대한수학교육학회지 <학교수학> 제 13 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.13, No.1 19-36. Mar. 2011

역동적 기하 환경에서 비례를 이용한 중학교 함수의 작도1)

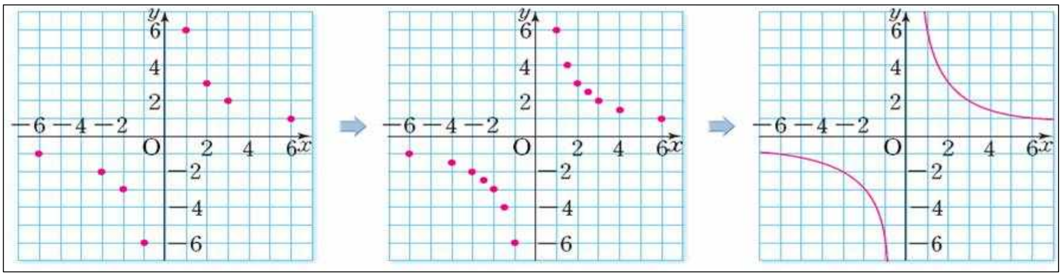
류 희 찬* · 윤 옥 교**

본 연구는 중학교 학생들에게 닮은 삼각형의 대응변 사이에 성립하는 비례적 성질에 기초하여 함수를 작도할 수 있는 기회를 제공함으로써 대수적 함수와 그것의 기하학적 성질에 관한 학생들의 직관을 촉진시키기 위한 것이다. 또한, 학생들이 선택한 작도 방법에 관한 정당화의 과정을 강조함으로써 연역적 추론능력을 향상시키고자 하였다. 이 예비 연구의 결과로서 학생들이 함수를 작도하는 과정에서 나타나는 사고 과정의 특징과 교사의 역할에 관해 기술하였다.

I. 서론

1. 연구의 목적과 필요성

우리나라 중학교 수학 교실에서 함수의 그래프를 그리는 일반적인 과정은 함수식이 주어지면 대수적인 계산을 통해서 몇 개의 함숫값을 얻고 좌표평면 상에 x와 y의 값을 하나씩 대응시킴으로써 순서쌍을 표시한다. 그 후에 정의역을 점점 확장해가면서 그래프의 모양이 어떻게 될지 추측하는 방식이다. 이와 같이 함수의 그래프를 그리는 데 있어서 대수적인 계산에 의존해서 몇 개의 순서쌍을 구하고 이후의 그래프는 추측에 의존하는 전통적인 접근 방법만으로는 학생들이 함수에 관한 직관을 획득하는 데 한계가 있다(Coulombe & Berenson, 2001; 이화영 · 류현아 · 장경윤, 2009에서 재인용). 그리고 대수적인 좌표 값을 이용해서 좌표평면 상에 함수의 그래프를 정확하게 그리는 일 또한 쉽지 않은 것이 현실이다. 그래서 대부분의 경우에는 [그림 I -1]과 같이 좌표평면상에 비교적 쉽게 점을 찍을 수 있는 제한된



[그림 I -1] $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프 지도 (박영훈, 2009: 148)

* 한국교원대학교(hclew@knue.ac.kr)
** 한국교원대학교 대학원(okyoyoon@hanmail.net)
1) 본 연구는 2010년 한국교원대학교 기성회비 연구비 지원으로 이루어졌음

경우를 몇 가지 다루게 된다. 이러한 과정에서 함수의 그래프를 그리는 일은 학생들이 함수의 다양한 속성을 경험할 수 있는 흥미로운 과정이 아닌 또 하나의 지루하고 어려운 과정으로 인식되기 쉽다. 또한 이러한 과정만으로는 학생들이 함수의 중요한 특징 중의 하나인 독립변수와 종속변수 간의 역동적인 관계(김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥, 2006)를 이해할 기회를 얻기는 어렵다고 볼 수 있다. 이것은 함수가 원래 과학과 사회의 역동적인 현상을 모델링하고 모델링하는 과정에서의 직관과 관계를 파악하는 능력을 배양하기 위한 토대가 되는 중요한 수학적 개념이라는 것을 생각해볼 때 매우 심각한 현상이라고 볼 수 있다. 또한, 역동적 기하환경에서 분석법을 활용한 증명방법에 관한 연구(남선주,2006; 정수진,2007)와 비례관계를 통한 함수의 도입을 주장한 연구(장혜원, 2003)가 있으며 학생들이 함수를 학습하는 데 있어서 갖게 되는 인식론적 장애 중에서 변화현상을 관찰하면서 변하는 대상이 무엇인지, 그 대상을 변하게 하는 것이 무엇인지 명확히 파악하지 못하는 경향이 있다고 주장한 연구(김남희 외, 2006)등이 있다.

그러나 함수의 그래프를 지도하는데 있어서 비례와 역동적 기하환경, 분석법을 기반으로 한 실질적인 사례연구는 미미한 실정이다. 이에 본 연구에서는 함수의 그래프를 지도하는데 있어서 계산과 대응에 기초한 전통적인 대수적 지도 방법보다 비례 관계가 기하에서의 닮음 관계를 이용하여 변수 사이의 관계를 드러낼 수 있는 강력한 도구가 된다는 기존의 연구(장혜원, 2003)를 바탕으로 비례와 작도의 방법을 이용하여 변수들 간의 역동적인 관계를 인식하고 학생들의 기하학적인 직관력을 촉진시킬 수 있는 함수 지도 방법의 새로운 가능성을 살펴보고자 한다. 즉 그동안 학생들에게 있어서 작도와 닮은 삼각형간의 대응하는 변의 길이의 비와 같은 내용은 기하의 영역으로, 함숫값을 구하고 이 순서쌍을 좌표평면에 나타내는 것은 대수적인 영역으로서 별개의 것으로 인식되었었으나 본 연구를 통해서 기하와 대수 영역의 연결성을 경험하고 그 과정에서 함수의 역동적인 속성을 경험하게 될 수 있을 것으로 기대한다. 또한, 우리는 학생들이 이번 활동을 통해서 학교수학교육의 중요한 목표 중의 하나인 탐구적 직관 능력과 연역적 추론 능력을 향상시킬 수 있을 것으로 기대한다.

그리고 함수의 관계식으로부터 비례식을 이끌어내는 과정에서는 분석법을 사용하였는데 이는 구하고자 하는 것(y)을 이미 구한 것으로 가정하고 식의 변형을 진행하기 때문에 불완전 분석(한인기·꼴랴긴,2006; 한인기, 2010에서 재인용)이라고도 할 수 있다. 따라서 분석법은 지필환경과 기하환경을 이어주고 작도에 있어서 결정적인 아이디어를 제공해주는 역할을 할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구문제

본 연구에서는 중학교 3학년 학생들이 역동적 기하환경인 GSP상에서 비례식을 활용한 기하학적인 작도활동을 통해 $y=\sqrt{x}$와 $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$의 그래프를 그리는 과정을 기술함으로써 이 때 나타나는 학생들의 사고과정의 특징과 교사의 역할을 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

본 연구의 목적은 역동적 기하환경인 GSP상에서 분석법을 바탕으로 한 기하학적인 작도활동을 통해 함수의 그래프를 그려봄으로써 함수

가 지니는 역동적 측면을 이해하고, 이 과정에서 나타나는 교사의 역할을 관찰하여 기술하는 것이므로 역동적 기하환경에서의 작도와 함수지도, 분석법 그리고 교사의 역할에 관한 선행연구를 살펴보았다.

