한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제1호 (2011년 2월), 1–13

劉益과 洪正夏의 開方術

Liu Yi and Hong Jung Ha's Kai Fang Shu

홍성사 Sung Sa Hong 홍영희 Young Hee Hong 김영욱* Young Wook Kim

조선 산학에서 다항방정식의 해법에 가장 큰 영향을 준 것은 《楊輝算法》의 田畝比類乘除捷法에 인용된 劉益의 《議古根源》에 들어있는 開方術이다. 이 논문은 《楊輝算法》에 설명되어 있는 開方術을 조사하여 增乘開方法은 조립제법과 관계없이 이항식 $(y+\alpha)^n$ 을 전개하는 과정에서 이루어진 것을 밝혀낸다. 이어서 《楊輝算法》을 연구한 洪正夏(1684～?)가 그의 《九一集》에서 劉益–楊輝와 《算學啓蒙》의 결과를 확장하여 增乘開方法을 완벽하게 정리한 것을 밝혀낸다.

In *Tian mu bi lei cheng chu jie fa*(田畝比類乘除捷法) of *Yang Hui suan fa*(楊輝算法), Yang Hui annotated detailed comments on the method to find roots of quadratic equations given by Liu Yi in his *Yi gu gen yuan*(議古根源) which gave a great influence on Chosun Mathematics. In this paper, we show that 'Zeng cheng kai fang fa'(增乘開方法) evolved from a process of binomial expansions of $(y+\alpha)^n$ which is independent from the synthetic divisions.

We also show that extending the results given by Liu Yi – Yang Hui and those in *Suan xue qi meng*(算學啓蒙), Chosun mathematican Hong Jung Ha(洪正夏) elucidated perfectly the 'Zeng cheng kai fang fa' as the present synthetic divisions in his *Gu il jib*(九一集).

Keywords: Solutions of polynomial equations, Liu Yi(劉益), Yang Hui(楊輝), Xiang jie jiu zhang suan fa(詳解九章算法), Yang Hui suan fa(楊輝算法), Tian mu bi lei cheng chu jie fa(田畝比類乘除捷法), Yong le da dian(永樂大典), Suan xue qi meng(算學啓蒙), Zeng cheng kai fang fa(增乘開方法), Hong Jung Ha(洪正夏), Gu il jib(九一集).

0 서론

《九章算術》(Jiu zhang suan shu)에서 시작된 중국 산학은 劉徽(Liu Hui)의 注에 의하여 수학화가 이루어지고, 이어서 저술된 《海島算經》(Hai dao suan jing)과 함께

*교신저자
*이 논문의 교신저자는 고려대학교 교내연구비의 지원을 받았음.
MSC: 01A25, 01A50, 12-03, 12D10, 12E12
제출일: 2011년 1월 8일 수정일: 2011년 2월 15일 게재확정일: 2011년 2월 19일

중국 산학의 근간을 이룬 것은 잘 알려져 있다. 이 후 王孝通(Wang Xiao Tong)이 《輯古算經》(Ji gu suan jing)을 저술하여 다항방정식을 4차까지 확장하였지만, 1801년 張敦仁(Zhang Dun Ren)이 《緝古算經細草》를 출판하기까지 중국 산학에 큰 영향을 미치지 못하였다.

한편 송, 원대의 수학은 천원술에서 시작하여 사원술이 도입되어 방정식의 구성이 완벽하게 정리된 것과 동시에 다항방정식의 해법마저 밝혀지게 되어 중국 산학에서 가장 화려한 수학적 업적을 이루었다. 그러나 13세기 전에 얻어진 이러한 결과들의 초기 저작은 모두 전해지지 않았고, 단지 정리되어 일부만 李冶(Li Ye, 1192～1279)의 《測圓海鏡》(Ce yuan hai jing, 1248년 완성, 1282년 간행)과 《益古演段》(Yi gu yan duan, 1259), 秦九韶(Qin Jiu Shao, 1202～1261)의 《數書九章》(Shu shu jiu zhang, 1247), 楊輝(Yang Hui)의 《詳解九章算法》(Xiang jie jiu zhang suan fa, 1261), 《楊輝算法》(Yang Hui suan fa, 1274～1275), 朱世傑(Zhu Shi Jie)의 《算學啓蒙》(Suan xue qi meng, 1299), 《四元玉鑑》(Si yuan yu jian, 1303) 등에 전해지고 있다.

조선에서는 이 중에 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》과 함께 安止齋(An Zhi Zhai)의 《詳明算法》(Xiang ming suan fa, 1373)만 연구되었다. 이들도 17세기 중엽에는 계속된 외세의 침입으로 거의 실전될 상태까지 이르렀는데, 金始振(1618～1667)이 1660년 《算學啓蒙》을 중간하면서 《楊輝算法》을 찾아내어 조선 산학자들이 이들을 다시 연구할 수 있게 되었다([9]). 《算學啓蒙》에 들어있는 천원술은 朴繘(1621～1668)의 《算學原本》(1700)부터 시작하여 洪正夏(1684～?)의 《九一集》에 확장되어, 조선 산학의 방정식론은 명대의 중국과 달리 송, 원대의 전통을 이어 발전하였다([5], [9]).

