GSP를 만들었고 차츰 기능을 향상시켜 오늘날 수학교육용 소프트웨어로 자리 잡게 하였다(Bennett, 1997).

GSP는 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 정확히 작도할 수 있도록 하고, 상위 개체가 움직이면 하위 개체가 따라서 움직이므로 도형들의 관련성을 명백히 드러내준다. 또한 도형의 변환, 측정, 계산 등의 기능이 있고 도형의 방정식을 그래프로 그릴 수 있는 기능도 가지고 있다. 스크립트를 이용하면 작도를 하는 과정을 기록할 수 있고, 그 기록으로 다시 작도를 따라할 수 있다. 또한 애니메이션 기능이 있어 움직이는 도형으로 흔적이나 자취를 구하거나 도형의 성질을 설명할 때 사용할 수 있다.

이러한 의미에서 GSP와 같은 소프트웨어가 주어지는 환경을 역동적 기하 환경이라고 하는데, ‘역동적 기하(dynamic geometry)’란 용어는 Nick Jackiw와 Steve Rasmussen에 의해 만들어진 뒤 많은 문헌에서 쓰이게 되었다(Goldenberg & Cuoco, 1998).

NCTM(2000)은 학교 수학을 위한 원리 6가지 중 하나로 공학의 원리를 들고 공학이 수학을 가르치고 배우는데 필수적이며 수학 지도 내용에 영향을 미치고 학생들의 학습을 촉진한다고 명시하고 있다. 즉, 공학이 기하, 통계, 대수, 측정, 산술 등 수학의 모든 분야에서 학생의 탐구과정을 지원하고, 공학 도구를 이용할 수 있을 때 학생들은 의사 결정, 반성, 추론, 문제 해결에 초점을 둘 수 있다고 보고 있다. 우리나라 7차 수학과 교육과정에서도 교수·학습 방법에서 “교수·학습 과정에서 복잡한 계산, 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를

적극 활용하도록 한다.”와 같이 명시되어 있고, 2007 수학과 개정 교육과정에서도 마찬가지로 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 것을 권장하고 있다(교육부, 1997; 교육인적자원부 2007).

NCTM(1987)은 수학 교수의 중대한 변화를 요구하면서 기하 교육에서는 기하를 완전한 연역적 체계로 제시하는 것을 강조하는 대신 보다 많이 학생에게 탐구하고 추측하게 만들 것을 요구하였다. 그런데 GSP와 같은 역동적 기하 소프트웨어들은 학생이 직접 조작할 수 있어서 수동적이기보다는 능동적이고 적극적으로 학습에 임할 수 있게 하고, 이러한 특징으로 수학에 대한 흥미와 관심을 높일 수 있는 장점이 있어서, 자칫 딱딱하게 전개될 수 있는 기하 수업을 학생이 적극적으로 사고할 수 있는 보다 활동적인 수업으로 바꿀 수 있다. GSP의 기능을 이용하면 대칭변환, 회전변환, 평행이동 뿐만 아니라 이것들의 합성도 쉽게 할 수 있고 시각적으로 보여줄 수 있어서 고등학교에서 가르치고 있는 변환을 쉽게 가르칠 수 있을 것이다. GSP에서 드래그와 같은 특성을 사용하면 도형을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있어 도형의 개념을 정확히 이해시키는데 도움을 줄 수 있다.

이와 같은 역동 기하 소프트웨어의 특징은 수학교육의 개혁을 꿈꾼 사람들에게 변화를 앞당기는 역할을 하였다. 실제로 NCTM은 1989년 “수학교육과정과 평가의 새로운 방향”을 펴내기 전에, 이미 1985년에 Schwartz와 Yerushalmy 등에 의해 만들어진 Geometry Supposer와 같은 소프트웨어들의 영향력을 인지하고 있었다(Bennet, 1997). 공학을 이용함으로써 시간이 많이 걸리거나 지루한 일을 단축할 수 있고, 도형의 성질과 그들 사이의 관계에 대해 보다 많

은 시간을 들여 탐구할 수 있다고 본 것이다.

Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strasser (2006)에 의하면 수학에서 공학적 도구의 활용에 관한 연구들은 다음과 같은 단계들을 밟아왔다. 초기에는 학습자와 공학적 도구 사이의 상호작용에 초점을 맞추어 공학을 활용한 수학 학습에서의 학습과정에 대한 이론적 고찰, 이어서는 학습 목표에 도달하기 위한 적절한 문제의 설계와 교사의 역할, 그 다음에는 교사의 일상적인 수업에서 어떻게 공학을 통합할 것인가, 마지막으로 소프트웨어의 특징이나 공학적 도구 설계가 가지는 특징에 대해 연구를 하였다. GSP에 관한 연구를 통해서 GSP 환경이 여러가지 기하학적 주제 예를 들면 삼각형, 사다리꼴, 다면체, 각, 넓이의 측정, 비와 비율과 같은 전통적인 기하학적 개념에 대한 학생들의 수학적 사고를 엿볼 수 있게 하고, 이러한 개념들에 대해 다른 측면을 일깨워줄 수 있음이 밝혀졌고, 작도 활동이나 증명 활동과 같은 기하적 활동을 통해 학생의 개념화에 진보와 변화가 있음을 알게 되었다.

GSP 환경에서 작도 시에 나중에 그려지는 하위 개체는 초기에 그려지는 상위 개체의 영향을 받게 되는데, Laborde et al.(2006)은 이와 같은 현상을 '준독립적'이라고 하였다. 이는 지필환경에서 학생이 임의적으로 그릴 수 있는 것과는 대조되는 특징이다. 이와 같은 GSP 환경의 특징은 드래그를 통한 도형의 변환 시 화면상에서의 불변하는 성질은 기하적으로도 불변하는 성질을 보여주는 것으로 Leung(2003)은 이와 같은 특징이 경험적 수학과 이론적 수학을 잇는 다리 역할을 한다고 하였다. Healy (2000)는 드래그 하는 동안 보존 되는 성질을 존중하여 작도하는 부드러운(soft) 작도와 학생이 임의로 눈대중을 통하여 작도하는 딱딱한(robust) 작도 개념을 도입하였는데, 그는 학생

들이 딱딱한 작도를 선호하는 경향이 있으며, 부드러운 작도를 한 학생들은 두 개의 변과 각이 같은 삼각형은 임의적으로 결정되지 않음을 보일 수 있었다고 주장하였다. 또 역동적 기하 환경이 실험적 수학과 이론적 수학의 격차, 추측과 형식화의 격차를 줄여줄 수 있는지에 대한 연구, 그리고 역동적 기하 환경이 학생의 증명능력에 미치는 영향에 대한 연구들도 있다. Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi (2004)는 초등 예비교사들을 대상으로 한 실험에서 GSP가 탐구와 증명 사이의 다리 역할을 한다고 주장하였고, Jiang(2008)도 역동적 기하 소프트웨어의 적절한 활용이 학생이 수학적 사실을 발견하는데 도움을 주며, 발견한 사실을 설명하거나 증명에 필요한 통찰력을 제공할 수 있다고 하였다.

국내에서도 GSP가 도입되면서 교사들을 대상으로 GSP 활용 방법에 관한 연구가 지속적으로 실시되고 왔고 많은 교수·학습 자료들이 개발되어 왔다. 그리고 현직 교사 또는 수학교육 연구자들에 의해 역동적 기하환경에서의 중·고등학교 수학의 특정 단원을 지도하기 위한 교수·학습 자료들이 많이 개발되었다(강순자와 고상숙, 1999; 김부윤, 이영숙, 김현구, 2003; 계영희, 김종민, 2008).