1. 역동적 기하환경에서의 작도와 함수지도

지필환경에서는 도형의 정확한 작도와 작도된 도형의 변형이 어렵거나 불가능하며, 길이나 각의 크기를 정확하게 측정하기 어렵다. 반면, GSP와 같은 탐구형 소프트웨어는 경험적 정당화의 기회를 제공할 수 있으며 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상보적 관계에도 도움이 된다(류희찬 · 조완영. 1999).

또한, 동적인 환경의 특성으로는 직접적인(direct) 조작, 연속적인(continuous) 움직임, 몰입적인(immersive) 환경을 들 수 있으며 직접적인 조작이란 사용자가 화면상에서 대상을 선택하여 직접 움직여볼 수 있음을 의미하며, 조작을 통해 화면상에서 보여 지는 대상과 그 이면에 숨겨진 수학적 의미 사이의 인식 거리를 좁힐 수 있다. 연속적인 움직임이란 '드래그(drag)' 동안에 일어나는 변화와 관련된 것으로, 컴퓨터 화면에 나타나는 수학적 대상들이 항상 논리적인 관련성과 전체적인 모양을 유지하면서 움직여질 뿐 아니라, 대상들이 변하는 중간 상태를 사용자가 모두 볼 수 있음을 의미한다. 몰입적인 환경이란 사용자의 초점이 작도를 위한 기술적 방법보다 수학적 목표를 달성하는 방법에 맞추어질 수 있도록 하는 환경을 의미한다(류희찬, 2004).

손홍찬 · 류희찬(2005)은 함수 지도 시 지필환경에서는 표와 그래프, 대수적인 식을 역동적으로 상호 연결하기 어렵고 학생들은 이들의 관계를 의미 있게 파악하기 어렵기 때문에 이러한 여러 수학적인 표현 사이의 번역 과정에서 학생들이 겪는 어려움이 공학을 이용한 수학적 표현들의 구체적인 연결을 통해 극복될 수 있다고 주장하였다.

장혜원(2003)은 두 집합 간의 대응 관계인 Dirichlet-Bourbaki 식의 정의는 추상적이고 매우 단정하기는 하지만 함수의 본성에 대해 말해주는 바가 충분하지 못하며, 종속적으로 변화하는 두 양 사이에 성립하는 함수 관계를 유도하는 것이 '실세계로부터의 자연스러운 수학적 개념의 도입'이라는 취지에도 적합하다고 주장하였다. 또한, 비례 관계는 기하에서 닮음의 관계를 이용하여 변수 사이의 관계를 드러내는 강력한 도구임을 밝히고 있다.

2. 분석법

작도를 지도할 때 가장 중요한 점은 학생들이 작도의 과정을 발견할 수 있도록 안내하는 것이다. 그러나 이 과정의 어려움으로 인해 교사가 작도의 과정을 먼저 제시하고 학생들은 그것을 기계적으로 수용하고 기억하게 되는 것이 일반적인 수학교실에서의 모습이다. 그러므로 이러한 과정이 교육적으로 의미 있다고 볼 수는 없다(류희찬 · 제수연, 2010).

본 논문은 함수의 그래프를 작도하기 위한 의미 있는 하나의 방법으로서 "분석법"을 도입하였다. 분석법은 수학적 발견술 중에서 가장 오래되었으며 피타고라스학파에 의해 자주 사용되었고 BC 3세기 경 Pappus에 의해 체계적으로 정리되었다. Pappus는 '하도록 요구되는 것이 이루어진 것처럼, 증명하고자 하는 것이 참인 것처럼' 가정하면서 시작한다. 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가 물으면서 그 선행하는 어떤 것이 무엇인지를 찾는 과정을 <분석>이라고 한다(Hearth, 1984).

한인기·꼴랴긴(2006; 한인기, 2010에서 재인용)은 구하는 것을 참으로 또는 구해진 것으로 인정하고 이로부터 다른 결론을 유도하는 활동을 <아래로 분석>이라고 하였으며, <아래로 분석>은 구하려는(증명하려는) 것을 참이라고 가정하고 아래로 분석을 진행하는 불완전분석과 구하는 것이 거짓임을 가정하고 아래로 분석을 진행하는 귀류법으로 나눌 수 있다고 하였다.

정수진(2007)은 역동적 기하 환경에서 분석법은 난이도가 높은 문제에서 아이디어를 찾는데 효과적으로 이용된다는 것을 보였다.

3. 테크놀로지가 풍부한 환경에서 교사의 역할

Farrell(1996)은 테크놀로지가 사용되는 수업에서와 사용되지 않는 수업에서 교사의 역할은 같지 않다고 하면서 이에 대한 예로 상담자(consultant)와 동료탐구자(fellow investigator) 등을 들고 있다. Heid et al.(1990; Karen Hollebrands & Rose Mary Zbiek, 2003에서 재인용)은 테크놀로지가 풍부한 고등학교 수학 수업에서 실시된 연구에서 교사들의 다양한 책임, 도전, 역할 등을 확인했으며 이 기준에서 제시하는 교사의 역할은 다음과 같다

- 상담자(Counselor): 교사는 문제에 익숙하며, 학생들이 교사의 지원을 원할 때 충고와 도움을 준다. 용기를 북돋우어 주거나 격려하고 진단하는 역할 뿐 아니라 악마의 변호사(devil's advocate) 역할을 수행하기도 한다.
- 기술적 보조자(Technical Assistant): 교사는 학생들이 하드웨어나 소프트웨어를 다루면서 겪게 되는 어려움을 도와주는 역할을 한다.
- 협력자(Collaborator): 교사 또한 문제와 풀이에 익숙하지 않다. 따라서 수학 학습에 있어서 참여자가 될 수 있다.

본 연구에서는 역동적 기하환경에서 분석법을 활용하여 함수의 그래프를 작도하는 과정에서 나타나는 학생들의 사고 과정의 특징을 관찰하여 분석하고 이 과정에서 나타나는 교사의 역할을 Heid et al.(1990)의 범주에 근거하여 상담자, 기술적 보조자, 협력자로 구분하여 분석하고자 한다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법 개관

본 연구는 탐구형 소프트웨어인 GSP를 이용하여 학생들이 기존에 알고 있던 여러 기하와 관련된 성질로부터 함수 $y=\sqrt{x}$와 $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$을 작도하는 방법을 발견하고 그 작도 방법의 타당성을 입증해 봄으로써 세 함수의 개념을 명확하게 하는 것을 목적으로 하였다. 본 연구는 작도 과정을 발견하는 학생들의 사고 과정과 이때의 교사의 역할을 관찰하고 분석하는 것을 목적으로 하기 때문에 질적 사례연구 방법을 선택하였다.

