한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제1호 (2011년 2월), 63–73

수학에서의 정의 개념 변화에 대한 철학적 분석

Conceptual Change of Definition in Mathematics: Philosophical Analysis

이지현 Ji Hyun Lee

기하학의 기본용어인 점과 선에 대한 유클리드의 사전적 정의에서 힐베르트의 수학적 정의 개념으로의 변화 과정을 살펴보았다. 이러한 수학에서의 정의 개념 변화의 인식론적 배경은 바로 수학적 대상의 존재 방식에 대한 실재론, 개념론을 거쳐 유명론에 도달하는 철학적 인식의 변화이다.

This paper analyses conceptual change from Euclid's dictionary definition to Hilbert's mathematical definition about primitive terms in Geometry. Realism, conceptualism, nominalism about mathematical objects are related to this conceptual change.

Keywords: 정의(definition), 실재론(realism), 개념론(conceptualism), 유명론(nominalism).

1 서론: 사전적 정의에서 수학적 정의로의 변화

정의는 수학 외의 타학문분야에도 존재하는데, 예를 들어 국어사전의 '정의'는 다음과 같다.

> 정의: 어떤 말이나 사물의 뜻을 명백히 밝혀 규정함. 또는 그 뜻. 뜻매김 ([4, p. 110에서 재인용]).

위와 같은 국어사전의 정의는 '정의'에 대해 보통사람들이 생각하는 상식을 표현한다. 수학에서의 '정의'도 물론 국어사전의 의미를 가지고 있으나, '뜻매김'에는 요구되지 않는 다른 특징을 가지고 있다. 따라서 위와 같은 국어사전의 정의는 '수학적 정의'의 설명으로서는 충분하지 않다. 그렇다면 '사전적 정의'와 '수학적 정의'의 차

MSC: 97A30, 97E20, 01A20 ZDM: A30
제출일: 2011년 1월 14일 수정일: 2011년 2월 22일 게재확정일: 2011년 2월 23일

이란 무엇이며, 또 수학에서의 정의 개념이 상식적인 정의 개념인 사전적 정의로부터 어떻게 구별되기 시작하였는가라는 질문을 할 수 있다.

사전적 정의에서 수학적 정의로의 변화는 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계에서의 '점'에 대한 정의에서 찾아볼 수 있다. 유클리드의 원론은 다음과 같은 점과 선의 정의 및 공리로부터 시작한다.

정의 1. 점은 쪼갤 수 없는 것이다.
정의 2. 선은 폭이 없는 길이이다.
공리 1. 임의의 두 점을 지나는 한 직선이 존재한다([13]).

유클리드의 정의는 점과 선이 무엇인가를 직관적으로 기술하는 사전적 정의이며, 이러한 기하학적 대상이 우리가 경험할 수 있는 물리적 대상이 아니라 이상화된 대상임을 전달한다. 그러나 힐베르트 공리체계에서 점과 선에 대한 유클리드와 같은 정의를 찾아볼 수 없다는 점은, 수학을 전공하지 않은 보통 사람들에게는 매우 놀라운 사실이다.

> 여기서 세 가지 대상의 체계를 고려하고자 한다. 첫 번째 대상을 점이라 하고, $A, B, C, \ldots$ 등으로 표기하자. 두 번째 대상은 직선이라 하며, $a, b, c, \ldots$ 등으로 표기하자. 세 번째 대상은 면이라 하고, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 등으로 표기한다. 또 점, 선, 면 사이의 어떤 특정 관계를 생각할 수 있는데, 이 관계를 '위에', '사이에', '평행', '합동', '연속'이라 한다. 기하학의 공리체계는 정확한 수학적 목적을 위하여 이러한 관계를 충분히 기술한다 ([14, p. 3]).
>
> 무정의 용어: 점, 선, 면, 위에 있음, 사이에 있음, 합동.
> Axiom Group : 결합, 순서, 합동, 평행, 연속 공리군.