다항방정식의 해법은 전술한 《數書九章》, 《詳解九章算法》, 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》에 다루어져 있다. 楊輝가 《詳解九章算法纂類》에 賈憲(Jia Xian)의 제곱근과 세제곱근을 구하는 釋鎖開方法, 增乘開方法을 인용함으로써 賈憲의 업적이 전해지게 되었다. 또 《詳解九章算法》중에 실전된 少廣章에 들어있는 것으로, 위의 增乘開方法과 이항계수를 계산한 賈憲의 삼각형과 함께 네제곱근을 增乘開方法으로 풀어놓은 것이 《永樂大典》(Yong le da dian)에 인용되어 있는데, 增乘開方法 대신에 遞乘開方法이라 하였다. 《算學啓蒙》도 제곱근과 세제곱근을 增乘開方法으로 풀어 놓았는데 용어는 사용하지 않았다. 秦九韶는 《數書九章》에서 일반 다항방정식을 역시 增乘開方法으로 풀었지만 그는 正負開三乘方이라 불렀다. 한편 楊輝는 《楊輝算法》의 田畝比類乘除捷法 하권에서 지금은 실전된 劉益(Liu Yi)의 《議古根源》(Yi gu gen yuan)에 들어있는 일반 2차방정식을 연단법으로 구성하고 그 해법을 인용하는데 다

음과 같이 시작하였다([6], [7]).

> 中山劉先生序謂 算之術入則諸門出則直田 議古根源故立演段百問
> 蓋欲演算之片段也 知片段則能窮根源 既知根源以於心無懞昧矣
> 今姑摘數問詳註圖章 以明後學其餘自可 引而伸之觸類而長 不待盡術也

전술한 《詳解九章算法》 少廣章에 增乘開方法에 대한 圖解가 들어있을 것으로 추정되지만 현재 전해지는 것으로 가장 오래된 것은 田畝比類乘除捷法에 들어있는 일반 2차방정식의 해법에 대한 圖解이다. 《議古根源》의 "故立演段百問"이 뜻하는 것이 해법에 관한 것도 포함되었는지 알 수 없지만 楊輝가 少廣章에서 인용한 것들을 보면 그가 增乘開方法에 대하여 賈憲, 劉益의 결과들을 충분히 연구한 것이 나타남으로 그의 해법에 대한 圖解는 楊輝가 첨가하였을 가능성이 큰 것으로 추정된다. 따라서 우리는 이 圖解를 劉益-楊輝 圖解라 부르기로 한다.

이 논문의 목적은 增乘開方法이 얻어진 과정을 劉益-楊輝 圖解에 의하여 새로 정리하고 이어서 楊輝의 방법이 조선 산학에 끼친 영향을 조사하는 것이다.

논문은 두 절로 나누어, 첫째 절에서는 增乘開方法이 조립제법의 형태로 정착된 것이 제곱근, 세제곱근을 구하는 과정에서 "增乘" 혹은 "遞乘"이 이항식 $(y+\alpha)^n$을 전개하는 과정에서 얻어지는 것을 보이고 이의 확장으로 劉益-楊輝 圖解가 도입된 것을 밝혀낸다. 두 번째 절에서는, 17세기 조선에 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》, 程大位(Cheng Da Wei, 1533~1606)의 《算法統宗》(Suan fa tong zong, 1592)만 들어와 있는 상황에서, 洪正夏가 이 산서들을 연구하여 그의 《九一集》에 일반 고차방정식의 해법으로서 增乘開方法을 현재 우리가 사용하고 있는 조립제법 형태로 정리하였고 또 천원술을 사용하여 방정식을 구성하였음을 보임으로써 그의 방정식론은 18세기 초 가장 우수한 결과임을 밝혀낸다.

조선 산학에 관한 史料는 《韓國科學技術史資料大系 數學編》([3]), 중국 산학은 《中國科學技術典籍通彙》(Zhong guo ke xue ji shu dian ji tong hui) 數學卷(Shu xue juan, [1])과 《中國歷代算學集成》(Zhong guo li dai suan xue ji cheng, [2])을 사용한다. 朝鮮과 中國의 算書로 참고문헌의 번호가 없는 경우 이들에 들어 있는 것을 뜻한다.

1 劉益-楊輝의 增乘開方法

방정식의 해법은 전술한 대로 九章算術 少廣章의 제곱근, 세제곱근을 구하는 방법에서 비롯되었다. 해의 자릿수를 차례로 구하는 것인데 제일 큰 자릿수는 추정하여 이를

初商이라 하고 이어서 다음 자릿수, 즉 次商을 구하는 방법을 찾아낸 것이 少廣章의 방법이다. 이를 간단히 설명하면 다음과 같다.

방정식 $p(x)=0$에서, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 초상을 α라 하고 차상을 y라 하면 $x=y+\alpha$이므로, y에 대한 방정식

$$a_n(y+\alpha)^n+a_{n-1}(y+\alpha)^{n-1}+\cdots+a_1(y+\alpha)+a_0=0$$

을 얻어 이를 정리하여 풀어서 차상을 구하고, 또 같은 방법으로 다음 자릿수를 구한다. 이 방법이 九章方法 혹은 賈憲의 釋鎖法이다.