2. 연구대상

본 연구에서는 대전광역시 소재 S중학교 3학년에 재학 중인 남학생 1명(A)과 여학생 1명(B)을 연구 대상으로 선정하였다. 이차함수를 학습한 학생들이어야 하므로 중학교 3학년을 대상으로 하였으며 정규 수업시간 이외의 시간을 내어 실험에 참여할 수 있는 관심과 의지가 있는 학생들이어야 했으므로 지난해에 2학년을 가르쳤던 수학교사의 추천을 받았다. 이 중에서 위의 두 학생이 연구에 적극적인 참여 의사를 밝혀서 연구 대상 학생으로 선정하게 되었다. 두 학생은 1학년 때 배웠던 작도에 대해서 삼

각형의 작도, 각의 이등분선, 선분의 수직이등분선, 각 옮기기 등에 관한 내용을 기억하고 있었으며 작도가 이후에 배운 수학 내용과 연결된 적은 없다고 생각하고 있었다. 그래도 작도를 배우는 것 자체가 재미있었으며 그 자체로도 배울 의미가 있는 것으로 생각하고 있었다.

함수의 그래프에 관해서는 $y=\frac{1}{x}$의 경우에 모눈종이 위에 점을 5~6개 정도의 점을 찍어서 모양을 유추하는 방법으로 그렸던 것을 기억하고 있었다. 그리고 작도와 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 간에는 특별한 관계가 없다고 생각하고 있었다. 또한 $\sqrt{x}$에 관해서는 길이로서의 이미지를 먼저 떠올렸다. 그것은 무리수를 처음 배울 때 $\sqrt{2}$를 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이로 접했기 때문이라고 했다.

그동안의 수학 시간에 컴퓨터를 직접 다뤄본 경험은 없으며 다만, 방과 후 학교 수업 시간에 선생님께서 GSP로 함수의 그래프를 그리는 것을 보여주신 적이 있음을 기억하고 있었다.

수학과 관련된 자아 개념은 두 학생 모두 긍정적인 편이었으며 그 중 학생B는 초등학교 4학년 때까지는 수학 성적이 매우 저조했었지만 5학년 때 만난 담임선생님을 굉장히 좋아했고 그 이후로 선생님의 설명을 열심히 듣다 보니 수학도 잘 하게 되었다고 했다. 학생A는 초등학교 때부터 줄곧 수학을 좋아하고 잘 하는 학생이었다. 두 학생 모두 수학을 매우 좋아하며 평소에도 다양한 수학 문제를 푸는 것을 즐기는 편이었다. 또한, 이미 서로 잘 알고 있으며 함께 수학 문제를 풀며 의견을 나누는 친밀한 관계였다.

두 학생을 지도한 교사는 12년째 중학교에서 수학을 가르쳐 왔으며 수학시간에 학생들이 자신의 풀이과정을 발표하는 일을 중요하게 생각하고 있었다. 본 연구를 진행할 때 교사는 정규수업에서는 수준별 수업의 일환으로 중학교 1학년과 2학년 하위 수준 학생들을 가르치고 있었다. 특히 1학년의 경우 소규모 집단으로 편성된 하위 수준 학생들을 가르치면서 수학시간에 학생들과 이루어지는 담화에 깊은 관심을 보이고 있었다.

3. 연구 절차

본 연구는 정규 교과 시간에 실시하기는 어려움이 있으므로 방과 후에 학교 도서실과 수학교과실에서 이뤄졌으며 예비 수업 1차시와 본 수업 3차시로 총 4차시의 수업이 이뤄졌다. 학생 2명이 1대의 노트북을 함께 사용하고 활동지는 각자 사용하였다.

1차시에는 학생들의 작도와 함수를 포함해서 수학과 관련된 개인적인 경험과 생각들을 알아보는 면담이 이뤄졌고 GSP 사용 방법에 관한 예비 수업이 진행되었다. 본 수업에 필요한 기능들을 지도 교사가 안내하고 학생들이 직접 조작해보는 방식으로 약 45분간 진행되었다. 2차시부터 4차시까지는 분석법과 작도를 이용해서 함수 $y=\sqrt{x}$와 $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$의 그래프를 그려 보는 활동이 각각 45분정도씩 진행되었다.

학생들은 먼저 지필환경에서 분석법을 통해 x와 y 사이의 관계식을 다양하게 표현해 보고 그 과정에서 닮음의 성질을 유도해 낼 수 있는 비례식을 유추해내는 활동을 하였다. 그리고 이를 바탕으로 두 닮은 도형 간의 변의 길이로서 x와 y를 인식하였다. 이와 같은 지필 환경 상에서의 활동에 이어서 GSP를 이용해서 x와 y를 변으로 하는 닮은 도형을 작도하고 x의 길이를 변화시켜가면서 y의 길이가 변화되는 양상을 관찰함으로써 $x>0$일 때 함수의 그래프를 작도하고 관찰하는 과정으로 진행되었다. 이후에 학생들은 다시 지필 환경에서 전반적인 학습 과정을 돌아보면서 핵심적인 아이디어와 느낀 점 등을 활동지에 정리하였다.

4. 자료 수집

가. 면담자료

면담질문지를 활용하여 수학 학습의 경험과 그에 대한 개인적인 생각 또는 느낌들에 관한 사전 면담이 이뤄졌으며 학생들의 양해와 동의를 구하고 녹음을 하였다. 수업 후에는 수업 활동에 관한 학생들의 견해나 느낌, 생각의 변화에 관한 면담이 이뤄졌다.

나. 관찰자료

각 차시별로 수업 장면을 동영상으로 녹화하였으며 컴퓨터상에서 학생들의 GSP 조작과정을 담은 화면과 음성을 동영상 파일로 저장하였다.

다. 문서자료

학생들이 함수 $y=\sqrt{x}$ 와 $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$을 작도하기 위해 활동지에 기록한 자료와 연구자가 수업 계획과 연구 진행 상황 등을 수시로 기록한 노트로 구성된다.

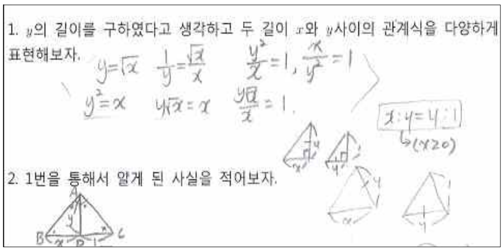
Ⅳ. 연구결과 및 분석

본 장에서는 이차함수를 학습한 학생들이 역동적 기하환경인 GSP 상에서 $y=\sqrt{x}$ 와 $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$의 그래프를 그리기 위해 비례식을 활용하는 과정과 작도 방법을 정당화하는 과정을 기술함으로써 함수 작도 시에 나타나는 학생의 사고과정의 특징과 교사의 역할에 관해 논의하고자 한다.

1. 중학교 3학년 학생들이 역동적 기하환경에서 비례식을 활용하여 함수를 작도할 때 나타나는 사고 과정

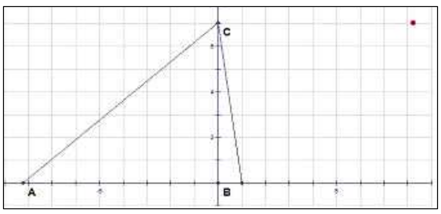
가. 비례식을 활용해서 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 작도하기

학생들은 $y=\sqrt{x}$ 의 관계식을 $y^2=x$ 또는 $\frac{x}{y^2}=1$, $x:y=y:1$ 등 여러 가지 형태로 변화시켜보다가 비례식에 주목하게 되었다. 이 후에 학생들은 닮은 도형 사이에는 대응변의 길이의 비가 일정하여 비례식이 성립한다는 사실을 바탕으로 비례식 $x:y=y:1$을 만족하는 닮은 직각삼각형을 활동지에 그렸다. 이 과정을 통하여 학생들은 x와 y를 삼각형의 변의 길이로서 인식하게 되었다.



