韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 02. 제 50권, 제 1호, 61-67.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2011, Vol. 50, No. 1, 61-67.

고등학교 수학 교과서에 제시된 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 의 정의에 관한 소고

도 종 훈 (서원대학교)
박 윤 범 (서원대학교)[1]

Ⅰ. 서 론

현행 수학과 교육과정에 따르면 유리수 지수의 정의는 고등학교 선택과목 중 하나인 수학Ⅰ에서 다루어진다(교육인적자원부, 2007). 실제로 현행 수학Ⅰ 교과서를 보면, a가 실수일 때 $x^n = a$의 해로서 a의 n제곱근(복소수 포함)을 정의하고, $a>0$일 때 a의 양의 n제곱근(실수에 한정)으로 $\sqrt[n]{a}$ 을 정의한 후, 양의 실수 a의 양의 거듭제곱근에 대하여 n, m이 자연수일 때 다음과 같은 성질이 성립함을 다룬다.[2]

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

그리고 나서 $a>0$일 때, 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

교과서에 따라 구체적인 내용 전개 순서나 설명 방식에 다소간의 차이는 있으나 위에 제시된 내용만큼은 교과서 종류에 상관없이 동일하다. 이러한 내용 전개에 따르면 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 현행 수학Ⅰ 교과서에서처럼 $\sqrt[n]{a^m}$ 으로 정의할 수도 있지만, $(\sqrt[n]{a})^m$으로 정의할 수도 있음을 알 수 있다.

그러나 현재 우리나라에서 발행되어 사용되고 있는 15종의 수학Ⅰ 교과서(김수환 외, 2010; 김해경 외, 2010; 양승갑 외, 2010; 우무하 외, 2010; 우정호 외, 2010; 유희찬 외, 2010; 윤재한 외, 2010; 이강섭 외, 2010; 이동원 외, 2010; 이만근 외, 2010; 이준열 외, 2010; 정상권 외, 2010; 최용준 외, 2010; 황석근 외, 2010; 황선욱 외, 2010) 중에서 후자의 형태로 유리수 지수를 정의하는 교과서는 없으며, 이러한 사정은 그 이전에 발행된 교과서들에서도 마찬가지인 것으로 보인다. 여기서 우리는 다음과 같은 질문을 제기할 수 있다.

> 모든 교과서에서 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 으로 정의하는 이유는 무엇이고, 이 정의는 과연 적절한 것인가?

본고에서는 복소수 지수의 정의에 대한 검토와 현행 교과서에 제시된 유리수 지수 정의 관련 내용에 대한 분석을 통해 유리수 지수의 정의와 관련된 문제점들을 살펴보고, 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 이 아니라 $(\sqrt[n]{a})^m$ 으로 정의하는 방안을 제안한다. 구체적으로는 먼저 유리수 지수를 포함한 복소수 지수가 수학적으로 어떻게 정의되는지 살펴봄으로써 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 의 정의로서 $(\sqrt[n]{a})^m$이 $\sqrt[n]{a^m}$ 에 비해 보다 보편타당함을 보인다(Ⅱ장 1절). 그리고 현행 교과서에 제시된 유리수 지수 정의를 비판적으로 분석하여 그 문제점을 살펴본 후(Ⅱ장 2절), 유리수 지수에 대한 대안적 정의를 제시하고 이 정의가 현행 교과서에 제시된 정의와 어떤 면에서 어떻게 다른지 논의한다(Ⅱ장 3절).

---

* 접수일(2010년 10월 26일), 수정일(2010년 11월 20일), 게재확정일(2011년 2월 10일)
* ZDM 분류 : U23
* MSC2000 분류 : 97U20
* 주제어 : 유리수 지수, 지수법칙

1) 교신저자

2) 물론 m이 정수일 때도 성립하지만, 이에 관한 내용은 유리수 지수의 정의 이후에 다루어진다.