힐베르트는 점, 선, 면을 세 종류의 대상에 대한 단순한 언어적 기호로 간주한다. 그리고 그는 점, 선, 면을 무정의 용어로서 '쪼갤 수 없는 것'과 같은 어떤 추상적인 개념을 별도로 상정하지 않는 대신, 공리체계가 이러한 무정의 용어에 대하여 가정되는 관계(결합, 순서, 합동, 평행, 연속)를 기술한다고 설명하였다. 따라서 힐베르트 공리체계에서 점 혹은 선에 대한 '정의'라 할 수 있는 것은 바로 이러한 공리체계 전체이다. 유클리드의 사전적 정의에서 점과 선이 어떤 것인지 직관적으로 이해할 수는 있으나, 이러한 정의를 이용하여 어떤 명제를 논리적으로 증명하기는 어렵다. 반면 '점'과 '선'에 대한 공리체계 전체로 제시되는 정의는, 그로부터 점과 선이 무엇인가를 알 수 없음에도 불구하고 그것을 이용하여 어떤 명제를 논리적으로 증명하는 것이

가능하다. 이렇게 유클리드 원론과 힐베르트 공리체계에서 점과 선에 대한 다른 정의 개념을 살펴볼 수 있다. 그런데 이러한 유클리드와 힐베르트의 다른 정의 개념에는, 예를 들어 점이 이상적인 플라톤적 대상인가 아니면 단지 약정된 공리체계를 만족하는 단순한 언어적 기호인가라는 관점의 차이가 내재해 있다. 이렇게 수학적 대상이 어떠한 방식으로 존재하는 것인가에 대한 논점은 자연스럽게 보편자에 대한 철학적 논의와 연결된다.

철학에서 보편자(universal)란 개별자(particular 혹은 individual)의 반대말이며[1), 기하학의 점, 선, 면 뿐 만 아니라 수, 집합, 함수 등을 비롯한 모든 수학적 대상이 보편자이다. 특히 철학사에서 보편자의 존재방식에 대한 철학적 견해는 크게 실재론(realism), 개념론(conceptualism), 유명론(nominalism)으로 나뉜다([1],[7, p. 104],[24]). 실재론은 보편자는 그것을 인식하는 마음이 존재하지 않는다 하더라도 그 자체로 존재한다고 생각한다([2, p. 22]). 반면 개념론에서는 보편자는 마음의 추상작용에 의하여 형성되는 것으로서, 인간의 마음에 의존하는 심적 존재이다([1], [24, pp. 194–195]. 마지막으로 유명론은 보편자에 대하여 인간 마음과 독립적인 존재성(실재론), 혹은 인간 마음 안에서의 존재성(개념론) 둘 모두를 부정한다. 유명론에서 보편자란 편의상의 언어적 기호에 불과하며, 이러한 언어적 기호가 참조 혹은 지시하는 보편자는 존재하지 않는다. 실재론적 관점에서 점은 종이에 그려진 불완전한 표상 배후에 실재하는 이상적인 플라톤적 대상이다. 반면 개념론에서는 점을 종이에 찍힌 점에 대한 경험에서 추상화할 수 있는 정신적 이미지라고 받아들인다. 반면 유명론에서 점은 어떤 추상적인 개념이 아닌 하나의 구체적 기호이다. 이렇게 '점' 이라는 수학적 대상의 존재 방식에 대한 실재론, 개념론, 유명론의 차이는 '점' 에 대하여 무엇을, 그리고 어떻게 정의하는가라는 정의의 내용과 형식의 차이로 나타난다[2).

유클리드 원론과 힐베르트의 공리체계는 각각 고대 그리스와 현대수학의 공리적 방법을 대표한다. 특히 Wilder([23, pp. 116–117])는 고대 그리스에서 현대수학으로의 공리적 방법의 변화를 기본용어의 성격 차이로 설명하였다. 유클리드 원론에서 점, 선, 면 등의 기본용어는 그에 대한 사전적 정의에서 알 수 있듯이, 단 하나의 공간적 모델을 지시하는 상수에 불과하였다. 모든 용어에 대한 정의를 시도한 유클리드와는 달리, 파스칼은 이러한 기하학의 기본용어를 사전적 정의 없이 '정의하지 않고 남겨두는 용어'

1) 보편자와 개별자는 다음과 같이 비교할 수 있다. 개별자는 적용되는 대상이 하나이나, 보편자는 적용되는 대상이 다수라는 점에서 일반적이다. 개별자는 감각경험이 가능한 구체적인 것인 반면에, 보편자는 감각 경험이 불가능한 추상적인 것이다. 또 개별자를 지시하는 단어는 고유명사이나, 보편자를 지시하는 단어는 일반명사이다([1, pp. 16–17], [24, p. 194]).

2) Robinson([20, pp. 7–11])에 따르면, 보편자의 존재방식에 대한 실재론, 개념론, 유명론의 논점은 그것을 지시하는 일반어의 정의 문제에 그대로 반영된다.