다른 방법은 $y=x-\alpha$라 놓고

$$\begin{aligned} p(x) &= b_n(x-\alpha)^n+b_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+b_1(x-\alpha)+b_0 \\ &= \left\{b_n(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+b_1\right\}(x-\alpha)+b_0 \\ &= \left[\left\{b_n(x-\alpha)^{n-2}+\cdots+b_2\right\}(x-\alpha)+b_1\right](x-\alpha)+b_0 \end{aligned}$$

의 마지막 식에서, $p(x)$를 $x-\alpha$로 나눈다. 이 계산에서 조립제법을 사용하면 나머지로 b_0를 얻고, 또 그 몫을 $x-\alpha$로 나누어 나머지로 b_1을 얻는 식으로 계속하면 $b_0,\ldots,b_n$을 모두 구할 수 있다. 이로부터 차상 y에 대한 방정식

$$b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0=0$$

을 세워 차상을 구하고, 또 같은 방법으로 다음 자릿수를 구한다. 이 방법이 增乘開方法이다([7], [8]). 위의 해설은 현재 우리가 사용하는 표기법을 써서 설명한 것이다.

제곱근과 세제곱근의 경우 정사각형과 정육면체의 면적과 부피를 가지고 $(y+\alpha)^n$의 전개식을 구하고 이를 확장하였을 것이라고 이해할 수 있지만, 다항식의 조립제법은 $p(x)$를 $x-\alpha$로 나누는 것으로 당시에 이런 계산은 전혀 취급된 적이 없었다. 천원술로 표시된 경우도 다항식은 천원의 n제곱(x^n)으로 나누는 일은 할 수 있었지만 $x-\alpha$로 나누는 일은 불가능하였다.

우리는 劉益-楊輝의 圖解로부터 增乘開方法이 조립제법으로 진행됨을 보이고자 한다. 먼저 가장 간단한 $x^2=A$의 풀이로 시작한다. 이 문제는 잘 알려진 대로 넓이 A인 정사각형의 한 변을 구하는 문제이다. 이 방정식에서 초상이 α일 때 차상 y에 대한 방정식 $y^2+2\alpha y=A-\alpha^2$을 구하는 것은 그림 1에서 $(y+\alpha)^2=A$의 좌변을 전개하여 곧 구할 수 있다. 이것이 九章方法 혹은 釋鎖法이다.

이제 이 과정에서 단계를 나누어 그림 2와 같이 먼저 가로 x를 $y+\alpha$로 자르면 넓이는 $(y+\alpha)x=yx+\alpha x$이 된다. 이어서 그림 3과 같이 세로 x를 $y+\alpha$로 자르면

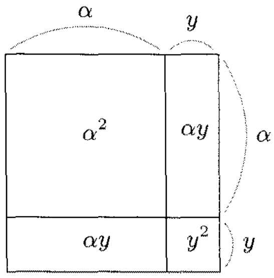

그림 1

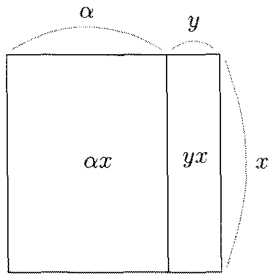

그림 2

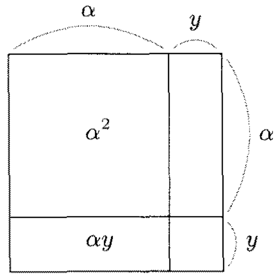

그림 3

넓이는

$$yx + (y+\alpha)\alpha = yx + \alpha y + \alpha^2 \tag{1}$$

이 되고 이어서 (1)은

$$(y+\alpha)y + \alpha y + \alpha^2 = (y^2 + \alpha y) + \alpha y + \alpha^2 \tag{2}$$

로 되어 조립제법이 다음과 같이 드러난다([4]).

$$\begin{array}{llll}
 & 1 & 0 & 0 \quad (\alpha \\
(1) & & \alpha & \alpha^2 \\ \hline
 & 1 & \alpha & \\
 & & \alpha & \\ \hline
(2) & 1 & 2\alpha &
\end{array}$$

실제로 모든 초기 산서에서 增乘開方法을 사용할 때 $x^2 = A$를 $x^2 - A = 0$으로 생각하지 않아서 實을 모두 양수로 놓고 위의 방법을 사용하여 차상을 위한 방정식의 계수를 정하고, 그 實로 $A - \alpha^2$을 택한 것으로 보인다.