이와 함께 GSP가 교수·학습에서 활용될 때 문제해결, 추론 및 van Hiele의 수준과 관련한 연구들이 있다. GSP를 활용한 문제해결에서 신양재, 심광보, 이재훈(1999)는 GSP의 활용이 문제해결 과정의 이해 및 추론에 상당한 효과가 있다고 주장하였고, 김남희(2002)는 Polya가 제시한 문제 해결단계에 중 문제의 이해, 해결 계획의 수립, 반성 단계에서 GSP가 활용될 수 있음을 보이고 수학교사가 GSP를 활용할 때의 유의점을 논한 바 있다. 남선주(2006)는 GSP 환경에서 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연

구에서 GSP 환경이 작도와 분석과 종합의 증명 과정에 긍정적인 영향을 끼친다고 주장하였다. 또한 이창현·황우형(2010)은 van Hiele 수준이론과 관련하여, GSP의 활용은 학생들의 기하학적 수준을 상위 단계로 이행하도록 도와준다고 주장한 바 있다.

기하교육의 주된 목적이 기하학적 정리의 증명을 수동적으로 반복하는 것이 아니라, 기하학적 직관을 기르고 논리적 추론 능력을 향상시키는 것에 있다고 할 때, 역동적 기하 환경이 지필 환경의 한계를 극복하고 탐구 중심의 발견학습으로 옮겨갈 수 있게 하고, 논리적 추론 능력을 향상시키는 기회를 제공할 수 있게 하는지를 보다 구체적으로 탐구할 필요가 있다. 특히 GSP의 어떤 특징이 기하적 성질의 추측에 어떻게 영향을 미치며 활발한 추측을 촉진하는 문제 상황의 조건을 알아보는 것은 의미가 있다.

### III. 연구 방법

#### 1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 GSP를 이용한 역동적 기하 환경이 학생이 수행하는 기하적 성질의 추측에 어떤 영향을 미치며, 교수·학습에서 유의할 점은 무엇인지를 탐구하고자 한다. 이 연구는 결과와 함께 학생들의 활동 과정에 초점을 맞추고, 전체적인 연관성과 발견에 관심을 두고 있기 때문에 이에 적합한 질적 사례연구 방법을 이용한다.

이 연구를 위해 2번의 실험을 하였다. 이를 실험 1, 실험 2라 한다. 실험 1은 2008년 여름 학기 중 일부, 실험 2는 2009년 1학기 중 일부 기간에 이루어졌다. 실험 1에 참가한 학생은

20명으로 중학교 1학년이고, 실험 2에 참가한 학생은 중학교 3학년 5명으로 이들은 서로 다른 집단이다. 학생들은 모두 학교에서 수학 학업성취도가 높은 편에 속하는 대학 부설 영재원 소속 영재학생들이었다.

실험에 참가한 학생은 모두 중소도시 출신이며 GSP를 사용한 경험은 없었다. 실험 1에 참가한 1학년 학생들의 선행학습 정도는 대개 중학교 2학년 내지 3학년까지 마친 정도였고, 실험 2에 참가한 3학년 학생들은 대개 고등학교 2학년 정도까지 마친 상태였다. 수업의 진행사는 연구자였다.

#### 2. 실험 수업

실험 1은 오래된 컴퓨터실에서 실시되었고, 컴퓨터 중 일부는 실험 중 다운이 되기도 하였으나 GSP를 실행하는 데 큰 문제는 없었다. 실험 2는 새 컴퓨터들로 이루어진 컴퓨터실에서 실시되었고 컴퓨터로 인한 문제는 없었다. 실험 1에서는 2명이 한 대의 컴퓨터를 사용하였고, 실험 2에서는 한 사람이 한 대의 컴퓨터를 사용하였다.

20명이 실험에 참여한 실험 1로부터 대부분의 학생들이 컴퓨터에 집중하고 학생 사이의 상호작용이 일어나지 않는 것에 주목하여, 실험의 초점은 학생과 컴퓨터 사이의 상호작용에 맞추어 진행되었다. 따라서 실험 2에서는 한 학생이 한 대의 컴퓨터를 사용하였다.

중학교 1학년인 실험 1의 경우에는 GSP 사용 방법에 대해 2시간 동안 설명하고 나머지 2시간 씩 두 번에 걸쳐 기하에 관한 추측을 시도하였고, 중학교 3학년에 실시한 실험수업 2의 경우에는 GSP 사용 방법에 대해 2시간 동안 설명하고 2시간 씩 두 번에 걸쳐 기하적 성질에 관한 추측을 시도하였다. 실험 1에서의

수업에서는 원과 비례 또는 원과 직선에 관련 하여 기하적 성질을 추측해보도록 하였으며, 실험 2에서는 삼각형에 관련된 성질을 추측하도록 하였다.

중학교 1학년에게 주어진 문제 상황은 중학교 교육과정에 있는 원과 관련한 내용을 다룬 후 자유롭게 그와 비슷한 다른 기하학적 성질을 추측해볼 것을 요구하는 것이었다. 중학교 3학년의 경우에는 삼각형과 관련한 문제 상황을 주었다. 주어진 문제 상황에 대하여 학생들은 먼저 지필 환경에서 기하적 성질을 추측하고 지필 환경에서는 더 이상 추측할 수 없을 때 GSP 환경에서 탐구하도록 하였다. 그리고 그 결과들을 활동지에 기술하도록 하였다. 이때 증명이 가능한 것은 증명하도록 요구하였다. 그리고 활동지의 마지막 쪽에는 GSP 환경에서 기하적 성질을 더 잘 추측할 수 있었는지, 또 만일 그렇다면 GSP로부터 어떤 도움을 받을 수 있었는지를 기술하도록 하였다.

### 3. 자료 수집과 분석

모든 실험에서 자료는 면담 자료, 필드 노트, 그리고 컴퓨터상에서 활동한 과정을 동영상 캡처하여 저장한 파일을 통하여 수집하였고, 실험 2에서는 비디오 촬영을 함께 하였다.

면담 자료는 실험 도중 또는 실험 후에 반구조화된 면담을 통해서 수집하였다. 면담 내용 중 중요한 것은 학생의 선행학습이 어디까지 진행되었는지를 검토하는 것이었다. 이것은 배우지 않는 내용을 GSP를 이용하여 추측해 보는 것이었기 때문에, 선행학습으로부터의 기억에 의한 것인지 또는 GSP의 특성에서 도움을 얻어 추측할 수 있었는지를 따져보는 것이 중요하였기 때문이다. 다음으로 실험 1과 2에 참여한 학생에게 모두 GSP를 사용한 경험의 유

무를 조사하였다. 학생 중 GSP를 활용해본 사람은 없었다.

학생이 기하적 성질을 추측하는 데 GSP를 어떻게 활용하는지가 중요한 분석 내용이 되기 때문에 분석은 주로 활동지에 기술된 내용, 학생이 컴퓨터를 사용하여 그 마지막 결과가 저장된 GSP 파일, 그리고 동영상 캡처 프로그램인 캠타시아를 이용하여 학생들의 활동 과정을 담은 동영상을 대상으로 이루어졌다. 실험 중에 특이한 사항이 있을 때 바로 학생에게 질문을 통한 면담이 이루어졌고, 이것은 학생이 조작하고 있는 컴퓨터 화면이나 활동지와 견주어 분석하였다. 분석은 영재학생의 특성에 맞추기보다는 GSP 환경의 특징과 그 역할에 맞추었다.