로 수용하였다. 그리고 현대수학에 이르러서야 어떤 공리체계의 기본용어는 그 체계를 만족하는 임의의 변수로 명확하게 인식되었다. 이상과 같은 논의에서, 이 논문은 먼저 수학적 정의가 사전적 정의와 구별될 수 있는 특징을 살펴본다. 그리고 기하학에서 점과 같은 기본용어가 유클리드의 사전적 정의로 서술되는 하나의 공간적인 모델을 지시하는 '상수' 에서 '정의하지 않고 남겨두는 용어' 를 거쳐 공리체계를 만족하는 임의의 '변수' 라는 현대 수학적 인식으로 변화하는 수학사적 흐름과 관련하여, 보편자로서 수학적 대상의 존재 방식에 대한 실재론, 개념론, 유명론으로 흐르는 철학적 인식 변화를 살펴본다. 이러한 철학적 인식의 변화는 상식적인 사전적 정의에서 수학적 정의로의 변화에 대한 인식론적 배경이다. 마지막으로 수학에서의 정의 개념 변화에 대한 철학사적 분석에서 얻는 교육적 시사점을 논의한다.

2 사전적 정의와 수학적 정의

Alcock과 Simpson([6, p. 28])은 수학적 정의의 특징을 설명하기 위하여, 먼저 다음과 같이 백과사전에서의 '백조' 정의를 살펴보았다.

> 백조: 백조속의 큰 물새로 유연한 긴 목과 물갈퀴가 있는 발을 가지고 있으며, 대부분의 종들이 하얀 깃털을 가지고 있다.

Alcock과 Simpson은 '백조' 의 사전적 정의에서는 정의항을 만족하는 모든 것을 백조라고 할 수도 없으며, 또 거꾸로 모든 백조가 이 정의항을 만족하는 것도 아니라는 점을 지적하고 있다. 특히 사전적 정의는 '기술' 이 특징인데, 즉 정의되는 대상은 그에 대한 정의 이전에 이미 존재하며, 정의의 목적은 그 대상을 기술하는 것이다([15, p. 39]). 이렇게 사전적 정의는 '기술' 이 목적이므로, 정의항과 피정의항이 정확하게 일치할 필요가 없다. 그러므로 사전적 정의에서 유도할 수 있는 어떤 결론이 모든 백조들에게 성립하는 것도 아니며, 또 모든 백조에게 성립하는 어떤 결론을 사전적 정의로부터 유도할 수 있다는 보장도 없다. 그러나 일상적 상황에서 사람들은 이러한 사전적 정의를 이용하여 백조에 대해 생각하고 추론하는데 전혀 어려움을 겪지 않는다.

반면 수학적 정의는 사전적 정의와 달리, 그 정의항을 만족하는 모든 대상이 해당하는 범주에 속하며, 또 그 범주에 속하는 모든 대상이 그 정의항을 만족하게 된다. 수학적 정의는 이렇게 정의항과 피정의항이 정확하게 같은 것이기 때문에, 정의에서 연역된 결론은 그 범주에 속하는 모든 대상에 대해 성립한다.

수학에서는 보통 정의를 '만약 [x에 대한 정의성질] 이면, [대상] x는 [정의되는 용어] 이다' 라고 서술한다. 그런데 일계논리에서 'x는 [정의되는 용어] 이다' 를 $D(x)$로, 또 'x

에 대한 정의성질'을 $P(x)$로 표기하면, 위의 정의 문장은 정확히 다음을 의미한다([15, p. 41]).

$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow D(x))$$

따라서 수학적 정의가 '…이면, …이다' 라는 문장으로 서술되어 있더라도, 그것은 함의보다는 동치 혹은 'if and only if' 문장으로서 이해해야 한다.

3 수학적 대상의 존재 방식과 정의에 대한 철학적 인식 변화

3.1 플라톤적 이데아로서의 유클리드의 관점

고대 그리스의 Plato은 경험 세계와 분리되어 초월적으로 실재하는 형상 혹은 이데아가 존재론적으로, 또 인식론적으로 필요하다고 생각하였다([1, p. 18]). 오늘날의 일상적 사고에도 Plato이 생각했던 형상과 유사한 것을 찾아볼 수 있다. 예를 들어 보통 사람들은 일상적인 대화에서, 일반 명사에 해당하는 실재하며 불변인 존재를 무의식적으로 가정한다([11, p. 125]). 서양 사상사에서 정의의 개념은 Plato의 대화편에서 Socrates의 'X가 무엇인가?' 라는 질문에 대한 대답으로 처음 등장하였다([20, pp. 190–191]). 이렇게 '정의' 개념은 고대 그리스의 실재론자인 Socrates, Plato, Aristotle에 의해 처음 전개되었다.