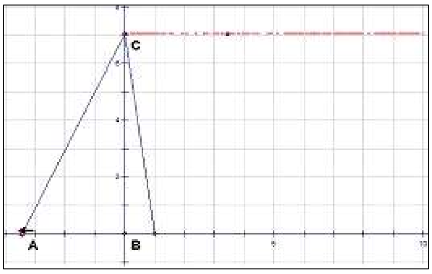
[그림 Ⅳ-1] $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 그리기 위한 활동

이후에 학생들은 활동지에서 그렸던 닮은 삼각형을 바탕으로 GSP 상에서도 닮음비가 $x:y=y:1$인 두 직각삼각형을 작도하고자 하였다. 먼저 학생들은 좌표평면 상에서 단위 점을 이용하여 길이가 1인 선분을 작도하고 x축과 y축 위의 점을 각각 선택하여 선분으로 연결하였다. 그 다음에 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 길이를 측정한 후 $\overline{AB}$의 길이를 x좌표로 하고 $\overline{BC}$의 길이를 y좌표로 하는 점을 찍었다(그림 Ⅳ-2).



[그림 Ⅳ-2] $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (1-1)

마지막으로 이 점의 움직임에 대한 흔적남기기 기능을 이용하여 관찰한 결과 그래프가 x축에 평행한 직선으로 나타나자 학생들은 당황하였다(그림 Ⅳ-3).[2]



[그림 Ⅳ-3] $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (1-2)

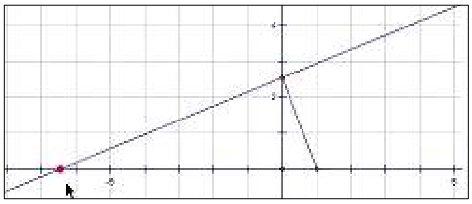
이때, 교사는 다음과 같이 학생들로 하여금 자신들의 작도 과정을 돌아보게 함으로써 오류의 원인을 발견하도록 안내하였다.

<발췌문 1>

1교사: 지금 $\overline{AB}$는 변하는데 $\overline{BC}$의 길이가 변해요, 안 변해요?
2학생들: 안 변해요.
3교사: 상수가 되었다는 얘기네. 왜 이런 일이 생겼을까?
4A: 같이 변하게 하면 될 것 같은데..
5교사: 닮음이라면 x가 변할 때 y도 당연히 자연스럽게 변해야 할 텐데 말이야. 왜 이런 일이 생겼을까? 우리의 과정을 돌아보자.
6B: 아~ 잠깐, 90도 안했어.
7A: 아, 수선을 안 그렸다.

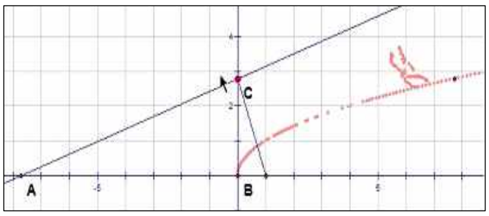
<발췌문 1>에서 교사는 학생들이 직각삼각형의 닮음을 이용하고 있다는 것을 인식하고 있지 못할 때 자신들의 작도과정을 돌아보며 반성할 수 있도록 권유함으로써 학생들 스스로 실수의 원인을 발견할 수 있도록 하였다. 이를 통하여 학생들은 사고의 전환을 할 수 있었고 문제해결을 위한 다음 단계로 나아갈 수 있었다.

첫 번째, 학생들은 y축 위에 점을 선택하고 이 점과 단위 점을 잇는 선분을 작도하였다. y축 위의 점을 지나면서 이 선분에 수직인 직선이 x축과 만나는 교점을 작도함으로써 활동지의 비례식$x:y=y:1$에 해당하는 닮은 직각삼각형을 작도하였다. 그러나 이때 y축 위에 있는 점을 먼저 선택하고 그 결과로 x가 결정이 되는 관계로 작도를 하였다는 것은 x의 길이가 변함에 따라 y의 길이가 변하게 되는 독립변수와 종속변수 간의 관계를 명확하게 인식하지 못하고 있는 상태임을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-4] $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (2-1)

그 후에 학생들은 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 길이를 측정한 후 $\overline{AB}$의 길이를 x좌표로 하고 $\overline{BC}$의 길이를 y좌표로 하는 점을 찍었다.



[그림 Ⅳ-5] $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (2-2)

그러나 학생들이 독립변수로서의 x와 종속변수로서의 y를 정확하게 구분하지 못한 상태

2) GSP 화면에서 나타나는 A, B, C는 길이를 측정하는 과정에서 나타난 이름이므로 실제 작도 순서와 일치하지는 않으며 학생들이 활동지에 표시한 [그림 Ⅳ-1]의 A, B, C와도 다르다. 이후의 그림에서도 동일하다.

에서 작도를 실행한 결과 점 A를 드래깅할 수 없었고 결과적으로 아무것도 발견할 수가 없었다. 학생들은 그리고자 하는 함수 $y=\sqrt{x}$의 독립변수에 해당하는 점 A를 움직이면서 그래프를 관찰하고 싶어 했지만 오히려 점 C를 드래깅 해야지 그래프를 관찰할 수가 있음을 알아냈다.

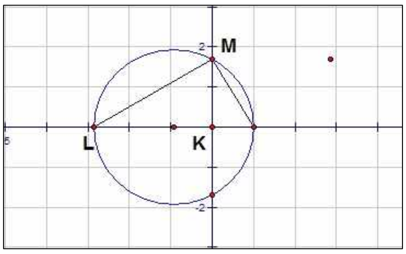
학생들이 이 문제를 해결할 수 없어서 망설이고 있을 때 교사는 도형의 변하는 성질과 변하지 않는 성질에 관하여 질문하였다. 자신들의 작도과정을 돌아보는 중에 학생들은 자신들이 독립변수와 종속변수의 역할을 바꿔서 작도하였음을 인식하게 되었다(3).

<발췌문 2>

1A: 근데 왜 y가 움직여야 그래프가 나오지?
2B: 우리가 어디서 뭔가 잘못한 게 있을 거야.
3A: 우리가 x,y를 바꿔서 작도한 것 같다.
4교사: 지금 선분AB의 길이가 변함에 따라 선분 BC의 길이가 따라서 변하는 상황이 되어야 하는 거지?
5A: 네,..그런데 그렇게 되지 않았어요... 어떻게 하지?
6교사: 여기에서 변하는 성질과 변하지 않는 성질이 뭐가 있을까?
7B: 꼭지각 C와 각 ABC가 직각인 것과 길이가 1인 것은 변하면 안돼요 .
8교사: AB의 길이는 계속 변하면서도 직각인 것은 유지되어야 하는 거지? 그럼, 점의 위치는 바뀌지만 직각이 유지되는 이 삼각형의 꼭짓점들을 모아 놓으면 어떤 도형이 될까? (학생들은 한참 생각한다)
9A: 원이요!
10B: 원주각은 중심각의 $\frac{1}{2}$이 되니까 지름의 경우에는 90°가 되네요.