II. $a^{\frac{m}{n}}$ 의 정의 : $\sqrt[n]{a^m}$ vs. $(\sqrt[n]{a})^m$

1. 복소수의 관점에서 본 $a^{\frac{m}{n}}$ 의 정의

자연수 지수나 정수 지수의 정의는 같은 수를 여러 번 반복해서 곱한다는 거듭제곱의 개념으로부터 비롯된 것이다. 이와는 달리 유리수 지수는 거듭제곱근의 개념으로부터 비롯된 것이고, 거듭제곱근(n 제곱근)의 개념은 방정식($x^n = a$)의 풀이로부터 비롯된 것이다. 그리고 이러한 방정식의 해는 복소수 범위에서 비로소 올바르게 구해지고 이해될 수 있으므로, 유리수 지수의 정의에 대한 논의를 위해서는 복소수 지수의 정의에 대한 검토가 필수적이라 하겠다(최영기, 2000).

일반적으로 복소수 $x+iy$ (x, y 는 실수)에 대하여 e^{x+iy} 는 다음과 같이 정의된다.

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$
$$(\text{여기서, } e^{iy} = \cos y + i \sin y)$$

이 정의는 자연수 지수로부터 정수, 유리수, 실수 지수에 이르기까지 성립하던 기본적인 지수법칙 $a^x a^y = a^{x+y}$ 이 복소수 지수에서도 성립하도록 유지한다는 면에서 자연스러운 정의로 볼 수 있다(Silverman, 1975). 실제로 임의의 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

한편, 0이 아닌 복소수 z 에 대하여 $n(\neq 0), m$ 이 정수일 때 $z^{\frac{1}{n}}$, $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 을 다음과 같이 정의할 수 있다(도종훈 · 최영기, 2003; Choi & Do, 2005).[3]

$$z^{\frac{1}{n}} = \{x \mid x^n = z\}$$

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \{x^m \mid x^n = z\}$$

그리고 0이 아닌 복소수 z 에 대하여 α 가 복소수일 때, 복소수 지수 z^α 를 다음과 같이 정의한다(Churchill & Browon, 1990; Silverman, 1975).

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$
$$(\text{여기서, } \log z = \ln|z| + i \arg z)$$

이 정의와 지수법칙 $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ 을 이용하면 유리수 $\frac{m}{n}$ 에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}(\ln|z| + i \arg z)} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

그러나 $(z^m)^{\frac{1}{n}} = \{x \mid x^n = z^m\}$ 은 복소수 z^m 의 n 제곱근들의 집합으로 두 정수 m, n 이 서로소일 때에는 두 집합 $(z^m)^{\frac{1}{n}}$, $z^{\frac{m}{n}}$ 이 모두 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름이 $|z|^m$ 인 원 위의 n 개의 점을 나타내는 복소수들의 집합이 되어 등식 $(z^m)^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{m}{n}}$ 이 성립하지만, 두 정수 m, n 이 서로소가 아니거나 $m=0$ 인 경우에는 일반적으로 이 등식이 성립하지 않는다.

$$z^{\frac{m}{n}} \neq (z^m)^{\frac{1}{n}}$$

예를 들어 $a=-8$ 이고 $m=2$, $n=6$ 인 경우를 생각해보자. 이 때 $(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}}$ 은 $x^3 = -8$ 을 만족하는 3개의 복소수로 이루어진 집합인 반면 $((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ 은 $x^6 = (-8)^2$ 을 만족하는 6개의 복소수로 이루어진 집합이므로, $(-8)^{\frac{2}{6}} \neq ((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ 임을 알 수 있다(도종훈 · 최영기, 2003; 최영기, 2000; Choi & Do, 2005).[4] 또한 $m=0$ 인 경우를 생각해보면, 0이 아닌 임의의 복소

---

3) $z^{\frac{1}{n}}$ 이 하나의 (복소)수가 아니라 n 개의 수들의 집합이므로, $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 을 별도로 정의하지 않을 수 없다.

4) 실제로는 $(-8)^{\frac{2}{6}} \subsetneq ((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$ 이다(Choi & Do, 2005; 도종훈 · 최영기, 2003).

수 z에 대하여 $z^{\frac{0}{n}} = z^0 = 1 = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^0$인 반면, $(z^0)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}}$은 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 위의 n개의 점을 나타내는 복소수들의 집합이므로, 일반적으로 $z^{\frac{0}{n}} \neq (z^0)^{\frac{1}{n}}$임을 알 수 있다.