Plato은 정의는 형상에 대한 최종적 탐구 결과이며, 형상 혹은 이데아를 기술하는 것이라고 생각하였다([5, pp. 314–315]). 따라서 정의의 추구는 지식의 최고 목표라고 간주하였다. 역시 실재론적 관점에서, Aristotle는 정의를 사물의 본질에 대한 설명으로 보았다([20, p. 8]). 특히 자연과학과 관련하여 Aristotle은 정의에 사물이 지닌 속성을 설명할 수 있는 원인이 담겨져 있으며, 정의되는 사물의 모든 속성을 그에 대한 정의로부터 논증할 수 있다고 생각하였다([4, pp. 48–50]). 또 Aristotle는 범주화와 논증의 용이성을 위하여 '류'와 '종차'에 의한 정의규칙을 강조하였다([4, p. 13]).

Plato은 수학적 대상을 인간의 정신과 독립적으로 실재하는 형상의 지위를 가진 것으로 이해하였다([2]). 우리가 연필로 종이에 찍는 어떠한 점도 크기를 가지고 있으며, 연필로 그려진 어떠한 선도 폭을 가지고 있다. 따라서 '쪼갤 수 없는 것'과 '폭이 없는 길이' 라는 유클리드의 정의는 점과 선이 경험적 대상이 아닌 플라톤적 형상임을 전달한다. 이렇게 기하학적 대상에 대한 실재론적 인식은 유클리드가 순환적 정의의 위험에도 불구하고 점과 선을 정의할 수 있다고 생각하였던 이유를 설명하고 있다. Lucas([16, p. 12])도 수학적 대상에 대한 실재론적 관점이 정의에 어떻게 반영되는가에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다. "어떤 수학적 대상이 실재론적 관점에서 어딘가에 객관적으로

존재하는 것이라면, 그 수학적 대상은 정확하게 명시되지 않더라도 지시될 수 있다. 예를 들어 실수가 객관적으로 실재하는 대상이라면, 실수는 유리수들의 데데킨트 절단으로 정의할 필요가 없으며 쉽게 이해할 수 있는 평범한 용어들로 지시하면 충분하다." 이렇게 Lucas는 수학적 대상의 존재방식에 대한 실재론적 이해는 그 수학적 대상을 완벽하게 특징짓지 않더라도 지시 혹은 정의가 가능하다는 생각을 뒷받침한다고 하였다.

이와 같이 서양 사상사에서 최초로 등장한 정의 개념인 실재론적 정의는 '대상의 본질에 대한 기술' 이었으며, 특히 실재론적 정의는 대체로 사전적 정의와 일치하는 것이다 ([8, p. 175]).

3.2 마음의 구성물로서의 파스칼의 관점

단어 idea는 여러 의미를 가지고 있다. 그런데 이러한 idea가 갖고 있는 여러 의미들의 공통점은 바로 마음속의 어떤 것 혹은 마음과 관련된다는 점이다. 원래 idea의 어원은 '보다' 를 뜻하는 그리스어 idea로서 시각과 관련된 것이었으나, Plato이 본질이나 본성과 같은 뜻으로 사용함으로써 지각의 대상이 아닌 영원한 형상을 의미하게 되었다. 그런데 Kenny([1, pp. 40–41에서 재인용])에 의하면, 인간의 마음속의 내용물이라는 idea가 가지고 있는 현재 의미는 바로 최초의 근세 철학자인 데카르트로부터 연유하는 것이다. 이러한 idea에 대한 '인간 마음과 독립적으로 존재하는 형상' 에서 '인간 마음속의 내용물' 으로의 변화는 고대 그리스의 Plato의 실재론적 관점과 최초의 근대 철학자 데카르트의 개념론적 관점[3]의 차이를 보여주는 예이다([1, pp. 40–41])