## IV. GSP를 이용한 기하적 성질의 추측

이 장에서는 학생들이 지필 환경에서 한 기하적 성질의 추측 활동과 GSP 환경에서 한 활동을 함께 검토하여 지필 환경과 GSP 환경에서의 추측 활동의 특징, 기하적 성질에 영향을 미치는 GSP 환경의 요인, 학생의 태도 등에 대한 결과를 분석하고 기술한다. 결과를 먼저 기술한 후 그 결과를 도출하게 된 배경이 되는 문제 상황과 학생의 활동 상황을 열거하고 분석하도록 한다. GSP 환경에서의 기하적 성질의 추측 활동의 분석은 주로 실험 1에서 결과를 낸 학생과, 실험 2에서는 추측활동 당시 결석하였던 학생을 제외한 4명에 대해 이루어졌다. 실험 1에 참여한 학생은 학생 a, 학생 b와 같이 알파벳 소문자를 이용하여 표기하고, 실험 2에 참여한 학생은 학생 A, 학생 B와 같이 알파벳 대문자를 이용하여 표기하기로 한다. 학생이 추측한 기하적 성질을 기술할 때 앞에 '(GSP 환경)'를 표기한 것은 학생이 지필 환경에서 하

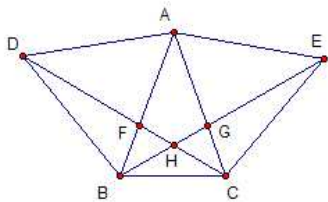
지 못했던 추측을 GSP 환경에서 할 수 있었던 것을 의미한다.

1. 지필 환경과 GSP 환경에서 학생의 추측 활동의 특징

이 절에서는 학생이 지필 환경과 GSP 환경에서 추측한 기하적 성질의 수와 그 성질의 특징, 증명된 성질의 수, 학생 활동의 특징을 논의한다. 이를 위해 실험 2에서의 [문제 상황 2]와 [문제 상황 3]에서의 결과들을 살펴본다.

※ 실험 2에서의 [문제 상황 2]

아래 그림에서  $\triangle ABC$ 는  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이고,  $\triangle ADB$ ,  $\triangle ACE$ 는  $\overline{AB}$ 와  $\overline{AC}$ 를 각각 한 변으로 하는 정삼각형이다. 아래 그림을 이용하여 그림과 관련된 수학적 성질을 예측하고 증명하시오.



[그림 IV -1] 실험 2의 [문제 상황 2]에 주어진 그림

네 학생이 문제 상황 2에서 추측한 것은 다음과 같다.

(1-1) 학생 A

- ①  $\angle BAC = 2\angle BEC$ .
- ②  $\square AHBD$ 는 원에 내접한다.
- ③  $\overline{BE} = \overline{DC} = \overline{AH} + \overline{BH} + \overline{HC}$ .
- ④ (GSP 환경) 점  $A'$ 이 선분  $BC$ 에 대한  $A$ 의 대칭점이면  $\triangle DA'E$ 는 정삼각형이다.

(1-2) 학생 B

- ①  $\angle EHC$ 는  $60^\circ$ 이다.

- ②  $\square AHCE$ 와  $\square AHBD$ 는 원에 내접하는 다각형이다.

- ③  $\angle AHF = \angle FHB = \angle AHG = \angle GHC = 60^\circ$ 이다.

- ④  $\triangle FBH$ 와  $\triangle AEH$ 는 닮은 도형이다.

- ⑤  $\overline{AB} : \overline{AG} = \overline{BH} : \overline{HG}$ 이다.

(1-3) 학생 C

- ①  $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ .

- ②  $\angle FHG = 120^\circ$ 이다.

- ③  $\triangle HBC$ 는 이등변삼각형이다.

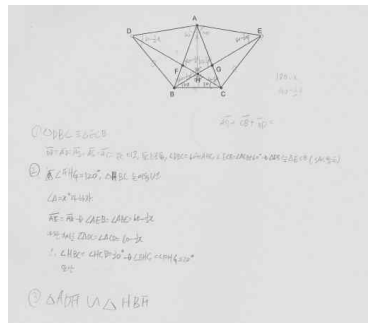
- ④  $\triangle ADF$ 와  $\triangle HBF$ 는 닮은 도형이다.

- ⑤ (GSP 환경)  $\triangle ACE$ 와  $\triangle ADB$ 의 외접원은 점  $H$ 에서 만난다.

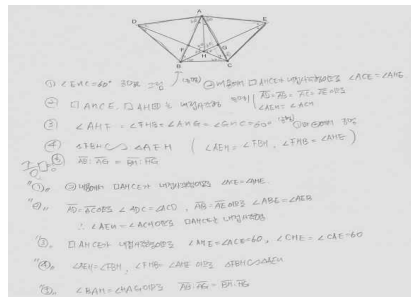
- ⑥ (GSP 환경)  $\triangle BCE$ 와  $\triangle BCD$ 의 외심은  $A$ 이다. 또한  $B, C, D, E$ 는 한 원 위에 있다.

- ⑦ (GSP 환경)  $\overline{BE} = \overline{AH} + \overline{BH} + \overline{HC}$

- ⑧ (GSP 환경)  $D, A, E$ 가 한 직선 위에 있을 때,  $F$ 는  $\overline{AB}$ 의 중점이다. 또한  $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.



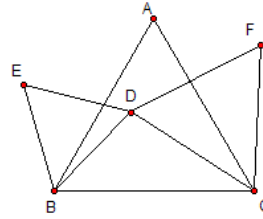
[그림 IV -2] 지필 환경에서 학생 B의 활동



[그림 IV -3] 지필 환경에서 학생 C의 활동

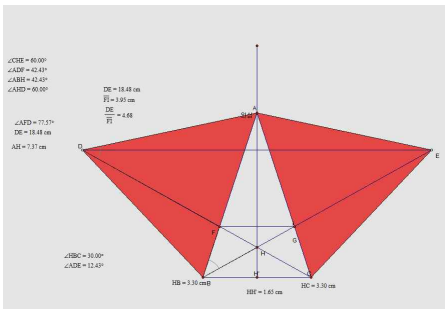
(1-4) 학생 D

- ① 점  $D, B, C, E$ 는 한 원 위에 있다.
- ② 점  $D, B, C, E$ 를 포함하는 원의 중심은  $A$ 이다.
- ③  $\angle FHG = 120^\circ$ .
- ④  $\angle ADC = \angle ABE$
- ⑤  $\angle EBC = \angle DCB = 30^\circ$ .
- ⑥ (GSP 환경) 점  $A$ 가  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 만족하면서 변할 때,  $\overline{CD}$ 와  $\overline{BE}$ 의 교점은 항상 고정되어 있다.



[그림 IV -5] 실험 2의 [문제 상황 3]에 주어진 그림

- ② (GSP 환경) 점  $D$ 가  $\overline{BC}$ 를 반지름으로 하는 원주 상에 놓여 있으면  $\square FAED$ 는 정사각형이다.
- ③ (GSP 환경) 점  $D$ 가  $\overline{BC}$ 의 중점과  $A$ 와 일직선 상에 있을 때  $\square AEDF$ 는 정사각형이다.
- ④ (GSP 환경) 점  $F$ 가  $\overline{DC}$ 의 대칭인 점으로 옮길 경우에도  $\square ACFE$ 는 평행사변형이다.



점 A가  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 만족하면서 변할 때  
 $\overline{CD}$ 와  $\overline{BE}$ 의 교점은 항상 고정되어 있다.  
 →  
 점 A가  $\overline{BC}$ 의 중점과 A와 일직선 상에 있을 때  
 $\overline{BC}$ 와  $30^\circ$ 각을 이루는  $\overline{BE}$ 와  $\overline{CD}$ 를 각각 연장시키면 D가 움직이므로  
 일정한 두 직선의 교점은 고정되어 있다.