3차방정식 $x^3 = A$의 경우에 九章方法 혹은 釋鎖法은 $(y+\alpha)^3$을 전개하여 차상을 위한 방정식 $y^3 + 3\alpha y^2 + 3\alpha^2 y = A - \alpha^3$을 구하였다([15]). 한편 增乘開方法은 제곱근의 경우와 같이 가로, 세로, 높이$(= x)$를 차례로 $y + \alpha$로 잘라서 다음과 같은 과정을 거쳐 차상을 위한 방정식의 계수와 실을 구한 것으로 추정된다.

$$\begin{aligned}
x^3 &= (y+\alpha)x^2 = yx^2 + \alpha x^2 = yx^2 + \alpha(y+\alpha)x \\
&= yx^2 + \alpha yx + \alpha^2 x = yx^2 + \alpha yx + \alpha^2(y+\alpha) \qquad (1) \\
&= yx^2 + \alpha yx + \alpha^2 y + \alpha^3
\end{aligned}$$

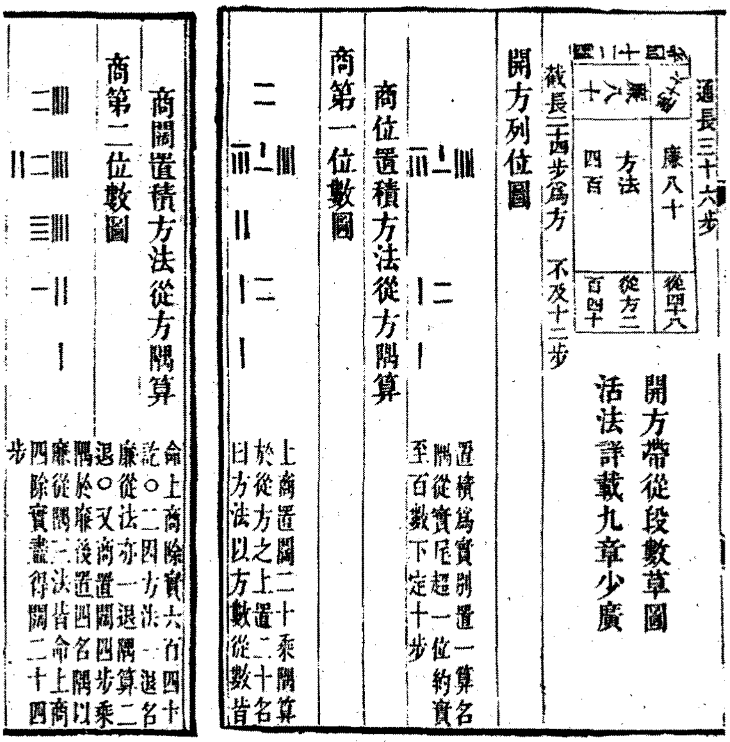

그림 3: 《楊輝算法》의 田畝比類乘除捷法

이어서, 위의 (1)의 단계는 아래와 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} & y(y+\alpha)x + \alpha y(y+\alpha) + \alpha^2 y + \alpha^3 \\ &= y^2x + \alpha yx + \alpha y^2 + \alpha^2 y + \alpha^2 y + \alpha^3 \\ &= y^2x + \alpha y(y+\alpha) + \alpha y^2 + \alpha y^2 + \alpha^2 y + \alpha^2 y + \alpha^3 \\ &= y^2(y+\alpha) + 2\alpha y^2 + 3\alpha^2 y + \alpha^3 \end{aligned} \tag{2}$$

이어서, (2)의 마지막 단계인 $y^3+3\alpha y^2+3\alpha^2y+\alpha^3$을 얻어내어 제곱근과 마찬가지로 차상을 위한 방정식의 계수와 實 $A-\alpha^3$을 구한 것으로 보인다([4]). 《永樂大典》에 있는 賈憲의 삼각형도 이 방법을 사용하여 이항계수를 구한 것이 들어있다([6]).

위의 방법이 드러난 劉益-楊輝 圖解는 田畝比類乘除捷法 하권 제6문에 다음과 같이 들어있다.

直田積八百六十四步 只云闊不及長一十二步 問闊幾步 答曰 二十四步

術曰 置積爲實 以不及步爲從方 開平方除之

넓이 864보인 직사각형의 두 변의 차가 12보일 때 짧은 변(= 가로 = x)을 구하는 문제로 그 답은 24보이다. 주어진 직사각형을 가로를 한 변으로 하는 정사각형과 가로와 두 변의 차를 한 변으로 하는 직사각형으로 나누어 방정식 $x^2 + 12x = 864$를 얻는 것을 보인 후 이 방정식을 다음과 같이 해결하였다. 그림 3의 직사각형 아래 "開方帶從段數草圖 活法詳載九章少廣"이라 적어 놓은 것을 보면 楊輝가 그의 《詳解九章算法》 少廣章에 일반 2차 방정식의 해법을 이미 자세히 해설한 것을 알 수 있다. 직사각형을 자른 방법과 開方列位圖에서 전술한 제곱근 풀이 방법이 윗 부분 정사각형에 나타나고 아래 從方(= 12)부분을 첨가하여 먼저 가로를 초상(= 20)과 차상으로 나누어 제곱근 풀이 방법과 같은 순서로 實 아래 20을 두어 이를 方法이라 하여 從方과 구별하였다. $20^2 + 12 \times 20$을 계산하여 실에서 뺀 값을 차상을 위한 방정식의 實(= 224)로 두고 方法을 두 배하여 40을 얻는다. 차상을 4라 놓으면 제곱근 풀이 방법대로 方法은 44가 되어 $(44 \times 4) + 12 \times 4 = 224$이므로 해 24를 구하였다. 이 경우 자릿수를 초상, 차상으로 놓았기 때문에 隅, 從方, 方法 등을 미리 올려서 계산한 후 이를 다시 내리는 번거로운 과정을 거치고 있지만 우리는 위의 방법을 택하여 해설하였다.