정리하자면 z가 0이 아닌 복소수일 때 두 정수 $m, n(\neq 0)$에 대하여 $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = z^{\frac{m}{n}} \neq (z^m)^{\frac{1}{n}}$인 관계가 성립하고, 이러한 관계는 실수 $a > 0$에 대해서도 동일하게 유지된다. 그런데 고등학교 수학 I 에서는 $a^{\frac{1}{n}}$을 a의 n제곱근 중 (유일한) 양의 실수인 것으로 정의하고 그 경우에 한해서는 등식 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ 즉, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$이 성립하므로 $a^{\frac{m}{n}}$을 이 등식의 양변에 제시된 두 양의 실수 중 어느 것으로 정의해도 무방하지만, 밑을 양의 실수 이상의 범위로 확장하고 $a^{\frac{1}{n}}$을 a의 양의 n제곱근이 아니라 n제곱근 n개의 집합으로 간주하게 되면 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의는 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$이 아니라 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$이 될 수밖에 없음을 알 수 있다.

이러한 관점에서 볼 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의로서 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$은 a가 양의 실수인 경우에 국한된 매우 제한적인 정의이고, 오히려 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 즉, $(\sqrt[n]{a})^m$이 $a^{\frac{m}{n}}$에 대한 보다 보편적인 정의라고 할 수 있다. 실제로 $a > 0$일 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을 현행 교과서에서 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$으로 정의하는 방식과 거의 유사한 방식으로 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$으로 정의할 수 있는데, 이에 대한 보다 자세한 내용 및 이러한 정의 과정이 현행 교과서에서의 그것과 어떤 면에서 어떻게 다른지는 이하(2절과 3절)에서 보다 자세하게 살펴보도록 하겠다.

2. 현행 교과서 내용에 대한 비판적 분석

현행 수학과 교육과정과 교과서에 따르면 학생들은 중학교 2학년의 문자와 식 영역에서 자연수 지수 즉, n이 자연수일 때 a^n의 정의(즉, a를 n번 거듭하여 곱한 것)와 이 정의로부터 자연스럽게 유도되는 몇 가지의 지수법칙을 학습하는데, 그 중에서도 가장 기본이 되는 법칙은 $a^m \times a^n = a^{m+n}$이다.

그 후 고등학교 선택과목 중의 하나인 수학 I 에서 a가 0이 아닌 실수일 때 지수가 0인 경우와 음의 정수인 경우가 각각 $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$으로 정의되고, 지수가 자연수에서 정수로 확장되면서 지수법칙 역시 그대로 성립함을 학습하게 된다. 사실은 자연수 지수에서 성립하던 지수법칙 특히, $a^m \times a^n = a^{m+n}$이 정수 지수에서도 성립하도록 지수가 0인 경우와 음의 정수인 경우를 $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$으로 정의하는 것이 합리적이라는 설명이 통상 함께 제시된다. 실제로 대부분의 교과서에서 $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$은 다음과 같은 과정을 통해서 정의된다(우정호 외, 2010; 이강섭 외, 2010 등).[5)]

> 지수가 0인 경우와 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장해 보자. $a \neq 0$이고 $m = 0$일 때, 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 가정하면 $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$이므로 $a^0 = 1$이다. 또, $m = -n$일 때, $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이므로 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$이다. 따라서 지수가 0 또는 음의 정수일 때, a^n을 $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$로 정의한다.

이처럼 정수 지수의 정의와 그때의 지수법칙에 대한

5) 이 과정에서 밑에 대한 조건 $a \neq 0$이 새롭게 추가되는데, 이로부터 0^0과 0^{-n}은 정의되지 않는 대상으로 취급되지만, 이 부분에 대한 설명이나 정당화 과정은 교과서에 통상 제시되지 않는다. 임의의 자연수 n에 대하여 $0^n = 0$이고, 0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여 $a^0 = 1$이므로, 0^0을 정의한다면 $0^0 = 0$이나 $0^0 = 1$로 정의하는 것이 자연스러울 수도 있으나, 어떻게 정의하더라도 문제는 발생한다.