이 과정에서 교사는 학생들에게 독립변수에 해당하는 x축 위의 점을 드래깅하면서 움직여도 그에 종속되는 삼각형의 꼭지각은 항상 90°를 유지할 수 있어야 한다는 사실을 확인시키면서 이러한 성질을 만족하는 도형이 어떤 것이 될 것인지에 주목할 수 있도록 칠판에 그림을 그려가면서 질문을 하였다(8). 학생들은 칠판의 그림과 교사의 설명을 들으면서 중심각에 대한 원주각의 크기는 중심각의 $\frac{1}{2}$이 되고 따라서 지름에 대한 원주각이 항상 90°가 된다는 사실에 주목하게 되었고 작도활동이 끝난 후에 이를 스스로 증명해 보이기도 하였다.

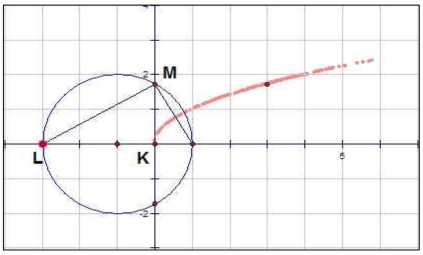
다음 활동은 학생들이 원주각의 성질에 주목하여 원 위에 닮은 삼각형을 작도하고 이를 이용해서 함수의 그래프를 작도해가는 과정이다. 먼저 x축 위에 점 L을 작도하고 지름이 $\overline{LK}+1$인 원을 작도하였다. 그 후에 원과 y축과의 교점인 점 M을 작도하고 $\overline{LK}$를 x좌표로, $\overline{MK}$를 y좌표로 하는 점을 찍었다([그림 Ⅳ-6]).



[그림 Ⅳ-6] $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (3-1)

그러고 나서 점 L을 드래깅 하는 동안 점의 흔적이 어떻게 나타나는지를 관찰하였다([그림 Ⅳ-7]). 두 번의 시행착오를 거치고 세 번째 시도한 작도 활동을 통해 학생들은 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 성공적으로 그렸다([그림 Ⅳ-7]). 특히 두 번째 작도활동에서 학생들은 종속변수에 해당하는 점을 먼저 작도하고 이에 따른 결과로 독립변수에 해당하는 점을 작도하게 됨으로써 함수의 그래프를 작도할 수 없었고 교사와 함께 이 과정을 반성하면서 자신들이 독립변수와

종속변수의 역할을 바꿨음을 스스로 확인하게 되었다. 이후에는 x축 위에 점 L을 먼저 작도하고 이에 종속되는 점 M을 작도하였는데 이 것은 학생들이 독립변수와 종속변수를 정확하게 구분하게 되었음을 의미한다.

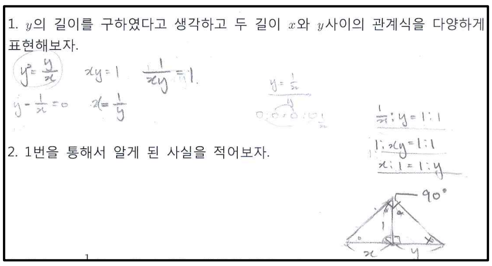


[그림 Ⅳ-7] $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동 (3-2)

나. 비례식을 활용해서 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 작도하기

$y=\sqrt{x}$ 의 경우와 유사하게 학생들은 주어진 $y=\dfrac{1}{x}$의 함수식을 $xy=1$이나 $x=\dfrac{1}{y}$등과 같은 여러 가지 관계식으로 변형하였다. 그리고 이 과정을 통해 비례식 $x:1=1:y$를 유도해내고 그에 따른 닮은 직각삼각형을 그릴 수 있었다([그림 Ⅳ-8]).

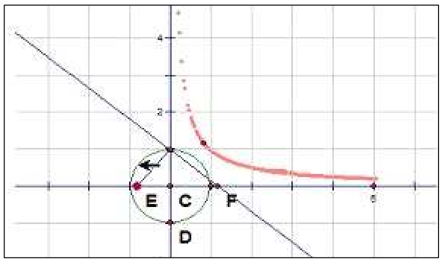
그 후에 학생들은 이 도형을 GSP로 작도하기 위해서 x축 위의 점 E를 선택하고 단위원을 작도하여 y축과의 교점을 작도하였다. 이 교점을 지나면서 점E와 이 교점을 연결한 선분에 수직인 직선이 x축과 만나는 교점 F를 작도



[그림 Ⅳ-8] $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리기 위한 활동

하였다. 학생들은 활동지에서 그린 자신들의 그림과 컴퓨터 화면 상에 나타나는 그림을 수시로 비교하면서 작도를 진행하였다. $\overline{EC}$와 $\overline{CF}$를 각각 x좌표와 y좌표로 하는 점을 찍고 점 E를 움직이면서 이 점의 흔적을 관찰하였다([그림 Ⅳ-9]).

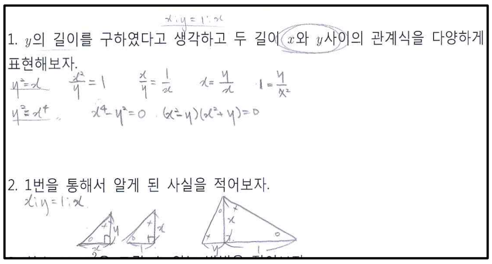
이 과정을 통해서 학생들은 유한개의 점으로부터 무한개의 점들이 찍혀졌을 때의 그래프를 추측하는 것이 아니라 정의역의 원소인 x의 길이를 드래깅을 통해 연속적으로 변화시켜보면서 그에 대응하는 y의 길이도 연속적으로 변화되는 과정을 직접적으로 관찰할 수 있었다. 이러한 활동은 역동적으로 변화되는 측면으로서의 함수의 속성을 인식하는 데 좋은 기회가 되었다.



[그림 Ⅳ-9] $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리기 위한 GSP 활동

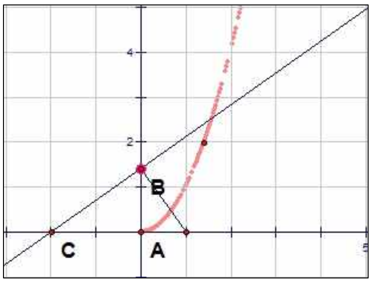
다. 비례식을 활용해서 $y=x^2$의 그래프 작도하기

학생들은 y의 길이를 이미 구하였다고 생각하고 두 길이 x와 y 사이의 관계식을 자유롭게 변형시키면서 작도 문제를 해결하기 위한 필요조건들을 찾아보았다. 먼저 활동과 유사하게 이 과정에서도 학생들은 비례식 $x:y=1:x$ 에 주목하였으며 이를 만족하는 그림도 그릴 수 있었다([그림 Ⅳ-10]).



[그림 Ⅳ-10] $y=x^2$의 그래프를 그리기 위한 활동

먼저 학생들은 y축 위에 점 B를 선택한 후 이 점과 단위 점까지를 잇는 선분을 작도하였다. 점 B를 지나면서 단위 점과 이은 선분에 수직인 직선이 x축과 만나는 교점을 작도하였다. 점 B와 원점간의 거리를 x좌표로 하고 점 C와 원점 간의 거리를 y좌표로 하는 점을 찍고 점 B를 드래깅 하면서 이 점의 흔적을 관찰하였다([그림 Ⅳ-11]).