제7문은 제6문과 같은 조건에서 세로(= x)를 구하는 문제로 이 문제의 해법에 제6문과 같은 방법은 益積開方術이라는 이름으로 들어있고, 이어서 增乘開方法은 減從開方術이라는 이름으로 다음과 같이 들어있다.

直田積八百六十四步 只云闊少長一十二步 問長幾步 答曰 三十六步
(益積開方)術曰 置積爲實 以不及步爲負隅 開平方除之得長

제7문은 여러 곳에서 오류를 포함하고 있다. 문제의 풀이로 들어있는 圖解와 같이 세로를 한 변으로 하는 정사각형의 한 변을 가로와 두 변의 차로 나누어 방정식 $x^2 - 12x = 864$를 얻는데 위의 術에서 "負隅"는 당연히 負從方이어야 한다. 풀이 방법에 대하여 다음과 같이 草를 달았다.

草曰 置積八百六十四於第二給 置差十二步於第四給爲負從
置負隅一算於第五給 於第一給上商置長三十步
以乘負隅於第三給置方法三十 以上商三十乘負從十二 添積三百六十
卻除積九百餘積三百二十四步 二因方法共六十改名
廉法一退 負從一退 負隅二退 又於實上商置長六步
以乘負隅一置六於廉次名隅以上商六命負從
添積七十二共積三百九十六 以廉隅之數命上商除實積盡 得三十六步合問

위의 "負隅"는 모두 "隅"로 바꾸어야 한다. 계산 방법은 제6문과 같고 단지 從方이 음수인 것만 다르다. 따라서 차상을 위한 방정식의 實은 주어진 實 864에서 $30^2+(-12)\times30$을 빼야하는데 이를 $864-(30^2-12\times30)=(864+12\times30)-900$으로 계산하여 "添積三百六十"이라 하고, 차상의 경우도 $324-(66\times6-12\times6)=(324+72)-396$으로 계산한 것만 다르다. 益積開方術이라는 이름은 從方이 음수이기 때문에 $30^2+(-12)\times30$의 계산에서 12×30을 빼야한다는 것을 나타내는 것으로 보아야 한다. 飜積, 益積의 개념과 전혀 상관없는 것이다([13]). 실제로 제9문은 위의 문제들과 같은 넓이를 가지고 두 변의 차 대신에 두 변의 합을 주고 가로를 구하는 문제인데 이 경우 방정식은 $-x^2+60x=864$로 이를 풀어내는 방법을 "益隅術"이라 하였다. 위와 같은 방법으로 차상을 위한 방정식의 實은 $864-(60\times20-20^2)=(864+20^2)-60\times12$로 계산되는데 이 경우 -20^2을 益隅라 한 것이다. 제6, 7, 9문의 해법은 기본적으로 같은 방법이고, 제7, 9문은 특정한 부분의 넓이를 빼는 것만 다른 것이다. 이들 모두 음수에 대한 충분한 이해가 부족한 것에서 기인한 것으로 보인다.

다시 제7문으로 돌아가 "익적술"로 해를 구한 후 이어서 (減從開方)術을 첨가하였는데 그 草는 아래와 같다.

> 草曰 依五給資次布 置商積方法負從隅算 置積爲實 於實上商置長三十
> 以乘隅算置三十於實數之下 名曰方法 以負從十二減三十餘一十八
> 命上商除實五百四十餘積三百二十四 復以上商三十乘隅得三十
> 倂入方法共四十八 退位廉其隅算再退 又於實上商長六步
> 以乘隅算得六 倂入廉法共五十四 命上商六步除實盡 得長三十六步合問

이는 위의 익적술을 그대로 실행하는데 $30^2-12\times30=(30-12)\times30$으로 계산하는 것이고 차상을 구하는 과정에서 $[\{(30-12)+30\}+6]\times6$으로 대치한 것으로, 이 방법이 바로 增乘開方法인 것이다. 제9문도 익우술에 이어 增乘開方法을 감종개방술이라 하여 첨가하였다. 다만 "退位廉其隅算再退"는 자릿수로 계산하지 않았으므로 필요없는 문장이다. 제10문은 제9문과 같은 조건에서 세로를 구하는 문제인데 익우술의 문제이지만 이는 언급하지 않고 다만 增乘開方法인데 이 경우 飜積이 나타나서 飜積術이라 하였다. 제12문의 방정식은 $-5x^2+228x=2592$이므로 익우술이라 하여야 하는데 "익적술"이라 하였고 그 해는 增乘開方法으로 구하였다. 隅가 1이 아닌 가장 일반적인 2차방정식 문제이다. 제23문은 일반 4차방정식이지만 차상을 구할 필요가 없는 문제로 역시 增乘開方法으로 해를 구하였다. 減從開方術이 도입되기 전의 제6, 7, 9문의 開方術은 구조적으로 같은데 이들은 圖解를 통하여 이해되는 것으로 증승개방법의 원형임을 쉽게 추정할 수 있다.