학습이 끝난 후, 유리수 지수의 정의와 그때의 지수법칙을 다루는데, 특히 유리수 지수를 정의하는 과정은 통상 ① a가 실수일 때, $x^n=a$의 해로서 a의 거듭제곱근(n제곱근)을 정의하고, ② $a>0$일 때 a의 (유일한) 양의 n제곱근으로 $\sqrt[n]{a}$을 정의한 후, ③ $a>0$일 때, 유리수 $\frac{m}{n}$에 대하여 $a^{\frac{m}{n}}$을 정의하는 순서로 이루어진다. 이 중에서 ③의 과정은 <그림 1>과 같은 방식으로 이루어진다(우정호 외, 2010; 이강섭 외, 2010 등).

지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장해보자. $a>0$이고 지수가 유리수일 때, 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다고 가정하면, 지수가 유리수 $\frac{m}{n}$일 때 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$이다. $a>0$이면 $a^{\frac{m}{n}}>0$이므로, 거듭제곱근의 정의에 의해서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 곧 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다. 따라서 $a>0$이고 m은 정수, n은 자연수일 때 $a^{\frac{m}{n}}$을 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 특히, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$로 정의한다.

<그림 1> 유리수 지수의 정의(현행)

그러나 <그림 1>에 제시된 설명은 일관성 혹은 적절성의 측면에서 다소 어색하거나 부적절한 측면이 있고 논리적인 문제점 또한 지니고 있다. 먼저, 위의 설명에서 지수가 유리수인 경우에도 성립하도록 가정한 지수법칙이 $(a^m)^n=a^{mn}$임을 알 수 있는데, 이는 자연수 지수에서 정수 지수로 확장할 때 성립하도록 가정한 지수법칙이 $a^m a^n=a^{m+n}$이라는 사실과 여러 가지 지수법칙 중 가장 기본이 된다고 할 수 있는 법칙이 $a^m a^n=a^{m+n}$이라는 점에서 볼 때 내용 전개의 일관성과 수 체계 확장에 따른 지수 정의의 확장 과정에서 유지하길 원하는 가장 기본적인 법칙의 선택이라는 측면에서 그 적절성에 대한 검토가 필요하다고 할 수 있다. 둘째, 위의 설명 중 "$a>0$이면 $a^{\frac{m}{n}}>0$이므로"에서는 아직 정의하지도 않은(혹은 정의하고자 하는) $a^{\frac{m}{n}}$을 양의 실수로 간주하고 있는데, 이는 논리적으로 정당화될 수 없는 명제임에도 $a^{\frac{m}{n}}$을 a^m의 양의 n제곱근으로 정의하기 위해 무리한 정당화를 시도하고 있음을 알 수 있다.[6)]

이러한 두 가지 문제점은 모두 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을 $\sqrt[n]{a^m}$ 즉, $(a^m)^{\frac{1}{n}}$으로 정의하는 과정에서 발생한 것으로, $a^{\frac{m}{n}}$을 $(\sqrt[n]{a})^m$으로 정의하면 자연스럽게 해소될 수 있을 것으로 보인다.

3. 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$에 대한 대안적인 정의

정수 지수의 정의 및 그때의 지수법칙을 학습한 후에 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$을 현행 교과서와는 달리 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 즉, $(\sqrt[n]{a})^m$으로 다음에 제시된 <그림 2>와 같이 정의할 수 있다.[7)]

$a>0$, n은 0이 아닌 정수일 때 방정식 $x^n=a$을 만족하는 양의 실수를 $\sqrt[n]{a}$ 또는 $a^{\frac{1}{n}}$이라 하자.[8)] 이제 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장해보자. $a>0$이고 지수가 유리수일 때 지수법칙 $a^m a^n=a^{m+n}$이 성립한다고 가정하면, 자연수 m에 대하여 $a^{\frac{1}{n}}$의 m개의 곱은 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{n}}\cdots a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}$이다. 따라서 $a>0$

6) 이러한 논리적 오류는 "$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근 즉, $\sqrt[n]{a^m}$과 같아야 한다(황석근 외, 2010)" 혹은 "$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이 된다(정상권 외, 2010)" 등과 같이 형태를 다소 달리해서 다양하게 나타나기도 하지만, 모든 교과서에서 이러한 논리적 오류가 나타나는 것은 아니다. 이를테면 "$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 n제곱근 중의 하나이다. 여기서 $a^{\frac{m}{n}}$을 양수 a^m의 양의 n제곱근으로 정하면 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다.(유희찬 외, 2010)"와 같이 올바로 기술된 교과서도 있다,

7) 물론 정의 과정에 제시되는 설명의 구체적인 내용이나 구성 및 전개 방식 등은 교과서 저자에 따라 다양할 수 있다.