[그림 IV -4] GSP 환경에서 학생 D의 활동 모습과 그 결과를 활동지에 기술한 모습

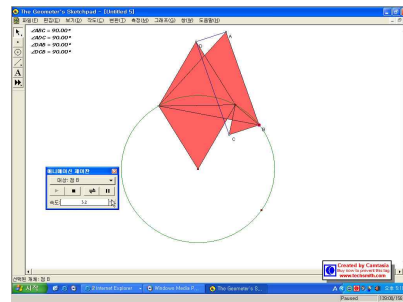
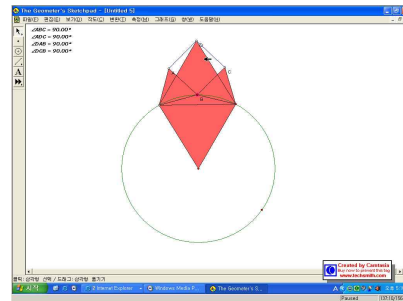
※ 실험 2에서의 [문제 상황 3]

아래 그림은 정삼각형  $\triangle ABC$ 의 내부의 임의의 한 점  $D$ 를 취해서 각각  $\overline{BC}$ 와  $\overline{CD}$ 를 한 번으로 하는 정삼각형을 그린 것이다. 아래 그림을 이용하여 그림과 관련된 수학적 성질을 예측하고 증명하시오.

실험 2에서의 [문제 상황 3]에서 학생들이 추측한 것은 다음과 같다.

(2-1) 학생 A

- ①  $\square AEDF$ 는 평행사변형이다(이때  $\triangle EBA \equiv \triangle FAC$ 를 이용).



[그림 IV -6] 학생 A가 GSP환경에서 결과 ③과 ④를 얻는 모습

(2-2) 학생 B

- ①  $\triangle BEA \equiv \triangle BDC \equiv \triangle AFC$ .
- ②  $\square AEDF$ 는 평행사변형이다.



- ③ (GSP 환경) 점  $D$ 가  $\overline{AC}$  위의 점일 때,  $\triangle BDG$ 와  $\triangle BAG$ 는 닮은 도형이다.
- ④ (GSP 환경) 점  $D$ 가  $\overline{BC}$ 의 수직이등분선 위에 있을 때,  $\square AEDF$ 는 마름모이다.

(2-3) 학생 D

- ①  $\angle EBP = \angle DBC$
- ②  $\triangle EBA \cong \triangle DBC \cong \triangle FAC$ .
- ③  $\square AEDF$ 는 평행사변형이다.
- ④ (GSP 환경) 점  $D$ 가  $\overline{CE}$ 와  $\overline{BF}$ 와 교점과 일치할 때, 점  $A, E, B, C, F$ 는 모두 한 원위에 있다.

위에서의 결과를 보면 실험 1의 문제 상황 2와 3에서 학생들은 지필 환경에서보다 GSP 환경에서 기하적 성질을 적을 때는 한두 개 많을 때는 네 개를 더 추측하여, 모든 학생은 GSP 환경에서 지필 환경에서 추측하지 못했던 기하적 성질을 추측할 수 있었다. (1-2)의 학생 B는 지필 환경에서 성질을 추측하는 데 모든 시간을 소비한 경우였다. (1-3)의 학생 C의 경우에는 지필 환경에서는 4개의 성질을 추측하였으나, GSP 환경에서는 4개를 더 추측할 수 있었다.

GSP 환경에서 학생은 좀 더 어려운 성질을 추측할 수 있음을 알 수 있었다. 앞의 실험 2의 문제 상황의 학생의 활동에서 볼 수 있듯이 주어진 조건은 매우 특수한 경우들을 포함하며 이 경우 지필 환경에서는 상상하기 어렵고 점들을 움직여보기 전까지 추측하지 못했던 것들이다. 그리고 이들의 증명이 대개의 경우 훨씬 어렵다. 특히 (1-3)에서는 학생 C가 지필 환경에서 쉬운 성질을 추측한 반면 GSP 환경에서는 어려운 성질을 추측할 수 있었음을 볼 수 있다. (2-1)의 ③, ④의 경우에도 지필 환경에서 추측한 성질들보다 추측하거나 증명하기가 더 어렵다. GSP 환경에서 추측한 성질이 어렵다고 여기는 이유는 명제 자체가 복잡할뿐더러 주어

진 문제 상황에 제시되지 않은 외접원, 외심, 수직이등분선과 같은 조건을 스스로 주고 그 조건으로부터 나오는 특수한 결과를 기술하고 있기 때문이다.

학생들은 지필 환경에서 먼저 성질을 찾고, 이어 GSP에서 성질을 찾고자 할 때는 모두 주어진 조건을 변경해가면서 성질을 찾고 있음을 볼 수 있는데, 학생들이 GSP 환경에서 이와 같이 특수한 조건을 줄 수 있었던 과정을 좀 더 자세히 살펴보자.

앞에서 주어진 실험 2의 두 가지 문제 상황에서 모든 학생이 점이나 도형을 움직여 가며 주어진 조건을 특수화하거나 일반화하며 새로운 성질을 추측하고 있다. 예를 들면 (1-3)의 ⑧, (2-1)의 ②와 ③, (2-2)의 ③와 ④, (2-3)의 ④는 주어진 문제 상황의 특수한 경우에 해당한다. (1-4)의 ⑥의 경우에는 A가 만족해야 할 새로운 조건을 주고 그 결과를 기술하였는데, 이것은 점 A를  $\overline{BC}$  수직이등분선 상에서 움직여볼 수 있었던 동적 환경이었기 때문에 가능한 것이었다.

(2-1)의 ④의 경우는 주어진 문제 상황에서의 F를  $\overline{DC}$ 의 대칭인 점으로 조건을 변화시켜도 같은 결론을 얻은 경우이다. [그림 IV -6]는 학생 A가 GSP환경에서 결과 ③과 ④를 얻는 모습을 동영상 화면에서 캡처한 것이다. 사실 (2-1)의 ④는 (2-1)의 ③의 결과를 얻고 난 후, 문제 상황에서의 점 D에 해당하는 화면 속의 점 B를 원주 상에서 움직여가며 얻은 것이다. 그리고 학생은  $\square ACFE$ 가 평행사변형이 된다고 기술하였지만 엄밀히 말하면 이 경우엔 직사각형이 된다. 점 B를 움직일 때 처음에는 손으로 드래그 기능을 사용하다 나중에 애니메이션 기능을 통해 관찰하는 것을 볼 수 있었다. 이와 같이  $\triangle BDC$ 의 외접원을 그리고 점 D나 F를 움직일 수 있었던 것은 GSP의 동적 환경의 결

과라고 볼 수 있으며 그 작도의 결과로 나타나는 정확한 정사각형 또는 직사각형의 모습이 결과 ③과 ④를 얻는데 도움을 준 것으로 볼 수 있다.

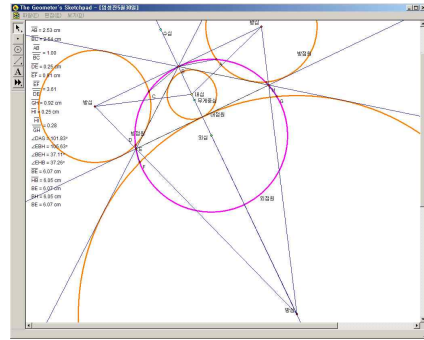
증명의 경우 학생들은 GSP 환경에서 추측한 성질보다는 지필 환경에서 추측한 성질을 더 많이 증명하였다.

학생들은 지필 환경에서 추측한 성질은 거의 증명한 반면, GSP 환경에서 추측한 성질은 증명하지 못한 것이 많았다. (1-3)의 학생 C의 경우 ②의 증명이 불충분했고, ③만을 증명하지 못했지만 GSP 환경에서 도출한 ⑤, ⑥, ⑦, ⑧을 모두 증명하지 못했다. 또한 (1-4)의 ⑥, 그리고 (2-1)의 ④, (2-2)의 ④는 증명되지 않은 채 주어졌다. 학생들은 자신의 추측이 옳음을 점을 움직임으로써 기하도형을 움직여 주로 확인함을 볼 수 있었다.

GSP 환경에서 학생들은 주어지지 않은 문제를 자유롭게 탐구함을 관찰할 수 있었다.