전술한 대로 楊輝는 그의 《詳解九章算法》 少廣章에서 방정식의 해법을 자세히 다룬 것으로 되어있지만 이 부분이 실전되어 增乘開方法이 얻어진 역사를 정확히 알 수는 없다. 그러나 위의 제6~23문을 통하여 增乘開方法은 조립제법과 상관없이 $p(x) = A$ ($x|p(x)$, A는 실수) 형태의 방정식에 $x = y + \alpha(y, \alpha$는 각각 차상, 초상)로 놓고 이를 전개하는 과정에서 얻어진 것을 확인할 수 있다.

2 洪正夏의 開方術

이 절에서는 조선의 가장 위대한 산학자인 洪正夏의 개방술을 조사한다.

전술한 대로 朴繘이 그의 《算學原本》에 천원술을 사용하여 방정식을 구성하였는데 洪正夏가 《算學原本》을 연구한 흔적은 찾을 수 없다. 洪正夏가 《九一集》의 방정식론을 저술하면서 연구한 책은 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》, 《算法統宗》뿐이다. 그는 서론에서 《算法統宗》에 들어있는 開方求廉率作法本源圖, 즉 賈憲의 삼각형을 9승방, 즉 10차까지 확장하고, 이어서 $(x-y)^n$의 계수를 나타내는 賈憲의 삼각형 開方求廉率正負之圖를 11승방, 즉 12차까지 들고 있다.

《九一集》에서 천원술을 사용하여 방정식을 나타낸 것은 제4권에 이미 들어있다 ([11]). 그러나 천원을 세워 방정식을 구성하는 것은 제6~8권 開方各術門에 들어있다. 전술한 세 산서는 네제곱근까지만 다루고 있지만 洪正夏는 다섯제곱근까지 다루었다. 특히 《算學啓蒙》은 네제곱근까지 다루면서도 이들을 방정식 형태로 취급하지는 않고 있다. 그러나 洪正夏는 이들을 모두 천원술을 사용하여 $x^n - A = 0$ 꼴의 방정식으로 구성하였다. 방정식의 해법은 전술한 제4권에 이미 언급되어있다. 즉 제4권 제2절 毬隻解隱門의 제8문에 최초로 천원술을 이용하여 "開方式", 즉 방정식을 나타내고 "以飜法平方開之"라는 문구와 함께 방정식의 해를 나타내었다. 飜法은 증승개방법에서 일어나는 것이다.

《九一集》에서 실제로 증승개방법이 나타난 것은 제5권 句股互隱門 제64문이다. 제5권은 구고술을 이용한 방정식론으로서([11]) 제64문은 방정식 $0.5625x^2 - 18x - 81 = 0$의 해 36을 구하는 문제이다. 그의 계산은 자릿수를 사용하지 않고 현재 우리가 사용하는 초상 30에 대한 조립제법을 사용하여 계산하고 있다. 따라서 그가 작은 글자로 넣은 "從方進一位 隅法進二位"와 "從方一退 隅法二退"는 필요 없는 문장이다. 한편 해법에 益積法이 들어있는 것을 언급하였다. 그는 여기서 차상을 위한 實이 $-81 + (-33.75) = -114.75$에 의하여 구하여 지는 것과 이들이 모두 음수인 것을 나타내어 익적법을 제대로 이해하고 있음을 알 수 있다. 따라서 洪正夏의 증승개방법은 전술한 劉益-楊輝의 방법과 달리 현재 우리가 사용하고 있는 조립제법을 제대로

사용한 것이다. 이 문제에는 飜減도 함께 나타나는데 이도 언급하였다([13]). 그러나 114.75를 "仍爲實"이라 하여 부호를 나타내지는 않았다.

第65문에서는 같은 방법으로 방정식 $0.36x^2 - 18x + 81 = 0$을 풀었는데 이 경우는 飜積法이 나타나는 경우이다. 洪正夏는 제64문과 같은 방법으로 차상을 위한 實을 $81 + (-114) = -63$과 같이 구하였다. 해설되어 있는 문제들은 모두 일반 2차방정식의 풀이이다. 3차 이상의 문제들도 句股互隱門에서 다루었지만 "三乘方開之" "飜法開之" 등만 들어있고 실제 해법은 생략되어있다.