[그림 Ⅳ-11] $y=x^2$의 그래프를 그리기 위한 GSP활동

함수 $y=x^2$의 그래프를 그릴 때 뿐 아니라 나머지 두 함수의 그래프를 그릴 때에도 학생들은 정의역의 원소인 x의 길이가 주어졌을 때 y의 길이도 이미 주어졌다고 가정하고 두 변수 간의 관계식을 변형시키면서 문제를 해결하고자 하였다. 즉, 주어진 작도문제가 이미 해결되었다고 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제(필요조건)를 도출하고 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속하여 이미 답을 알고 있는 명제에 도달하는 '분석'의 과정을 경험한 것이다. 이 과정 속에서 학생들은 x와 y를 함수의 관계식 상의 변수로 인식하는 데에서 출발하여 닮은 직각삼각형의 변의 길이로서 인식하게 되었고 함수의 그래프를 작도 할 수 있었다. 이와 같이 분석의 방법은 함수의 그래프를 작도하는 데 있어서 결정적인 아이디어를 제공하고 있음을 알 수 있다.

2. 함수를 작도하는 과정에서 나타난 교사의 역할

가. 교사는 학생의 시행착오에 대해 조언을 하고 해결책을 모색할 수 있도록 도와주는 상담자의 역할을 한다.

학생들은 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리기 위한 첫 번째 시도에서 그래프가 x축에 평행하게 나타나자 당황하였다([그림 Ⅳ-3]). 이때 교사는 학생들로 하여금 자신의 작도 과정을 돌아보며 반성할 수 있도록 권유함으로써 직각삼각형의 닮음을 이용하고 있다는 것을 인식하고 있지 못했던 자신들의 실수를 스스로 발견할 수 있도록 하였다. 이를 통하여 학생들은 문제해결을 위한 다음 단계로 나아갈 수 있었다.

두 번째 시도에서는 독립변수와 종속변수의 구분이 명확하지 않았기 때문에 종속변수에 해당하는 y의 길이를 먼저 작도했고 그 결과 y를 드래깅 해야지만 그래프를 관찰할 수가 있었다([그림 Ⅳ-5]). 이때에도 학생들은 자신들 오류의 원인을 금방 알아차렸지만 그 다음 단계로 나아가지 못하고 있었고 교사는 작도 대상인 도형의 변하는 성질과 변하지 않는 성질에 주목하도록 안내하고 적절한 조언을 제시하여 학생들이 새로운 작도 방법을 모색할 수 있도록 조력하였다.

$y=x^2$의 그래프를 작도할 때 학생들은 전 시간에 작도했던 $y=\sqrt{x}$의 방법을 상기하면서 이번에도 원을 작도해야 하는 것이 아닌지 고민

하고 있었다. 그런데 이번에는 간단하게 수선을 작도하기만 하면 된다는 사실을 교사의 안내에 따라 자연스럽게 확인할 수 있었다(5,7). 이와 같이 교사가 학생들이 유사한 문제 상황 속에서 고민하고 있을 때 공통점과 차이점을 구분해낼 수 있도록 도와주고 이를 통해 전 시간의 작도활동에 얽매이지 않고 작도 활동을 진행할 수 있도록 조언해주는 상담자의 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

<발췌문 3>

1B: 그런데 저 꼭지각이 90° 도가 되어야 하잖아.
2A: 아...(한동안 가만 있는다)
3교사: 지금 선분 위의 점을 잡은 거지?
4B: 네
5교사: 그럼 수선 위의 점이 움직이면서 90° 가 되어야 하는 거지? 그럼 점B와 항상 연결되어야 하는 점은 어떤 걸까? 어떻게 될까?
6B: 꼭짓점과 점B를 연결해주면 될 것 같아요. 그런데 지난번에는 x 가 밑변에서 움직였었는데...
7교사: 그때그때마다 살짝 다르지?
8B: 삼각형의 모양은 늘 같은데 x 와 y의 위치가 달라져요
9A: 아~ 그럼 꼭짓점이랑 B와 선분을 긋고 꼭짓점에서 수선을 그으면 어떨까?

나. 교사는 기술적 보조자의 역할을 하여 작도의 아이디어를 발견할 수 있도록 조력한다.

교사는 학생들이 GSP를 다루면서 겪게 되는 어려움을 도와주며 학생들이 작도의 아이디어를 전개시키는데 있어서 기능적인 문제로 고민하지 않도록 조력하는 역할을 한다. 학생들은 예비 수업 1차시를 통해서 GSP의 기본 기능에 대한 안내 수업을 받았지만 GSP를 처음 다뤄보는 학생들로서는 한 번의 수업으로 필요한 모든 기능을 원활하게 익힐 수는 없었다. <발췌문 4>에서와 같이 학생들이 주어진 선분의 중점을 작도하고자 할 때 선분과 직선이 겹쳐져서 선분을 선택하기 어려웠다. 이 때 교사의 조언에 의해 두 점을 선택하여 중점을 잡도록 하였다(7).

<발췌문 4>

1교사: 지금 우리가 작도하고자 하는 원의 지름은?
2학생들: $x+1$이요.
3교사: 응, 여기서는 $x+1$이 어디서부터지?
4학생들: 여기서부터 여기까지요.
5교사: 그렇지, 그럼 그것의 무엇을 선택해야 할까?
6A: 중점이요. 중점을 잡아야 하는데 선분이 잘 안 잡혀요.
7교사: 선분의 양 끝점 2개를 잡아도 선택할 수 있어.
8A: 그래요? 이제 됐어요. 이 선분의 중점을 찾아서...와! 원이 작도되었어요.

다음은 학생들이 함수의 그래프를 작도하는 데 있어서 매우 중요한 아이디어인 수선을 작도하는 방법을 잊어버렸을 때 교사에 의해 수선을 작도하는 과정을 다시 안내받았으며(4) 이후의 수업에서는 자유롭게 수선을 작도하는 모습을 보였다.

<발췌문 5>

1B: 어... 그 점에서 수선되는 선분을 작도하면 될 것 같아요.
2교사: 아, 이 점에서 수선을 작도하는 것 기억나니?
3A: 잘 기억이 안 나요.
4교사: 그것은 기능적인 것이니까... 점과 선분을 선택한 후 작도에 가면 수선이 있지?
5A: 그래요? 이제 됐어요.

다. 교사는 협력자의 역할을 하여 작도와 함수의 개념이 연결될 수 있도록 한다.

학생들은 작도를 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있다는 사실을 매우 흥미롭게 받아들이며 이 세 가지 그래프 이외에도 작도를 이용해서 그릴 수 있는 함수가 더 있는지 궁금해

하였다. 그래서 중학교 1학년 과정에서 배웠던 $y=x$의 그래프도 작도를 이용해서 그려보기로 하였다. 학생들은 비례식 $x:y=1:1$을 이용해서 합동인 두 직각삼각형을 작도하고 이를 이용해서 $y=x$의 그래프를 그릴 수 있음을 확인하였다. 이 과정에서 교사는 학생들의 수학적 관심이 주어진 과제를 넘어서서 확장되어 나갈 때 이를 용납하고 함께 탐구해나가는 협력자의 역할을 담당하였다.