아래 그림([그림 IV -7] 참조)은 (2-2)에서 학생 B가 수업 시간에 주어지지 않은 문제를 탐구하는 장면을 보여주는 것이다. 학생 B는 그 결과를 기술하지는 않았지만 삼각형과 방심 사이의 관계를 알아보았다. 이와 같이 GSP 환경에서는 주어지지 않는 문제를 탐구할 수도 있고 앞서 언급한 바와 같이 주어진 조건을 좀더 자유롭게 바꾸어 탐구할 수 있었음을 알 수 있다. 그러나 반면에 학생 중에 GSP를 이용하여 장난스런 그림을 그리거나 인터넷을 하는 경우도 포착되었다. 아래 그림([그림 IV -7] 참조)에서도 화면의 크기에 상관없이 큰 도형을 그려 탐구하는 것을 볼 수 있다.

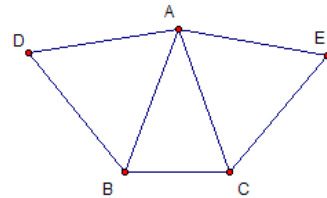
한편, 지나치게 개방적인 문제 상황에서는 탐구 활동이 미약함을 관찰할 수 있었는데 이를 논하기 위해 실험 2의 [문제 상황 1]과 [문제 상황 4]의 경우를 살펴본다.



[그림 IV -7] 학생 B가 주어지지 않은 문제를 GSP환경에서 탐구하는 모습

※ 실험 2의 [문제 상황 1]

아래 그림에서  $\triangle ABC$ 는  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변 삼각형이고,  $\triangle ADB, \triangle ACE$ 는  $\overline{AB}$ 와  $\overline{AC}$ 를 각각 한 변으로 하는 정삼각형이다. 아래 그림을 이용하여 그림과 관련된 수학적 성질을 예측하고 증명하시오.



[그림 IV -8] 실험 2의 [문제 상황 1]에 주어진 그림

(3-1) 학생 A

①  $\square DBCE$ 는 원에 내접한다.

(3-2) 학생 C

①  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$

②  $\square DBCE$ 는 사다리꼴이다.

③  $\overline{DB}$ 의 연장선과  $\overline{CE}$ 의 연장선이 이루는 각과 각 A의 합은  $120^\circ$ 이다.

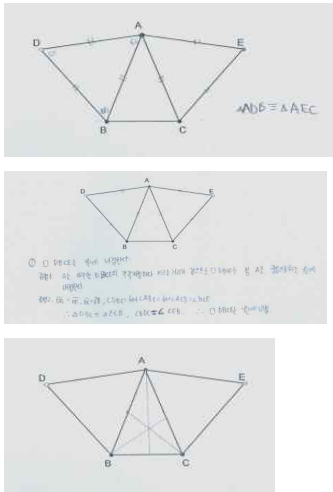
(3-3) 학생 D

①  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$

※ 실험 2의 [문제 상황 4]

삼각형과 정삼각형과 관한 성질을 적당한 도형을 그려 추측해보시오.

실험 2의 [문제 상황 1]에서 학생 B는 단순히 그림과 같이 보조선만을 긋고 아무런 결과를 기술하지 않았다. 학생 C는 ②의 증명을 불완전하게 했고 ③의 경우에는 증명하지 못했다.



[그림 IV -9] 차례대로 학생 B, C, D가 [문제 상황 4]의 결과를 기록한 모습

이 문제 상황에 대한 학생들의 활동 결과는 [문제 상황 2]나 [문제 상황 3]에서의 결과와 비교할 때 매우 적다고 볼 수 있는 것으로, GSP 환경에서의 문제 상황에는 구체적인 여러 가지 조건을 주어서 기하적 성질을 추측하도록 하는 것이 풍부한 결과를 얻을 수 있음을 시사한다. 실험 2의 [문제 상황 4]에서 학생들이 기술한 결과는 없었다. 이 문제를 탐구할 때 학생들은 막연해하였고 곤란한 표정을 지었다. GSP 환경에서는 앞에서 살펴본 바와 같이 주어진 조건을 변형하여 새로운 성질을 추측하는 것이 용이하므로, 처음부터 너무 단순하기보다는 구체적인 조건을 갖는 문제 상황을 줄 필요가 있음을 알 수 있다.

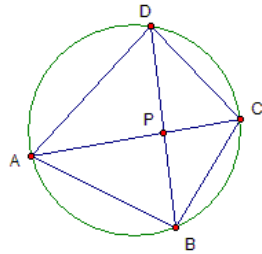
## 2. GSP 환경에서 학생의 추측 활동을 촉진하는 요인

여기에서는 GSP 환경에서 학생이 기하적 성질을 보다 활발하게 추측하는데 영향을 미치는 요인을 살펴보고자 한다.

먼저 GSP의 측정과 계산 기능은 기하적 성질의 추측에 요긴하게 사용됨을 알 수 있었는데 실험 1의 [문제 상황 3]을 살펴보자.

### ※ 실험 1의 [문제 상황 3]

그림과 같이 원 O를 그리고 원 위의 점 A, B, C, D를 만들자. 이들을 이어 만든 도형에서 선분의 길이나 각의 크기 등과 관련한 규칙을 찾고 증명해보자.



[그림 IV -10] 실험 1의 [문제 상황 3]에 주어진 그림

#### (4-1) 학생 a의 추측

- ①  $\triangle ABP \cdot \triangle DCP = \triangle ADP \cdot \triangle BCP$
- ②  $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{PD}$

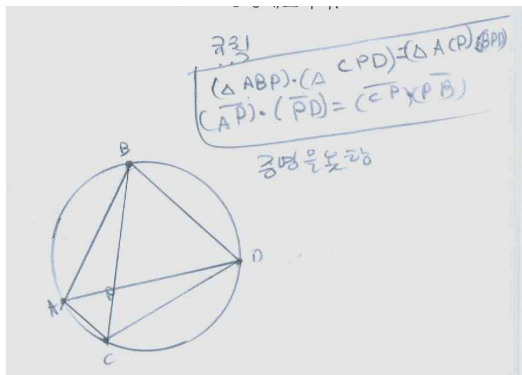
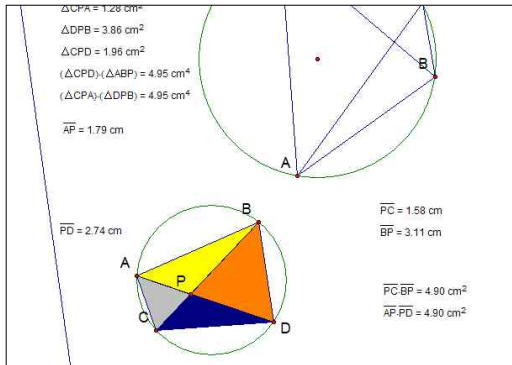
#### (4-2) 학생 b의 진술

다른 학생 b는 계산 기능과 관련하여 아래와 같이 진술하고 있다.

지정된 정확한 계산이 불가능했는데  
GSP를 이용하자 공략한 계산이 가능했다

[그림 IV -12] GSP의 계산 기능에 대한 학생 b의 기술

학생 a는 주어진 문제 상황에서 ①의 성질을 측정 기능과 계산 기능을 이용하여 추측할 수



[그림 IV -11] 학생 a의 GSP환경에서의 활동 모습과 그 결과를 활동지에 기술한 모습

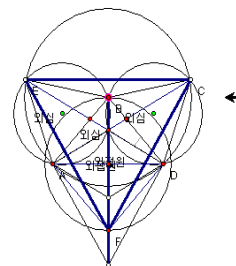
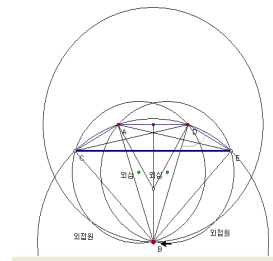
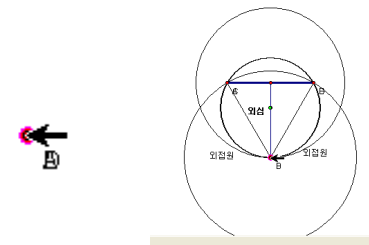
있었다. 또 ②의 성질도 역시 측정 기능과 계산 기능을 이용하여 추측할 수 있었다. 그러나 증명하지는 못했다.