17세기에 이르러서도 정의는 여전히 Plato와 Aristotle의 실재론에서 완전히 자유롭지 못하였다. Bacon과 Hobbes는 정의는 모호하고 애매한 언어를 명확하게 하는 수단이며, Plato의 대화편에서와 같이 본질에 대한 의사소통이 아니라 모호성을 해소하며 의미를 고정하는 역할을 한다고 보았다. 반면 17세기 데카르트주의자들의 정의의 역할에 대한 관심의 초점은 의미론적 명료성의 획득이 아닌 연역 추론에서의 역할에 있었다. 데카르트주의자들은 정의가 이론적으로는 불필요한 축약이며, 정의의 가치는 오직 긴 정의식 대신 짧은 이름으로 대치함으로서 획득하는 표기상의 경제성에 있다는 새로운 정의 개념을 개진하였다. Hobbes는 그로부터 나머지 지식을 연역할 수 있는 탐구의 첫 단계를 정의라고 보았으나, 데카르트주의자들은 이러한 탐구의 첫 단계가 바로 정의하지 않는 용어를 연결하는 공리라고 생각하였다. 그리고 이때 정의는 정의하지 않는 용어의 논리적 복합체를 보다 간단한 표현으로 대치하는 규칙으로 도입된다고 보았다([5, p. 318]).

3) 데카르트는 보편자 문제에 대하여 자신의 견해를 상세하게 전개하지도 또 일관된 입장을 고수하지도 않았으나, 그의 관념이론에 따르면 보편자 문제에 대한 데카르트의 공식 입장은 개념론으로 간주된다 ([1, pp. 46–48]).

Aristotle와는 달리 데카르트는 추론의 기본 단위로 용어 혹은 류를 강조하지 않았으며, 명제적 단위를 옹호하였다. 데카르트에 있어서 가장 단순한 추론은 두 명제사이의 함의에 대한 직관적 인식이었다. 결과적으로 공리가 정의 대신 연역 과학의 기초로 간주되었으며, 실재적 정의는 Plato이 생각했던 바와 같은 지식의 최고 목표가 될 수 없었다. 특히 데카르트 지식론의 근저에 깔려 있는 정의 개념은 파스칼의 저서 「기하학의 정신(De l' Esprit géométrique)」에 잘 표현되어 있다.

파스칼은 정의를 유명론적 정의(définitions de nom)와 실재적 정의로 구분하였다. 예를 들어 '짝수' 를 '2로 나누어 나머지가 없는 수' 라고 정의하는 것이 유명론적 정의이다([5, pp. 318–319]). 이러한 유명론적 정의에서는 피정의항 '짝수' 와 정의항 '2로 나누어 나머지가 없는 수' 는 필요충분조건이며([4, p. 51]), 피정의항을 정의항으로 대치할 수 있다. 특히 파스칼은 증명에서는 언제나 머릿속으로 피정의항에 정의항을 대치시켜 생각해야 한다는 것을 강조하였다([17, p. 204]).

파스칼은 본질을 기술하는 실재론적 정의가 아닌 유명론적 정의만이 과학에서 필요한 유일한 정의라고 생각하였다([5, pp. 318–319]). 앞서 살펴보았듯이 '기술' 을 목적으로 하는 사전적 정의와 구별되는 수학적 정의의 특징이 바로 '정의항 = 피정의항' 이라는 것임을 상기한다면, 유명론적 정의에 주목한 파스칼의 인식은 수학적 정의에 대한 형식적 인식의 시작으로 볼 수 있다. 뿐만 아니라 파스칼은 기하학에서 '정의하지 않고 남겨두는 용어' 가 필요함을 분명하게 인식하고 있었다. 파스칼은 기하학자들이 공간, 시간, 운동, 수, 같음과 같은 용어는 자연적인 인지에 비추어서 명백하고 확실하므로 정의하지 않는다고 지적하고 있다.

> 기하학에서는 다음과 같은 것들, 공간, 시간, 운동, 수, 같음 중 어떤 것도, 그리고 이와 비슷한 수많은 다른 사항들을 정의하지 않는다. 왜냐하면 이상의 용어들은 언어를 이해하는 사람들에게는 그것들이 의미하는 대상을 너무나도 자연스럽게 가리킴으로 거기에 설명을 더하려고 하면 그것들을 밝히기보다 오히려 더 모호하게 만들 것이기 때문이다. 그러한 원초적 말들을 정의하려는 사람들의 담론보다 더 무력한 것은 없기에 하는 말이다([18, p. 157]).