V. 논의: 작도 활동의 의미

본 연구는 이차함수를 학습한 중학교 3학년 학생들에게 닮은 삼각형의 대응변 간에 성립하는 비례식을 바탕으로 GSP를 활용해서 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$과 같은 초등함수를 작도할 수 있는 기회를 제공함으로써 대수적 함수와 그 성질에 관한 학생들의 직관력과 논리적 추론능력을 촉진시키고자 진행되었으며 이와 함께 그 과정에서 나타나는 교사의 역할도 함께 관찰하고자 하였다. 연구결과 및 분석을 바탕으로 작도 활동의 의미라는 관점에서 얻을 수 있는 시사점을 논의해보면 다음과 같다.

첫째, 기하학적인 작도가 비례를 바탕으로 진행되었다는 점에서 기하와 대수의 결합이라고 볼 수 있다. 그동안 학생들에게 있어서 작도와 닮은 삼각형간의 대응하는 변의 길이의 비, 원주각의 성질 등은 기하의 영역으로, 함숫값을 구하고 순서쌍을 좌표평면에 나타내는 것은 대수적인 영역으로서 별개의 것으로 인식되었었으나 이번 활동을 통해서 기하와 대수의 영역이 연결되어 있음을 경험하게 되었다. 이것은 교육과정 상의 서로 다른 두 영역인 기하와 대수의 통합을 위한 교육적 환경을 제공하고 있다는 점에서 의미 있는 시도라고 볼 수 있을 것이다. 대수는 그 자체로도 실세계에 대한 좋은 모델링 도구가 되지만 시각적 이미지를 제공하지 못한다는 약점을 지니고 있으며 기하와의 통합을 통해 이러한 약점이 보완되고 극복될 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 본 연구에서 살펴보았듯이 이러한 통합적 시도가 교육과정의 급진적인 변화를 요구하는 것이 아니라 몇 시간 정도의 추가적인 수업 시간을 확보하는 것으로 실현될 수 있을 것으로 기대한다.

둘째, 지필 환경에서 대수적인 계산에 의존하여 함수의 그래프를 학습하는 경우에 정의역이 수전체로 확장되면서는 학생들의 추측에 의존할 수밖에 없는 반면에 본 연구의 작도 활동은 지필 환경과 테크놀로지가 조화를 이룬 수업 환경을 기반으로 했으며 이를 통해 학생들은 함수의 정확한 그래프와 그래프가 연속적으로 변화되는 과정을 드래깅과 흔적남기기 기능을 통해서 직접 관찰할 수 있었다. 따라서 학생들은 역동적 기하환경에서 기하학적인 작도 활동을 통해 함수의 그래프를 그리면서 함수의 변화적 속성과 역동적인 측면을 파악하게 되었다.

셋째, 활동 초기에 학생들은 독립변수와 종속변수가 되는 대상을 명확하게 구분하지 못하였으나 몇 번의 시행착오를 거듭하게 되면서 독립변수가 되는 길이와 종속변수가 되는 길이 사이의 관계를 분명하게 파악하게 되었다. 이때 역동적 기하환경은 자신들이 선택한 작도 방법의 결과를 컴퓨터 화면을 통해 즉시 확인할 수 있게 해주었으며 이는 학생들이 자신들의 시행착오를 교정하는데 매우 효과적인 환경임을 알 수 있었다.

넷째, 대수와 기하가 결합된 작도 활동을 통해서 학생들은 주어진 x에 대응하는 y의 값이 존재한다고 가정하고 그 값을 찾아가는 "분석법"을 경험하였다. 즉, 비례식을 만족하는 y의

값이 존재한다고 가정하였기 때문에 이를 바탕으로 x와 y를 변의 길이로 하는 닮은 삼각형을 그릴 수 있었다. 그리고 이러한 비례식과 닮은 삼각형을 토대로 GSP에서의 작도 활동을 진행하였다.

마지막으로, 학생들은 각 학년간의 계통성을 경험할 수 있었다. 사전 면담에서 학생들은 1학년 때 배운 작도가 그 자체로 재미있었지만 함수의 그래프와 특별히 관련이 있다고는 생각하고 있지 않았다. 본 연구가 진행되면서 학생들은 닮음과 비례식이 함수의 그래프를 그릴 때에도 이용된다는 사실을 알고 새로워했다. 다음은 학생들이 작도 활동을 마친 후에 활동지에 기록한 소감의 일부이다.

- 함수 $y=\frac{1}{x}$을 비례의 성질을 이용해서 도형과 연관 지어 새로운 방법으로 배울 수 있다는 사실을 알게 되어 매우 기뻤다. 앞으로 다른 함수를 배우는 데 있어서 이처럼 또 다른 방법으로 그 함수를 생각해 보는 안목을 기른 것 같다.
- 닮음과 비례식이 함수의 그래프를 그릴 때에도 이용된다는 것을 오늘 처음 알아서 조금 새로웠고..

이와 같이 학생들은 1학년의 작도와 2학년의 닮음과 비례, 3학년의 제곱근과 원의 성질이라는 각 학년의 주제가 함수의 그래프를 중심으로 연결될 수 있다는 것을 경험하였다. 이러한 경험들의 축적은 수학이라는 과목이 임의의 규칙들을 모아 놓은 단순한 집합체가 아니라 수학의 각 영역과 학년 간의 내용이 상호적인 관련성을 갖고 의미 있게 연결되어 있다는 것을 인식하는 하나의 계기가 되었을 것으로 기대한다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구에서 우리는 중학교 학생들에게 역동적 기하환경에서 함수를 작도할 수 있는 기회를 제공함으로써 초등 대수 함수를 가르치는 데 있어서의 새로운 가능성을 모색해보았다. 즉 대수적 방법의 함수 지도 이전에 “작도 방법” 을 통해 함수를 가르칠 필요가 있다는 것이다.

이러한 작도 활동을 통해 학생들은 함수에 관한 기하학적인 직관을 획득할 수 있었으며 독립변수와 종속변수 간의 역동적인 관계를 경험할 수 있었다. 또한, 학생들은 작도를 위한 방법을 탐색하는 과정에서 “분석법”이라고 하는 매우 가치 있는 발견술을 배울 수 있었으며 자신들이 선택한 작도 방법에 대한 정당화의 과정을 통해서 연역적 추론 능력이 향상될 수 있었다.

또한, 본 연구에서 진행된 작도 활동의 과정에서 교사는 학생들의 시행착오에 대해 조언을 하고 해결책을 모색할 수 있도록 도와주는 상담자로서의 역할과 기술적 보조자로서의 역할 그리고 협력자로서의 역할 등을 담당하고 있음을 알 수 있었다. 이것은 테크놀로지가 풍부한 수업 환경에서도 수업의 질적 향상을 위해서는 교사의 적절한 중재가 매우 중요함을 함의하는 것이다.

Scott Steketee(2010)은 하나의 수를 대입해서 하나의 함숫값을 얻는 수치적 함수(numeric function)의 경우에는 함수의 특징을 파악하기 위해서 대응표를 작성하고 또 이를 바탕으로 그래프를 그려야 하며 이러한 과정 속에서도 함수의 역동적 속성에 관한 이해가 쉽지는 않다고 지적한다. 이에 반해 평면상의 한 영역을 정의역으로 하고 그 영역 내의 점을 독립변수로 해서 대칭이동이나 회전이동 등과 같은 다양한 변환의 결과를 함숫값으로 하는 기하적 함수(geometric function)는 정의역과 치역을 동

시에 관찰할 수 있으며 정의역을 달리하거나 점을 드래깅하면서 치역의 변화를 시각적으로 확인할 수 있으므로 함수의 정의역과 치역, 독립변수와 종속변수, 합성 함수나 역함수 등에 관한 시각적 이해를 얻을 수 있으며 학생들은 변환의 전후과정을 직접적으로 조작하며 관찰할 수 있기 때문에 함수가 지닌 다양한 속성을 역동적으로 이해할 수 있고 이를 바탕으로 한 개념적 도약이 이뤄질 수 있다고 주장하였다.