8) 이때 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$는 $x^n=a$을 만족하는 양의 실수이므로,

일 때 유리수 $\frac{m}{n}$ 에 대하여 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=(\sqrt[n]{a})^m$ 으로 정의한다.

<그림 2> 유리수 지수에 대한 대안적인 정의

<그림 2>에 제시된 대안적인 정의의 과정을 보면, <그림 1>에 제시된 것과는 달리 지수를 정수에서 유리수로 확장하더라도 성립하도록 가정하는 지수법칙으로 $a^m a^n = a^{m+n}$ 을 활용하고 있고, 논리적으로 오류가 있는 명제 "$a>0$ 이면 $a^{\frac{m}{n}}>0$"를 사용하거나 정당화할 필요 또한 없음을 알 수 있다. 그 밖에 세 가지 개념 $\sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{1}{n}}$ 을 다루는 순서와 방법이 현행 교과서와 달라지게 되는데, 현행 교과서의 경우 이들 세 개념이 $\sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{1}{n}}$ 의 순서로 다루어진다. 그 중 $a^{\frac{1}{n}}$ 은 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 정의한 후에 $m=1$ 인 특수한 경우로 취급되고, 그때에 가서 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ 임이 비로소 정당화된다. 이에 비해 대안적인 정의를 따를 경우 맨 먼저 $\sqrt[n]{a}$ 와 $a^{\frac{1}{n}}$ 을 a(혹은 $\frac{1}{a}$)의 양의 거듭제곱근(의 두 가지 표현)으로 한꺼번에 정의하고 이 정의에 의해 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ 은 명백하게 되며, 그 후 $a^{\frac{1}{n}}$ 의 거듭제곱으로 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 정의하게 된다.[9] 즉, 학교수학에서 서로 같은 것으로 취급하는 두 대상 $\sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{1}{n}}$ 을 처음부터 같은 것으로 취급한다는 것이다. 이는 $\sqrt[n]{a^m}$ 과 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, $(\sqrt[n]{a})^m$ 과 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 등에 대해서도 마찬가지이다.

n이 양의 정수이면 a의 양의 n제곱근이고, n이 음의 정수이면 $\frac{1}{a}$의 양의 $(-n)$제곱근이 된다. 그런데 만약 $a^{\frac{1}{n}}$ 의 정의의 타당성에 대한 설명을 덧붙이고자 한다면, 지수법칙 유지의 관점에서 다음과 같은 설명을 함께 제시할 수도 있을 것이다.

"$a>0$ 이고 지수가 유리수일 때, 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ 이 성립한다고 가정하면, $a^{\frac{1}{n}}$ 의 n개의 곱은 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a$ 이다.
즉, $a^{\frac{1}{n}}$ 은 a의 n제곱근 중 하나이다. 따라서 자연수 n에 대하여 $a>0$일 때 $a^{\frac{1}{n}}$ 을 a의 양의 n제곱근 즉, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 으로 정의한다."

Ⅲ. 결 론

이상의 논의를 통해 우리는 고등학교 수학Ⅰ에서 양의 실수 a에 대한 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 현행 교과서에서처럼 $\sqrt[n]{a^m}$ 즉, $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ 으로 정의할 수도 있지만, $(\sqrt[n]{a})^m$ 즉, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ 로 정의할 수도 있음을 <그림 2>에 제시된 대안적인 정의의 예시를 통해 살펴보았다. 그리고 복소수의 관점에서 볼 때, 전자보다는 후자의 정의가 보다 보편적인 정의임을 밝혔다. 더구나 현행 교과서에서 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 정의하는 과정에 제시되는 설명 중에는 일관성의 측면에서나 논리적인 면에서 어색하거나 부적절한 부분이 존재하며, 본고에서 제시한 대안적인 정의에서 그러한 문제점이 해소될 수 있음을 살펴보았다.