비록 파스칼이 자연적인 인지에 비추어 명백하고 확실한 정의하지 않는 용어의 예로 기하학의 점과 선을 제시하지는 않았으나, 그가 점과 선을 이러한 부류의 용어에 속한다고 생각할 것이라는 점은 확실해 보인다. 이렇게 기하학의 기본용어를 정의하지 않는 용어로 수용한 파스칼의 견해는 점과 선을 인간의 마음과 독립적으로 실재하는 형상이 아니라 마음의 추상 작용에 의해 형성된 마음의 구성물로서 생각하는 개념론적 관점이 반영되어 있다. 특히 자연적인 인지로 알 수 있는 '정의하지 않는 용어' 로서의 점과 선

은 인간의 개념에 의존하는 것이므로, Plato적 이데아와 같이 영구적으로 고정된 것의 지위를 가질 수는 없었기에 가변성을 암묵적으로 허용할 수밖에 없었다. 물론 파스칼은 공간 직관의 한계를 벗어나 점과 선을 이해하지는 못하였으나, 이러한 '정의하지 않고 남겨두는 용어' 는 가변성을 암묵적으로 허용함으로서 유클리드의 점과 선에 대한 '명시적 상수' 라는 단순성에서 벗어나게 된 계기가 되었다.

3.3 언어적 기호로서의 힐베르트의 관점

유명론은 오직 단어만이 일반적이며 보편자의 기능을 한다고 생각한다. 그런데 한 단어가 가진 일반성은 결국 그 단어로 불리는 다수의 개별적인 사물 사이의 유사성에 의존하므로, 유명론은 이러한 한 단어로 불리는 개별적인 사물 사이의 유사성을 설명해야 하는 과제를 가지고 있다([24, pp. 203–205]). 이에 대하여 실재론자 Aristotle는 하나의 일반어로 지시되는 대상은 적어도 하나의 객관적인 공통 특성을 공유하고 있다고 전제하였다. 그러나 비트겐슈타인은 Aristotle가 가정한 공통 특성을, 게임을 예로 들어 다음과 같이 비판하고 있다. 그는 보드 게임, 카드 게임, ball game, 올림픽 게임을 열거하면서, 과연 모든 게임에 있어 공통된 특성을 찾을 수 있는가를 질문한다. 여기서 몇몇 게임이 비슷한 여러 가지 특성을 가질 수 있으나, 모든 게임에 '똑같은' 특성은 하나도 갖고 있지 않다. 여기서 비트겐슈타인은 이러한 게임이 공통 특성이 아닌 '가족유사성(family resemblances)' 을 공유한다고 지적하였다. 한 가족의 구성원들은 하나의 공통적인 속성(따라서 하나의 공통적인 본질)을 갖고 있지는 않지만, 가족임을 알아볼 수 있는 일련의 유사성을 공유한다. 한 단어로 불리는 다수의 개별적인 사물에 대해서도 그는 이러한 사물이 '공통 본질' 이 아닌 이러한 가족 간에서 느낄 수 있는 것과 같은 유사성만을 공유한다고 보았다. 따라서 이러한 비트겐슈타인의 관점에서 어떤 단어의 본질을 정초하고자 하는 시도는 무의미하며, 그는 한 단어의 의미는 '본질을 묻는 질문' 대신에 그 단어가 다양한 상황에서 어떻게 올바르게 사용되고 있는가를 살펴봄으로서 규명할 수 있다고 생각하였다([22, p. 130]). 비트겐슈타인은 어떤 단어의 의미는 그것의 사용에 존립한다고 다음과 같이 주장한다.

> 나는 '어떤 단어의 의미' 를 '어떤 단어의 사용' 으로 대치하는 것을 제안하고자 한다. 왜냐하면 '어떤 단어의 사용' 이야말로 '어떤 단어의 의미' 가 뜻하는 것을 구성하는 것이기 때문이다. 따라서 어떤 단어를 이해한다는 것은 그 단어의 사용을 아는 것이다. 한 단어의 사용은 킹의 말의 사용이 체스의 규칙으로 정해지는 것처럼 규칙으로 정의된다([17, p. 425에서 재인용]).

그런데 힐베르트 공리체계에서 점과 선이라는 단어의 의미는, 다음과 같이 점과 선의 본질이 아니라 그것을 어떻게 다룰 수 있는가라는 '사용' 으로 결정된다.