사전 면담에서 학생들은 중학교 3학년에 배우는 내용에 대해서는 몇몇 학생이 선행학습을 한 적이 있지만 구체적으로 기억나지는 않는다고 대답하였다. 결과적으로 학생들은 선행학습에서 다루었음직한 교과서의 내용에 있는 성질은 한 가지인 (4-1)의 ②, 그리고 교과서에 없는 결과 (4-1)의 ①을 찾았다. ①을 찾은 학생은 2명, ②를 찾은 학생은 1명이었다. (4-1)의 학생 a는 주어진 문제 상황에서 기본적으로 점과 원, 선분을 그리는 것 외에 측정 기능을 곧잘 사용하였는데, 결정적으로 사용한 기능은

넓이를 측정해보고 도형을 움직여 같은 넓이가 유지되는 것에서 ①의 성질을 발견하였다. 이것은 측정의 기능이 기하적 성질을 추론하는데 유용한 도구가 될 수 있음을 보여준 것이다. 또 ②의 성질도 역시 측정 기능과 계산 기능을 이용하여 추측할 수 있었다. (4-2)의 학생 b의 진술에서도 GSP를 이용한 활동 과정에서 계산 기능을 중요하게 사용했음을 알 수 있다.

또한 드래그의 기능이 성질의 추측과 증명에 많이 사용됨을 볼 수 있었다.

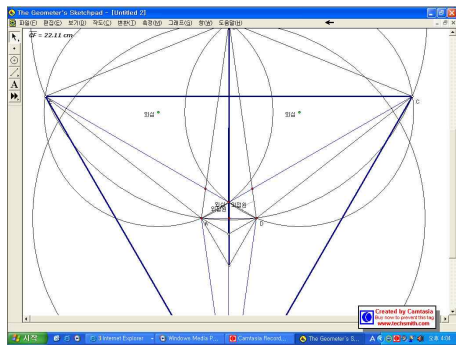
아래 그림은 (1-1)의 학생 A가 점 B를 움직여 가면서 ④를 추측할 때의 과정을 동영상 화면을 캡처한 것이다. 실제로 드래그의 기능은 성질의 추측과 증명에 항상 사용됨을 볼 수 있었다.



[그림 IV -13] 학생 A가 GSP환경에서 드래그의 기능을 활용하는 모습

추측 활동을 촉진하는 또다른 요인으로 학생들이 GSP 환경에서 화면을 충분히 넓게 사용할 수 있었던 점을 들 수 있다.

지필 환경과 달리 GSP 환경은 공간의 제한에서 자유롭다고 할 수 있다. 드래그의 기능을 사용하여 새로운 도형이 나타날 때, 그 도형이 크면 공간이 저절로 늘어나 그 도형이 그려지기도 하지만, 학생이 적극적으로 'Alt' 키를 눌러 화면 전체를 끌어 옮겨 필요한 그림을 그리기도 하였다. 이와 같은 방법으로 지필 환경에서 보통 사용하는 크기보다 훨씬 큰 공간을 사용할 수 있었다. 아래 그림은 캄타시아 프로그램으로 저장한 동영상 화면을 캡처한 것으로, 오른쪽 스크롤바를 보면 (1-1)의 학생 A가 ④를 탐구하는 과정에서 주어진 화면보다 훨씬 큰 도형을 그릴 수 있었음을 보여준다.

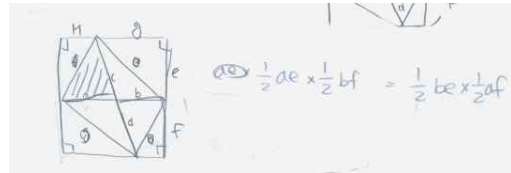


[그림 IV -14] 학생 A가 GSP환경에서 컴퓨터 화면보다 큰 공간을 사용하는 모습

### 3. 추측 활동에 대한 학생의 태도

학생들에게 있어서 기하적 성질의 발견은 증명을 동반하거나, 또는 GSP 환경에서의 역동적 도형을 이용하여 추측을 확신하는 정당화로 이루어지는데, 일관되게 관찰되는 것은 학생들이 기하적 성질을 발견할 때, 훨씬 흥분하며 기뻐한다는 것이다. 일례로 실험 1에서의 결과인

(4-1)의 학생 a가 발견한 ①은 20명 중에 오직 한 사람이 발견하였고, 발견자는 증명할 수 없었다. 그것을 증명한 학생도 또한 오직 한 사람이었고 증명은 아래 그림에서와 같이 한 변이 선분 a와 b에 수직인 직사각형으로 원 안의 사각형을 덮음으로써 그림([그림 IV -15] 참조)에 주어진 식과 같이 간명하게 할 수 있는 재치 있는 것이었다 (그림에서는 표시되지 않았지만 학생은 a와 b로 만들어지는 대각선과 e와 f로 만들어지는 직사각형의 한 변이 수직임을 가정하고 있다). 그러나 증명을 한 학생 c는 발견한 학생만큼 즐거운 표정이 아니었으며, 반면 학생 a는 하루 종일 들뜬 분위기 속에서 보냈다.



[그림 IV -15] 학생 a의 결과에 대한 학생 c의 증명

또한 발견의 기쁨을 동료와 나누고자 하는 것들이 관찰된다. (1-1)의 학생 A가 ④를 발견하고 나서는 “오!, 엄청난 사실을 발견했어, 이거 봐봐.” 와 같이 말함으로써 발견의 기쁨을 동료와 나누고자 함을 볼 수 있었다. 이와 같은 현상은 가끔씩 되풀이되었다.

## V. 논의 및 제언

앞에서 살펴본 실험 결과를 바탕으로 기하적 성질을 추측하는 데 있어서 GSP 환경과 지필 환경에서의 몇 가지 차이점과 교수학적 시사점을 중심으로 살펴보고자 한다.

학생들은 일반적으로 주어진 수학적 성질을

이해하고, 문제를 해결하는 학습에 익숙해 있으며, 새로운 수학의 성질을 스스로 발견하는 경험은 가지고 있지 않았다. 그러나 실험 수업에서 활동한 학생들의 결과를 보면 GSP 환경에서 기하적 추측 활동을 활발하게 하는 것을 볼 수 있다. 지필 환경에서 추측하지 못한 기하적 성질을 GSP 환경에서 할 수 있는 경우가 많고, 특히 GSP 환경에서 추측한 기하적 성질들은 지필 환경에서 추측한 성질보다 상상하기 어렵고, 복잡한 경우가 많았다.

한편, 학생들은 GSP 환경에서 추측한 성질보다 지필 환경에서 추측한 성질을 더 잘 증명하였다. 이것은 위에서 서술한 바와 같이 GSP 환경에서 좀 더 어려운 성질을 추측하였기 때문으로 볼 수 있다. 이 경우 주로 GSP 환경에서 자신이 추측한 성질이 참이 되는지는 도형을 움직여가며 확인하는 경우가 많았다. De Villiers, M. D.(2007)는 학생들이 스스로 추측한 성질을 GSP 환경에서 드래그를 통해 사실임을 확인한 후에는 증명할 필요성을 느끼지 못함을 지적한 바 있다. 따라서 교사는 이 경우에 반드시 증명이 필요함을 주지시킬 필요가 있다. 실험 수업에서 학생들은 상당수의 성질을 증명할 수 있었다. 예를 들어 실험 2의 [문제 상황 2]와 [문제 상황 3]의 경우에 학생들은 (1-1)의 ④, (2-1)의 ②, ③, (2-2)의 ③, (2-3)의 ④와 같은 것들을 증명할 수 있었다.