결국 현재 '학교수학 내용의 범위와 수준에 한정'해서 볼 때 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 $\sqrt[n]{a^m}$ 으로 정의하는 것이 틀렸다고는 볼 수 없으나 이 정의가 $(\sqrt[n]{a})^m$보다 더 적절한 정의라고 할 만한 충분히 타당한 근거를 제시하기는 어려워 보이며 오히려 후자의 정의가 보다 보편타당하다는 점에서, 이후에 발행되는 교과서에서는 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$ 을 본고에 제시된 예시 정의처럼 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ 으로 정의하는 방안을 검토할 필요가 있다.

한편, 본 연구에서는 복소수 지수의 정의라는 보다 넓고 보편적인 관점에서 현행 고등학교 수학 교과서에

9) 이러한 내용 전개 방식을 정수 지수의 정의에도 적용할 수 있다. 현행 교과서에서는 a^0과 a^{-n}을 정의한 후 a^{-1}을 $n=1$인 특수한 경우로 다루는데, 이와는 달리 a^0과 a^{-1}을 먼저 정의한 후 a^{-n}을 a^{-1}의 거듭제곱 즉, $a^{-n}=(a^{-1})^n$ 으로 정의할 수도 있을 것이다.

제시된 유리수 지수의 정의를 비판적으로 검토하였는데, 이와 더불어 유리수 지수를 포함한 지수 정의의 확장이 수학의 역사에서는 어떻게 이루어져 왔고 외국의 교과서에서는 어떻게 다루어지고 있는지, 그리고 교사와 학생들은 이에 대하여 어떻게 인식하고 있는지 등에 대한 교수학적 관점에서의 분석 연구가 추가적으로 이루어질 필요가 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8].

김수환 외 (2010). 고등학교 수학 I. 교학사.

김해경 외 (2010). 고등학교 수학 I. 더텍스트.

도종훈 · 최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(5), 697-706.

양승갑 외 (2010). 고등학교 수학 I. 금성출판사.

우무하 외 (2010). 고등학교 수학 I. 박영사.

우정호 외 (2010). 고등학교 수학 I. 두산동아.

유희찬 외 (2010). 고등학교 수학 I. 미래엔컬처그룹.

윤재한 외 (2010). 고등학교 수학 I. 더텍스트.

이강섭 외 (2010). 고등학교 수학 I. 지학사.

이동원 외 (2010). 고등학교 수학 I. 법문사.

이만근 외 (2010). 고등학교 수학 I. 고려출판.

이준열 외 (2010). 고등학교 수학 I. 천재교육.

정상권 외 (2010). 고등학교 수학 I. 금성출판사.

최영기 (2000). $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류해석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 39(2), 145-150.

최용준 외 (2010). 고등학교 수학 I. 천재교육.

황석근 외 (2010). 고등학교 수학 I. 교학사.

황선욱 외 (2010). 고등학교 수학 I. 좋은책신사고.

Choi, Y. G., & Do, J. H. (2005). Equality involved in $(-8)^{\frac{1}{3}}$ and 0.999⋯. *For the learning of mathematics*, 25(3), 14-17.

Churchill, R. V., & Browon, J. W. (1990). *Complex variables and applications*. MaGraw-Hill.

Silverman, H. (1975). *Complex variables*. Boston : Houghton Mifflin.

Comments On the Definition of the Rational Exponent $a^{\frac{m}{n}}$ in Contemporary Korean Highschool Mathematics Textbooks

Do, Jong Hoon
Seowon University
241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea
E-mail : jhoondo@seowon.ac.kr

Park, Yun Beom[10)]
Seowon University
241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea
E-mail : ybpark@seowon.ac.kr

There may be two methods defining the rational exponent $a^{\frac{m}{n}}$ for any positive real number a. The one which is used in all korean highschool mathematics textbooks is to define it as $\sqrt[n]{a^m}$, that is $(a^m)^{\frac{1}{n}}$. The other is to define it as $(\sqrt[n]{a})^m$, that is $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. In this paper, we insist that the latter is more appropriate and universal, and that the contents of current textbooks on the definition of the rational exponent should be corrected.

* ZDM classification : U23
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : rational exponent, exponential law

10) corresponding author