> 점, 선, 면은 무정의 용어이다. 기하학의 탐구는 그것의 실체 혹은 내용에 기초하는 것이 아니라, 공리체계에 의해 명시된 그것의 성질에 기초한다. 형식적 취급에서 점, 선, 면은 실체가 없는 대상이며, 중요한 것은 그것이 어떻게 행동하는가이다. 따라서 앞으로 우리는 공리에서 언급된 점, 선, 면의 성질만을 이용한다. 즉 점과 선의 어떤 성질이 아무리 직관적으로 명확해 보인다고 하더라도, 공리 혹은 공리에서 연역될 수 있는 성질이 아니면 사용할 수 없다([19, p. 123]).

이 점에서 힐베르트의 점과 선에 대한 공리적 정의는 바로 비트겐슈타인의 의미에 대한 인식과 맞닿아있다([16, p. 429], [10, p. 189])[4]. 여기서 점과 선에 대한 유클리드와 힐베르트의 정의가 전달하는 지식을 비교할 수 있는데, 점과 선에 대한 사전적 정의가 본질에 대하여 기술하는 명제적 지식을 전달한다면 힐베르트의 공리적 정의는 바로 기호로서의 점과 선을 다루는 규범적 규칙을 제공하는 방법적 지식을 전달한다([5, pp. 321–322]).

4 결론 및 제언

유클리드의 원론은 점과 선에 대한 사전적 정의의 진술에서 시작한다. 그러나 힐베르트 공리체계에서는 점과 선을 이러한 사전적 정의가 불필요한 무정의 용어로 간주하여 공리체계 전체로 정의한다. 이렇게 기하학의 기본용어인 점과 선에 대한 유클리드의 '사전적 정의' 에서 힐베르트의 '수학적 정의' 로의 변화에 대한 인식론적 배경으로서, 이 논문에서는 실재론, 그리고 개념론을 거쳐 유명론으로 흐르는 수학적 대상의 존재방식에 대한 철학적 인식의 변화를 살펴보았다.

유클리드는 점과 선에 대하여 '쪼갤 수 없는 것' 등의 사전적 정의를 시도하였다. 순환적 정의의 위험에도 불구하고 위와 같은 정의를 제시하였던 유클리드의 시도는, 수학적 대상에 대한 실재론적 이해와 깊은 관련성이 있다. 본질을 기술하는 실재론적 정의가 아닌 '피정의항 = 정의항' 의 특성을 가진 유명론적 정의를 강조한 파스칼의 인식은 수학적 정의에 대한 형식적 인식의 시작으로 평가된다. 또 파스칼은 모든 용어를 정의하고자 시도하였던 유클리드와는 달리 '정의하지 않고 남겨두는 용어' 의 필요성을 인식하였다. 그리고 힐베르트는 점과 선을 유클리드의 사전적 정의에서 전달하는 바와 같은 어떤

---

4) 사실 수학의 공리적 정의는 철학에서 어떤 단어의 의미가 '사용' 에 존립함을 논하였던 비트겐슈타인의 「철학적 탐구(Philosophical investigations)」 보다 시기적으로 상당히 앞선 것이었다([10, p. 189]).

추상적인 개념을 별도로 상정할 필요가 없는, 공리체계를 만족하는 변수 기호로 보았다. 이러한 점과 선의 정의에 대한 유클리드, 파스칼, 힐베르트의 다른 접근은 수학적 대상의 존재 방식에 대한 실재론, 개념론, 유명론적 관점과 밀접한 관련이 있다.

이상과 같이 본 논문에서는 기하학의 점과 선에 대하여 사전적 정의에서 수학적 정의로의 변화에 대한 인식론적 배경을 살펴보았다. 특히 학생들에게도 '사전적 정의' 에서 '수학적 정의' 로의 관점 변화는 쉬운 것이 아니다. 많은 연구([6], [9], [12])들이 대학생들도 사전적 정의와 수학적 정의의 차이를 잘 알지 못한다는 사실을 보고하고 있다.

Tall([21])은 학교수학에서 학생들은 삼각형, 사각형, 직사각형에 대한 정의를 수학적 정의보다는 '기술' 로 이해한다고 지적하였다. Edwards와 Ward([9, p. 421])는 수학적 정의에 대한 학생들의 부족한 이해는 마치 어떤 구체적인 실물을 지시하듯이 정의를 설명하는 교수방식에도 그 원인이 있으며, 예비 교사들이 수학적 정의의 개념을 정확하게 이해하여야 한다고 하였다.