학생들이 지필 환경에서 미처 추측하지 못한 기하적 성질을 GSP 환경에서 할 수 있도록 촉진하는 요인은 몇 가지로 간추릴 수 있다.

첫째, GSP 환경에서는 보조선을 긋거나 주어진 점을 드래그하여 새로운 도형을 변형하면서 변하지 않는 성질을 찾기가 더욱 쉬웠기 때문이다. 이와 같은 사실은 Cabri를 가지고 실험하였던 Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O.(2002)의 결과와도 일치한다. 특히

Oivero(2002)가 분류한 세 가지 드래그 유형 중 새로운 모양을 탐구하기 위해 무작위적으로 움직여보는 'Wandering dragging'과 특별한 모양을 얻기 위해 주의를 기울여 움직여보는 'Guided dragging'이 주로 나타났고, 초기 조건을 만족하는 특정 성질을 훼손하지 않도록 불필요한 주의를 기울이는 'Lieu muet dragging'은 나타나지 않았다.

둘째, GSP 환경에서 학생들은 측정과 계산 기능을 이용하여 기하적 성질을 추측하는데 도움을 받을 수 있었다. GSP의 측정 기능은 또한 연역적 추론에 유용하며(Hollebrands, 2002), 수학적 사실의 발견과 이미 알고 있는 내용의 이해에 도움이 된다(김남희, 2002)는 결과와 아울러 추측에도 유용함을 알 수 있었다.

셋째, GSP 환경에서 학생들은 주어진 조건을 비교적 자유롭게 변화시켜감으로써, 본래 주어진 조건보다 강화되거나 일반화된 조건에서 새로운 기하적 성질을 추측할 수 있었다. 이것은 문제 제기(problem posing)를 위해서도 GSP가 유용하게 사용될 수 있음을 시사한다. 한편 이와 같은 현상은 지필 환경에서 추측한 기하적 성질보다 GSP 환경에서 추측한 기하적 성질이 보다 복잡하고 어려운 이유가 되기도 한다. 또한 학생은 자신이 추측한 성질에 대해 곧바로 증명을 시도하지만 증명하기에 꽤 어려운 성질들도 나타날 수 있음을 인지할 필요가 있다. 교사는 학생이 추측한 여러 가지 기하적 성질이 수업 시간에 모두 해결할 수 없을 수 있음을 인지할 필요가 있다.

넷째, GSP 환경에서 학생들은 공간에 제약을 받지 않고 탐구할 수 있었다. 지필 환경에서는 주어진 종이의 크기 내에서 도형을 그려 탐구할 수 있지만, GSP 환경에서는 컴퓨터 화면을 얼마든지 상하 좌우로 옮겨 확장시킬 수 있기 때문이다. 이와 같은 것은 학생이 그려야

하는 도형이 뜻하지 않게 많은 공간을 필요로 할 때 도움이 되었다.

지금부터는 두 실험을 바탕으로 도출할 수 있었던 것으로 상호작용, 문제 제작, 학생의 태도 등과 관련한 몇 가지 교수학적 유의점에 대해 살펴본다.

실험에 참여한 두 개의 반은 학업 성취도가 높은 학생들로 구성된 학급이었지만, 중학교 1학년의 경우 GSP의 기본 기능을 배우는 데 2시간은 부족하였다. 중학교 3학년의 경우에는 2시간이면 넉넉하였다. 이것은 실험 2에 참여한 3학년이 5명이었고, 다른 실험반보다 상대적으로 좀 더 우수한 학생들로 구성되어서일 수도 있다. 실험 1과 2에 참가한 모든 학생들은 사전 면담 조사에서 도구를 이용한 탐구 수업을 한 경험이 전혀 없었다. 이러한 상황을 감안하면 중학교 1학년의 경우에는 도구의 활용에 대한 충분한 안내를 할 필요가 있고, 도구를 이용하여 어떻게 탐구 활동을 할 수 있는지에 대한 구체적인 안내가 필요함을 알 수 있다.

실험 2의 경우에서처럼 학생 1인당 한 대의 컴퓨터를 사용하게 되면 학생 사이의 의사소통은 거의 일어나지 않음을 관찰할 수 있었다. 실험을 하기 전에 옆 학생과 협의하여 성질을 탐구할 수 있음을 주지시켰지만 상호 작용은 거의 일어나지 않았다. 바로 이웃하여 컴퓨터 책상이 위치하였기 때문에 언제라도 상호 작용이 일어날 가능성이 있었지만 그렇지 않았다. 자신이 발견한 것을 옆 학생과 함께 나누고자 할 때와 자신의 추측 활동에서 전혀 진전이 없는 경우에만 옆의 학생 것을 보고 이해하여 뒤따라 정리하는 수준에서 상호작용이 일어났다. 실험 1에서 두 학생이 한 대의 컴퓨터를 사용한 경우에도 상호작용은 별로 일어나지 않았다. Crook(1994)와 Kieran & Dreyfus(1998)와 같은 여러 논문에서 학생들의 상호작용을 다룬 바가 있지만, Teasley & Roschelle(1993)는 상호

협력적 학습이 항상 일어나는 것도, 예측 가능한 것도 아니어서 상호작용을 위한 노력을 하여야 한다고 지적한 바 있다. 이 실험을 통해서도 상호작용과 의사소통이 활발한 학습을 도모할 필요가 있을 때는 실제로 상호작용을 위한 노력을 할 필요가 있음을 알 수 있었다.

GSP 환경에서 기하적 성질을 추측해보는 수업을 할 때 교사가 학생에게 적당한 형태의 문제를 생각해보는 것은 중요하다. Arzarello와 (2002)는 역동적 기하환경에서 문제의 제작이 매우 중요함을 지적한 바 있고, Laborde(2001)도 Cabri 환경에서의 유형이 다른 문제가 학생에게 달리 영향을 미침을 논한 바 있는 것처럼, 추측을 촉진하기에 적절한 문제는 어떠한가 하는가 알아보는 것은 의미 있다. 문제 제작자는 너무 조건이 많이 주어져 있는 문제 상황에서는 많은 성질이 추측되기 힘들다고 생각할 수 있고, 조건이 많이 주어질수록 많은 힌트가 주어지는 것으로 생각되어 조건을 생략하여 자유롭게 학생 스스로 보조선이나 그 밖의 조건을 주어 탐구하기를 바랄 수 있다. 그러나 너무 조건이 주어지지 않은 소박한 상황에서는 학생들의 사고 활동이 현저히 미약함을 관찰할 수 있었다. 이것은 실험 2의 [문제 상황 4]인 “삼각형과 정삼각형과 관한 성질을 적당한 도형을 그려 추측해보시오.”와 같은 지나치게 개방적인 문제 상황에서, 학생들이 기술한 기하적 성질은 없었던 데서도 드러난다. 반면에 적당한 조건이 주어진 [문제 상황 2]나 [문제 상황 3]에서 학생들의 추측 활동은 활발했으며, 스스로 주어진 조건을 변화시켜 가면서 새로운 문제 상황을 만들어 추측 활동을 하였다. 따라서 문제 상황을 구성할 때는 적당한 조건을 주고, 또한 주어진 조건을 학생들이 변화시켜 사용하기 쉽도록 하는 것이 추측 활동을 활발하게 도울 수 있음을 시사한다.