《九一集》의 제6~8권 開方各術門에 이들 해법이 처음 나타난다. 전술한 대로 다섯제곱근까지 증승개방법으로 해를 구하는데 방정식 $x^n - A = 0$을 구한 후 풀어내지만, 차상을 위한 실을 구하는데 초상 α에 대하여 증승개방법을 사용하여 α^n을 구한 후 "除實 α^n 餘實 $A - \alpha^n$"과 같이 나타내어, 전술한 제5권의 해법에서 다시 劉益-楊輝나 《算學啓蒙》과 같은 방법으로 돌아갔다. 여기서 秦九韶의 증승개방법과 같이 천원술로 나타낸 다항식의 방법을 사용하지 않고 1차항, 2차항,…의 계수를 차례로 甲從, 乙從,… 등으로 나타내고 이들과 상들의 곱과 그 아래 차의 항과 더하는 것으로 나타내었다. 한편 전술한 田畝比類乘除捷法의 제6, 7문이 《九一集》 제6권 24문으로 들어있다. 田畝比類乘除捷法 제6문의 해법은 증승개방법의 원형만 들어있었는데 洪正夏는 이를 인용하지 않고 바로 증승개방법으로 풀고, 이어서 제7문의 감종개방술도 전술한 句股互隱門에 들어있는 방법으로 풀고서 또 古法도 함께 들고 나서 益積術을 다음과 같이 들어 놓았다.

> 益積術曰 置積於第二層爲實 置差於第四層爲從方 置一於第五層爲遇法
> 以平方益積法開之得長 依圖布算(생략) 從方進一位 遇法進二位
> 置上商三十於第一層 以隅法一與上商三十相呼得三十 乃入於第三層
> 名曰方法 又以從方十二與上商三十相呼得三百六十 乃加入於實積 此益積法
> 共得一千二百二十四尺 則以方法三十與上商三十相呼得九百
> 以減於所得益積九百 餘積三百二十四 又方法倍之得六十
> 乃方法一退 從方亦一退 遇二退 次商六步於上商三十之次
> 以隅法一與次商六步相呼得六 加入於第三層方法 共得六十六
> 又以從方十二與次商六步相呼得七十二 加入於所得餘積三百二十四
> 共得三百九十六 此亦益積也 則以方法六十六與次商六步相呼得三百九十六
> 除所得益積三百九十六 恰盡 亦得長

앞절에서 《九一集》 제7문의 익적술에 오류를 지적하였다. 여기서 洪正夏는 제4층에 從方을 둔다고 하였는데 우리가 생략한 그의 "依圖布算"의 從方은 양수로 들어

있다. 그의 "익적"은 이를 전혀 고려하지 않았기 때문에 전술한 익적법과 전혀 다른 것을 충분히 드러내지 못하였다. 洪正夏는 상과 법들의 곱하는 과정을 모두 "相呼"라고 표현하였다.

한편 田畝比類乘除捷法 제9, 10문은 《九一集》에 제25문으로 들어있는데 여기서 가로를 위한 방정식은, 楊輝의 $-x^2+60x=864$와 달리, 가로, 세로를 위한 방정식으로 $x^2-60x+864=0$을 구성하였다. 洪正夏는 《楊輝算法》의 증승개방법에 해당되는 해법을 減從開方術이라 하였는데 아마도 減從에 맞추어 택한 것으로 추정된다. 그는 같은 방정식에 대한 증승개방법을 들어놓고 이어서 고법과 함께 田畝比類乘除捷法 제9문의 益隅術, 즉 가로에 대한 방정식의 해법을 제24문과 같이 "益積術"로 인용하였는데, 그 풀이를 보면 위의 방정식를 다시 楊輝와 같이 $-x^2+60x=864$로 놓고 있다. 이 역시 제4문과 같이 음수 표시를 하지 않은 채 인용하고 있어서 楊輝를 제대로 이해하지 못하고 있다([14]).

洪正夏의 증승개방법을 가장 잘 나타내는 것으로 《九一集》 제6권 46문을 아래와 같이 인용한다.

今有直積二千六十五步 只云較乘和得二千二百五十六步 問長平各若干 答曰長五十九步

먼저 방정식 $x^4+2,256x^2-4,264,225=0$을 구한 후 해법은 다음과 같다.

初商三十於上 以丁從一與初商三十相呼得三十 乃入於丙位名曰丙從
卽與初商三十相呼得九百 加入於乙從共得三千一百五十六
就與初商三十相呼得九萬四千六百八十 乃以於甲位名曰甲從
就與初商三十相呼得二百八十四萬四百 除實二百八十四萬四百
餘實一百四十二萬三千八百二十五步 另以丁從一與初商三十相呼得三十
加入於丙從共得六十 就與初商三十相呼得一千八百
加入於乙從共得四千九百五十六 就與初商三十相呼得一十四萬八千六百八十
加入於甲從共得二十四萬三千三百六十
又以丁從一與初商三十相呼得三十 又加於丙從共得九十
就與初商三十相呼得二千七百 又加於乙從共得七千六百五十六
又以丁從一與初商三十相呼得三十 又加於丙從共得一百二十
乃甲從一退乙從二退丙從三退丁從四退*) 次商五步於初商三十之次
以丁從一與次商五步相呼得五 加入於丙從共得一百二十五
就與次商五步相呼得五 加入於丙從共得一百二十五

就與次商五步相呼得六百二十五 加入於乙從共得八千二百八十一
就與次商五步相呼得四萬一千四百0五 加入於甲從共得二十八萬四千七百六十五
就與次商五步相呼得一百四十二萬三千八百二十五
除實一百四十二萬三千八百二十五步恰盡得平三十五步 以平除積得長五十九步 合問