조영미([4, pp. 95–116])에 의하면, 학교수학에서 정의라는 용어는 중학교 2학년 논증기하부분에서 처음으로 등장하며 특히 논증기하를 기점으로 '정의' 에 대해 요구되는 정의기능이 달라진다. 즉 논증기하에서는 증명을 다루면서, 기하학적 도형의 정의에 대하여 그 이전과는 달리 '피정의항 = 정의항' 이라는 수학적 정의의 특성이 요구된다[5]. 그럼에도 불구하고 우리나라 중학교 2학년 교과서에서는 '증명' 과 같이 등장하는 '정의' 용어에 대하여 '용어의 뜻을 명확하게 정한 것' 이라고 설명하는 데 그치고 있다.

사전적 정의에서 수학적 정의로의 변화에 내재한 인식론적 배경에 대한 본 연구의 분석은, 학생들이 '정의' 자체를 무엇이라고 이해하는가도 매우 중요한 문제임을 시사하고 있다. 본 연구의 이론적 분석이 정의 개념 지도의 개선과 이에 대한 연구의 유용한 토대가 되기를 기대한다.

참고 문헌

1. 이재영, 영국 경험론 연구: 데카르트에서 리드까지, 서울: 서광사, 1999.
2. 임재훈, 플라톤의 수학교육철학, 서울: 경문사, 2004.
3. 조영미, 직관기하의 정의 사용 양태 분석과 증명 지도에 대한 시사점, 수학교육학연구, 10(2), 215-227, 2000.
4. 조영미, 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구, 서울대학교 박사논문, 2001.
5. Abelson, R., "Definition." In P. Edwards(Ed.), *The encyclopedia of philosophy* (Vol. 2, pp. 314–324), New York: The Macmillan Company, 1967.

5) 예를 들면 '이등변삼각형' 이라는 용어를 '두 변의 길이가 같은 삼각형' 라는 정의항으로 대치하는 것이 증명에서 필요하다([3, p. 215]).

6. Alcock, L. & A. Simpson, "Definitions: Dealing with categories mathematically," *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 28–34. 2002.
7. Barker, S. F., 수리철학(이종권 역), 서울: 종로서적, 1964/1983.
8. Copi, I. M., 논리학 입문(민찬홍 역), 서울: 이론과 실천, 1972/1998.
9. Edwards, B. S. & M. B. Ward, "Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions," *The American Mathematical Monthly*, 111, 411--424, 2004.
10. Gray, J., *Plato's ghost: The modernist transformation of mathematics*, New Jersey: Princeton University Press, 2008.
11. Guthrie, W. K. C., 희랍 철학 입문: 탈레스에서 아리스토텔레스까지(박종현 역), 서울 : 서광사, 1960/2004.
12. Harel, G., A. Selden, & J. Selden, "Advanced mathematical thinking: Some PME perspectives," In A. Gutierrez, P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, Sense Publishers, 2006.
13. Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, New York: Dover Publications.
14. Hilbert, D., *Foundations of geometry* (L. Unger Trans., P. Bernays Rev.), Illinois : Open court publishing company, 1899/1997.
15. Hunter, D. J., *Essentials of discrete mathematics*, London: Jones and Bartlett Publishers, 2009.
16. Lucas, J. R., *The Conceptual roots of mathematics*, New York: Routledge, 2002.
17. Muller, F. A., "The Implicit definition of the set-concept," *Synthese*, 138(3), 417–451, 2004.
18. Pascal, B., Pascal의 편지 (이환 역), 서울: 지훈출판사, 2005.
19. Prenowitz, W. & M. Jordan, *Basic concepts of geometry*, New York: Blaisdell, 1965.
20. Robinson, R., *Definition*, Oxford University Press, 1954.
21. Tall, D., *Construction of objects through definition and proof*, PME Working Group on AMT, Durham, NH. 1992.
22. Tugendhat, E., 논리-의미론적 예비학(하병학 역), 서울: 철학과 현실사, 1983/1999.
23. Wilder, R. L., "The role of the axiomatic method," *The American Mathematical Monthly*, 74(2), 115–127, 1967.
24. Woozley, A. D., "Universals," In P. Edwards(Ed.), *The encyclopedia of philosophy* (Vol. 8, pp.194-206), New York: The Macmillan Company, 1967.

이지현 서울 전자고등학교
Seoul Electronics High School
E-mail: leeji_hyun@hanmail.net