학생들은 GSP를 활용한 탐구 수업에 흥미를

나타내었고 매우 인상 깊게 수업을 받아들였다. 자신이 또는 동료가 새로운 수학적 성질을 발견하는 것에 큰 감동을 받았다. 관찰을 통해 보았을 때 기하적 성질을 발견한 학생은 하루 종일 들뜬 기분을 유지하였다. 본인이 찾은 기하적 성질에 대해 애착을 가지고 있었으며, 대단한 자부심을 갖는 것을 볼 수 있었다. 그런데 그 정리를 유일하게 증명할 수 있었던 학생에게서는 그것을 볼 수 없었다. 학생들은 자신이 기하적 성질을 발견할 경우에는 신기해하고 다른 사람과 그 기쁨을 함께 나누고자 하였지만, 이미 발견한 것을 증명한 경우에는 발견할 때처럼 신기해하지 않았다. 이것은 학생에게 있어 발견이 주는 기쁨이 증명이 주는 기쁨보다 큰 것임을 시사한다. 학교 현장에서 학생들은 이미 주어진 문제의 해결이나 증명을 주로 경험하기 때문에, 증명을 하는 것은 새로운 일이 아니며, 수학의 성질을 찾는 것은 수학자들이 하는 것쯤으로 생각하기 때문에 이와 같은 현상이 나타난다고 추측된다. 그러한 점에서 학교 수학에서의 추측을 통한 수학적 사실의 발견 활동은 장려해야 할 필요가 있다. PISA와 같은 국제학업성취도 비교 연구 결과를 보면, 우리나라 학생들은 수학 성취도에서 최상위권을 차지하고 있음에도 수학에 대한 자신감이 상대적으로 낮은 수준에 머물고, 특히 초등학교 보다 중학교로 올라갈수록 성적이 우수한 학생들의 학습 흥미가 오히려 낮아지며, 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 월등히 높게 나타난다(이미경 외, 2004). 이러한 측면에서 보면 GSP와 같은 역동적 기하 소프트웨어의 적절한 활용은 학생이 발견의 기쁨을 줄 수 있게 하는 대안이 될 수 있다.

우리의 수학과 교육과정에서는 교수·학습에서 교구나 컴퓨터와 같은 공학을 사용하기를 권장하고 있지만 현실적으로는 그렇게 많이 활용

되고 있지 않다. 그러나 실험을 통해서 보면 공학을 사용하여 탐구 중심, 발견 중심의 수업을 할 수 있고, 학생이 즐거워하는 수업을 할 수 있음을 알 수 있다. 실험의 결과는 학업 성취도가 높은 영재학생들을 대상으로 한 것이기 때문에 그 결과를 일반화하는 데는 제한점이 있으나 GSP 환경의 특징을 잘 드러내주고 있다.

## 참고문헌

- 강순자·고상숙(1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하학습자료 개발 : GSP를 이용하여 정다면체 구성. 한국수학교육학회지 시리즈 A<數學教育>, 제38권, 제2호, 179-187.
- 계영희·김종민(2008). GSP를 활용한 한국 전통문양의 테셀레이션 작도. 한국수학사학회지 21(2), 71-80
- 교육부 (1997). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8]), 교육부.
- 교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2007-79호 [별책 8]), 교육인적자원부.
- 김남희(2002). '문제해결' 관점에서의 GSP 활용. <학교수학> 제4권, 제1호, 111-125.
- 김부윤·이영숙·김현구(2003). GSP4를 이용한 이차곡선과 Cycloid에 관한 지도 방안. 한국수학교육학회지 시리즈 E<數學教育 論文集>, 제15집, 261-271.
- 남선주(2006). 역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 류성림(1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.
- 신양재·심광보·이재훈(1999). GSP를 활용한 열린 기하 수업에 관한 연구. 한국수학교육



- 학회지 시리즈 E: 수학교육논문집. Vol. 8. pp. 303-315.
- 우정호(1994). 증명 지도의 재미. **대한수학교육학회 논문집**. 4(1), 3-24.
- 우정호(2002). **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부.
- 이미경 외(2004). **PISA 2003 결과 분석 연구. 한국교육과정평가원 연구보고 RRC 2004-2-1**.
- 이창연 · 황우형(2010). 반힐레 이론과 GSP를 활용한 중학교 기하영역에 관한 연구, -8-나 단계의 사각형의 성질을 중심으로-, 한국수학교육학회 시리즈A<數學教育>, 49(1), 85-109.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O.(2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Bennett, D.(1997). *Exploring geometry with the geometer's sketchpad*, Key Curriculum Press.
- Choi-Koh, S, S. (1999). A Student's Learning of Geometry Using the Computer. *Journal of Educational Research*, 92(5), 301-311.
- Christou, C., Mousoulides, D., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen-Norway, Vol. 2, pp 215-222.
- Crook, C. (1994). *Computers and the collaborative experience of learning*. London:Routledge.
- De Villiers, M.D. (2007). Proof in dynamic geometry. *Proceedings of the Ninth International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project*, University of North Carolina at Charlotte, USA.
- Dunham, P. H., & Dick, T. P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, 87, 440-445.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Monograph No. 3 of the Journal for Research in Mathematics Education*. reston, VA: NCTM
- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A.(1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*(pp. 351-368). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Healey, L.(2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interaction with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 1, 103-117.
- Hollebrands, K.(2002). The role of a dynamic software program for geometry in high school students developing understandings of geometric transformations. In D. Mewborn(Ed.), *Proceedings of the 24th PME-NE Annual meeting*, 695-706.
- Jiang Z.(2008). Explorations and Reasoning in the Dynamic Geometry Environment. In Yang, W. C., Majewski, M. & Alwis T. D.(Eds), *Proceedings of the 13th Asian Technology Conference in Mathematics(ATCM2008)*. Suan Sunandha Rajabhat University. ATCM, Inc.
- Kieran, C., & Dreyfus, Y.(1998). Collaborative versus individual problem solving: entering another's universe of thought. In A. Olivier & K. Newstead(Eds.), *Proceedings of PME22* (Vol.3, pp. 112-119). Stellenbosh.

- Laborde, C.(2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Leung, A.(2003). Dynamic geometry and the theory of variation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox(Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 197-204.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- 구광조·오병승·류희찬(역) (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙(역). 학교수학을 위한 원리와 기준. 서울: 경문사.
- Olive J.(1998). Opportunities to explore and Integrate Mathematics with the Geometer's sketchpad, In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*(pp. 395-417). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Olivero, F.(2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Ph.D. dissertation, University of Bristol, Graduate School of Education, Bristol, UK.
- Pressini, D. and Knuth, E. J.(2005). The role of technology in representing mathematical problem situations and concepts. *Technology-supported mathematics learning environments*. 67th yearbook, Masalski, W. and Elliot, P. (Eds.), pp. 277-290, Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2005.
- Schmidt, W.(2005). The Role of Curriculum. *The Professional Journal of the American Federation of Teachers*. Vol. 29, No. 3, (pp. 11-13). Washington, DC: American Educator.
- Teasley, S. D., & Roschelle, J. (1993). Constructing a Joint Problem Space: the Computer as a Tool for Sharing Knowledge. In S. P. Lajoie & S. J. derry(Eds.), *Computers as Cognitive Tools* (pp. 229-258). London: Chapman & Hall.

# A Study on Students' Conjecturing of Geometric Properties in Dynamic Geometry Environments Using GSP

Son, Hong Chan (Chonbuk National University)

In this paper, we investigated how the GSP environments impact students' conjecturing of geometric properties. And we wanted to draw some implication in teaching and learning geometry in dynamic geometric environments. As results, we conclude that when students were given the problem situations which almost has no condition, they were not successful, and rather when the problem situations had appropriate conditions students were able to generate many conditions which were not given in the original problem situations, and consequently they

were more successful in conjecturing geometric properties. And the geometric properties conjectured in GSP environments are more complex and difficult to prove than those in paper and pencil environments. Also the function of moving screen with 'Alt' key is frequently used in conjecturing geometric properties with functions of measurement and calculation of GSP. And students felt happier when they discovered geometric properties than when they could prove geometric properties.

\* key words : conjecturing(추측), geometric properties(기하적 성질), GSP, dragging(끌기), measurement(측정), calculation(계산)

논문접수 : 2011. 2. 11

논문수정 : 2011. 3. 3

심사완료 : 2011. 3. 11