본 연구는 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$과 같은 함수를 수치적 함수의 관점이 아닌 기하적 함수의 관점에서 다루었으며 후속 연구를 통해 좀 더 다양한 함수를 기하적 함수의 관점에서 가르칠 수 있는 방안을 모색해야 할 것이다.

본 연구의 결론을 바탕으로 수학 교사 교육에 관하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 중학교 수학 교사들이 함수를 지도하는데 있어서 대수적 접근뿐 아니라 기하학적 접근 방식도 활용함으로써 학생들로 하여금 함수와 수학적 연결성에 관한 다양한 특징들을 경험할 수 있도록 하기 위해서는 현직교사와 예비교사를 위한 교육 프로그램이 개선되어야 할 것이다.

둘째, 많은 교사들이 역동적 기하프로그램을 원활하게 사용할 수 있도록 하는 교사연수프로그램을 강화해야 하며 이를 바탕으로 지필 환경의 한계를 극복하고 역동적 기하프로그램의 장점을 극대화할 수 있는 교수 학습 자료에 대한 연구가 계속 이루어져야 할 것이다.

셋째, 학생들이 개인적으로 또는 소집단별로 역동적 기하프로그램이 구비되어 있는 컴퓨터에 쉽게 접근할 수 있는 교실수업환경이 제공되어야 한다.

참고문헌

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 (2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

남선주(2006). **역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

류희찬 · 조완영(1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형소프트웨어의 활용에 관한 연구. 대한수학교육학회 **수학교육학연구,9**(1), 245-261.

류희찬 · 정보나(2000). 탐구형소프트웨어의 활용에 따른 중학교 기하영역의 지도계열에 관한연구. 대한수학교육학회 **학교수학, 2**(1), 111-14.4

류희찬(2004). 작도 문제 해결을 위한 분석 도구로서의 GSP. **청람수학교육,14**, 17-26.

박영훈(2009). **중학교 1학년 수학**. 서울: 천재문화.

손홍찬 · 류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. 대한수학교육학회 **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

이화영 · 류현아 · 장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색-초등학교 5학년을 중심으로-. 대한수학교육학회지 **학교수학, 11**(1). 131-145.

장혜원(2003). 중등수학의 대수와 함수 영역에서의 모델링. **청람수학교육, 11**, 41-66.

정수진(2007). **역동적 기하환경에서 중학생을 대상으로 분석법을 이용한 증명학습에 관한 연구: 작도문제를 중심으로**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문,

한인기(2010. 통권81호). 분석적 관점으로 중학교 수학교과서 읽기. **수학과 교육**. 95-102.

Farrell, A. (1996). Roles and behaviors in technology-integrated pre-calculus classrooms. *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 35-53.

Hearth, A. (1981). *A history of Greek mathe-*

matics(v.2). Dover Publications, Inc.

Hollebrands, K. et al. (2004). Teaching Mathematics with Technology : An Evidencebased Road Map for the Journey. Perspectives on the Teaching of Mathematics. *NCTM Sixty-sixth Yearbook*. 최계현(역) (2005). 대한수학교육학회 제49회 집중세미나.

Lew H.C. & Je, S.Y. (2010). Construction of quadratic curves using the analysis method on the dynamic geometry environment. Paper presented at the *5th East Asia Regional Conference of Mathematics Education*, Tokyo, Japan,18-22 August, 2010.

evaluation methods (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Loney, S. L. (1962). *Coordinate geometry*. London, UK: MacMillan and Company.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and*

Scott Steketee (2010). Variables and Functions: Using Geometry to Explore Important Concepts in Algebra. Proceedings of the *15th Asian Technology Conference in Mathematics*, Kuala Lumpur, Malaysia, 17-21 December, 2010.

Construction of Elementary Functions through Proportions on the Dynamic Environment

Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)
Yoon, Okyo (Graduate School of Korea National University of Education)

This study provides middle school students with an opportunity to construct elementary functions with dynamic geometry based on the proportion between lengths of triangle to activate students' intuition in handling elementary algebraic functions and their geometric properties. In addition, this study emphasizes the process of justification about the choice of students' construction method to improve students' deductive reasoning ability. As a result of the pilot lesson study, this paper shows the characteristics of the students' construction process of elementary functions and the roles the teacher plays in the process.

* key words : analysis method(분석법), construction(작도), dynamic geometric environment(역동적 기하환경), justification(정당화)

논문접수 : 2011. 1. 28
논문수정 : 2011. 3. 2
심사완료 : 2011. 3. 11

<부록 1> 면담질문지

일시	2010년 월 일
사전설명	저는 여러분이 하는 얘기를 하나도 놓치고 싶지 않기 때문에 녹음을 하고자 합니다. 녹음을 하지 않고 기록만 하다보면 의도하지 않게 여러분의 말을 바꿔버릴 수도 있고 놓쳐버리는 것도 생길 수 있기 때문입니다. 그래서 여러분이 괜찮다면 이 대화를 녹음하고자 합니다. 대화 도중에 언제든지 녹음기를 끄고 싶다면 이 버튼을 누르기만 하면 됩니다.
질문내용	* 다음 질문에 대하여 여러분의 솔직한 답변을 듣고자 합니다. 1. 1학년 수학 시간에 배운 작도에 대해 어떤 내용을 기억하고 있나요? 2. 그 내용들이 이후에 학습한 수학내용에 이용된 예를 알고 있나요? 3. 작도를 꼭 배워야 한다고 생각하나요? 4. 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 어떤 방법으로 그렸는지 설명할 수 있나요? 5. 작도와 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 관계있다고 생각하나요? 6. $\sqrt{x}\ (x \geq 0)$가 '수'와 '길이' 중 어떤 이미지로 생각되나요? 7. 수학 시간에 컴퓨터를 직접 사용해본 적이 있나요? 8. 수학에 대해 어떤 느낌이 드나요?
사후설명	질문에 대해 성실하고 솔직하게 답변해 주셔서 감사합니다. 이 자료는 수학 수업의 향상을 위한 연구 이외의 용도로 사용하지 않을 것입니다.

<부록 2> 활동지

활동주제	GSP를 이용하여 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 그리기
단계	활동내용
문제이해	$x>0$인 경우에 x의 길이에 대응하는 y의 길이를 작도할 수 있는가?
분석	1. y의 길이를 구하였다고 생각하고 두 길이 x와 y사이의 관계식을 다양하게 표현해보자. 2. 1번을 통해서 알게 된 사실을 적어보자. 3. 함수 $y=\frac{1}{x}$를 그릴 수 있는 방법을 적어보자.
종합	분석의 방법과 반대순서로 $y=\frac{1}{x}$을 작도하여라.
반성	1. $y=\frac{1}{x}$을 작도하는 데 가장 중요한 아이디어는 무엇인가? 2. 작도하면서 느낀 점을 적어보자.