첨자 *)에 해당되는 자릿수를 내리는 부분은 전술한 대로 필요 없는 부분이고, 餘實의 부호를 나타내지 않은 것만 제외하면 洪正夏의 증승개방법은 더 이상 고칠 부분이 없는 것으로, 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》과 이를 뛰어넘지 못한 《算法統宗》만 연구하여 위와 같은 개방술을 얻어낸 洪正夏의 업적은 18세기 초 동양 산학에서 가장 뛰어난 것이다.[1)]

3 結論

12세기 중국 산학이 天元術과 增乘開方法을 도입함으로써 중국의 방정식론은 완결되었고 또 서양의 방정식론과 다른 길을 걷게 되었다. 천원술과 개방술이 도입될 당시의 산서들이 모두 실전되었다. 그러나 천원술은 14세기까지 완벽하게 전달된 반면에 개방술은 《數書九章》, 楊輝의 여러 산서, 《算學啓蒙》 등에 전달되었지만 이들은 모두 독립적으로 서술되어 그 근원과 구조를 정확하게 알 수 없고, 명칭마저 통일되지 못하였다. 楊輝는 《詳解九章算法》에 賈憲의 이론을, 그리고 《楊輝算法》의 田畝比類乘除捷法에는 劉益의 이론을 전하여 주어서 12세기 중국의 개방술을 어느 정도 추정할 수 있게 되었다.

楊輝가 전해준, 劉益의 실전된 《議古根源》에 들어있는 일반 2차방정식의 해법의 圖解에서 찾은 增乘開方法의 원형으로 추정되는 해법과 함께 增乘開方法과 거의 일치하는 減從開方術을 통해서, 우리는 增乘開方法이 賈憲의 釋鎖法과 마찬가지로 이항식 $(y+\alpha)^n$을 전개하는 과정을 통하여 얻어졌음을 확인하였다. 따라서 다항식의 제법과 나머지 정리가 전혀 도입되지 않은 상태에서 增乘開方法이 조립제법과 관계 없이 발견된 구조를 밝혀낼 수 있었다.

한편 明代에 중국에서 사라진 천원술은 조선에서는 그대로 유지되어, 조선의 방정식론은 朴繘, 洪正夏 등에 의하여 계속 발전할 수 있었다. 개방술에 있어서도 洪正夏는 劉益–楊輝의 增乘開方法의 원형만을 가지고 완벽한 增乘開方法을 조선에 도입하였다. 《詳解九章算法》이 조선에 들어오지 않았기 때문에 洪正夏는 增乘開方法이라는 단어를 사용하지 못하였지만 그의 開方術은 현재의 계산 방법과 완전히 일치하는 것임을 확인

1) 17~8세기 조선 산학자들은 개방술과 관련하여 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》만 접할 수 있었다.

하였다.

18세기 초 그는 매우 잘 알려진 산학자이었지만 그의 위대한 업적은 19세기 李尙爀(1810~?), 南秉吉(1820~1869)에 의하여 재조명될 때까지 조선 산학의 발전에 큰 영향을 끼치지 못하였다([10], [12]).

참고 문헌

1. 《中國科學技術典籍通彙》 數學卷 全五卷, 河南敎育出版社, 1993.
2. 《中國歷代算學集成》, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
3. 《韓國科學技術史資料大系》, 數學編, 1卷~10卷, 驪江出版社, 1985.
4. 김영욱, 增乘開方法, preprint, 2009
5. 김영욱, 홍성사, 홍영희, 朴繘의 算學原本, 한국수학사학회지 18(2005), No. 4, 1-16.
6. 吳文俊 主編, 《中國數學史大系》, 第一卷~第八卷, 副卷, 北京師範大學出版社, 1998.
7. 錢寶琮, 增乘開方法的歷史發展, 宋元數學史論文集, 36-59, 科學出版社, 1985.
8. 홍성사, 朝鮮의 方程式 解法, 대한수학회소식, 제131호(2010), 11–14.
9. 홍성사, 朝鮮 算學의 環境, 대한수학회소식, 제125호(2009), 32–35.
10. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算書 算學啓蒙註解, 한국수학사학회지 22(2009), No. 2, 1–12.
11. 홍성사, 홍영희, 김창일, 18世紀 朝鮮의 句股術, 한국수학사학회지 20(2007), No. 4, 1–22.
12. 홍성사, 홍영희, 南秉吉의 方程式論, 한국수학사학회지 20(2007), No. 2, 1–18.
13. 홍성사, 홍영희, 장혜원, 垜積과 益積의 歷史, 한국수학사학회지 18(2005), No. 3, 39–54.
14. 홍영희, 조선시대의 방정식론, 한국수학사학회지 17(2004), No. 4, 1–16.
15. K. Shen, J. N. Crossley, A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Arts*, Oxford University Press, 1999.

홍성사 서강대학교 수학과
Department of Mathematics, Sogang University
E-mail: sshong@sogang.ac.kr

홍영희 숙명여자대학교 수학과
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University
E-mail: yhhong@sookmyung.ac.kr

김영욱 고려대학교 수학과
Department of Mathematics, Korea University
E-mail: ywkim@korea.ac.kr