韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 02. 제 50권, 제 1호, 41-59.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2011, Vol. 50, No. 1, 41-59.

범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석
- 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로 -

방 정 숙 (한국교원대학교)
최 지 영 (서울대동초등학교)

I. 시작하는 말

모든 사람들에게 대수와 관련된 기본적인 소양과 기초적인 대수적 사고 능력이 중요시되면서 대수는 수학과 교육과정 전반에 걸쳐 지속적으로 다루어야 할 핵심 주제로 강조되고 있다. 특히, 최근 초기 대수(early algebra) 교육의 필요성에 관심이 모아지면서 초등학교 저학년 때부터 대수적 사고 능력을 배양할 수 있는 기회와 경험이 제공되어야 한다는 주장이 계속해서 제기되고 있다(Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2008).

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])에서 제시한 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서도 학교 수학의 10대 규준 중 하나로 대수를 강조하고 있다. 여기서 대수는 모든 학생들이 유아원·유치원부터 12학년에 이르기까지 획득해야 하는 필수 내용으로 대수 학습을 통해 학생들은 규칙성과 관계 및 함수를 이해할 수 있어야 하고, 대수기호를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있어야 하며, 수학적 모델을 활용하여 양 사이의 관계를 표현하고 이해하는 것은 물론, 다양한 맥락에서 변화를 분석할 수 있어야 한다는 점을 강조하고 있다(NCTM, 2000). 또한, 최근 우리나라에서 창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형에 관한 연구에서도 초등학교에서 '대수' 영역을 신설하는 것에 대해 심도 깊은 논의가 진행되기도 하였다(백석윤, 2009).

그러나 전통적으로 대수 교육은 문자기호가 본격적으로 도입되는 중등학교 이후의 과정으로 간주되어 왔으며 초등학교 교육과정은 학생들의 수치적인 계산 능력과 산술적인 사고 능력의 개발에 초점이 맞추어져 왔기 때문에, 초등학교 교육과정에서 초기 대수와 관련된 지도는 상대적으로 강조되지 못했던 것이 사실이다(교육부, 1998; 김성준, 2004).

이러한 경향에 반하여, 최근 초기 대수 교육을 지향하는 연구들을 보면 기존의 초등학교 교육과정에 변화를 요구하고 있다. 그러나 이런 변화는 단순히 초기 대수와 관련된 내용 요소를 새롭게 추가하여 수학수업시수를 늘리거나 기존의 내용 요소를 상대적으로 제거·축소하는 것을 의미하지는 않는다는 것에 주의를 기울일 필요가 있다(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009). 오히려 선행 연구들은 공통적으로 초기 대수와 관련된 사고의 요소와 아이디어들이 기존의 학교 수학 교육과정을 더욱 의미 있게 연결하고 통합할 수 있는 주요한 구성 요소라고 제안한다. 그리고 초기 대수의 도입을 통해 산술과 대수와의 단절을 해소하고 학교수학에 일관성과 깊이 그리고 힘을 부여해 준다는 것을 강조한다(Kaput, 1995; NCTM, 2000).

이와 같은 맥락에서 초기 대수 교육이 성공적으로 이루어지기 위한 토대인 초등학교 교과서의 개발을 위해서는 무엇보다도 현재의 교육과정에서 초기 대수와 의미 있게 연결되고 통합될 수 있는 내용이 어떻게 다루어지고 있는지에 대한 분석과 논의가 필요하다. 초등 수학 교육에서 수와 연산 영역은 가장 기본이며 핵심 영역에 해당한다. 또한, 수와 연산의 성질 및 관계를 파악하는 것은 수학의 기본이 되면서 동시에 대수 이해의 기초가

* 접수일(2010년 10월 25일), 수정일(2011년 1월 14일), 게재확정일(2011년 2월 10일)
* ZDM분류 : H12
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어 : 초기 대수, 대수적 사고, 일반화된 산술, 수학 교과서 분석, 수의 성질, 연산의 성질, 교환성, 결합성, 분배성, 항등원, 연산 사이의 관계

된다(NCTM, 2000). 본 논문은 선행연구의 고찰을 바탕으로 범자연수와 연산을 중심으로 개정 수학 교과서에서 초기 대수 교육과 관련된 내용을 분석하고자 한다. 이런 분석과 논의를 통해 초등학교 학생들의 대수적 사고 능력을 기르는 데 적절한 교과용 도서를 개발하고 적용하는데 기초적인 자료 및 시사점을 제공하고자 한다.

II. 초기 대수 교육을 위한 접근 방법: 일반화된 산술로서의 관점

1. 초기 대수적 접근 방법

전통적인 대수 교육에서 많은 학생들이 겪는 어려움에 직면하여 연구자들은 여러 가지 대안들을 제시해 왔는데, 크게 보면 전 대수적 접근방법(pre-algebra approach)과 초기 대수적 접근방법(early-algebra approach)으로 나눌 수 있다. 전 대수적 접근방법은 기본적으로 산술과 대수는 분명한 차이가 있고, 이러한 학문 간의 차이 및 학생들의 불충분한 인지 발달 때문에 대수 학습이 어려워지게 된다는 가정 아래, 주로 중등학생들을 대상으로 산술로부터 대수로의 비약적인 전이를 완화시키는 교수학적 프로그램을 개발하는 데 초점을 둔다(예, Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, Boileau, & Garancon, 1996). 반면에, 초기 대수적 접근 방법은 기본적으로 산술과 대수는 완전히 구분될 수 있는 것이 아니기 때문에 산술을 먼저 가르치고 대수를 나중에 가르치는 것에 반대하며 수학 학습의 초기 단계에서부터 대수적인 추론 능력을 개발할 수 있는 프로그램을 제공할 것을 강조한다(예, Carpenter 외, 2003; Kaput, 2008).

사실 산술에 대한 깊은 이해는 본질적으로 대수적인 이해를 필요로 하며, 현재의 초등학교 교육과정에 이미 대수적 요소가 포함되어 있다고 생각되기 때문에(김성준, 2004; Kaput, 1998), 본 논문은 기본적으로 초기 대수적 접근 방법을 따르며 이에 적합하게 초등학교 수학 교과서를 분석함으로써 초등학생들의 대수적 사고 개발에 기여하고자 한다.

2. 일반화된 산술로서의 대수 관점

최근 많은 연구자들이 초기 대수적 접근 방법에 동의하면서 초등학교 교육과정에 대수적인 내용이 포함되어야 한다는 주장을 하면서도 (NCTM, 2000), 구체적으로 어떤 주제로 어떻게 접근해야 하는지와 관련해서는 일치된 주장이 부족하다. 예를 들어, 연구자의 관점에 따라 일반화된 산술을 강조하기도 하고(Mason, 1996), 양 사이의 관계와 양적추론 및 방정식의 풀이에 초점을 두기도 하며(Bodanskii, 1991), 함수적인 관계와 함수적 사고에 초점을 두기도 한다(Smith, 2008), 또한 다양한 상황을 포함하는 다차원적인 관점을 제시하기도 한다(예, Kaput, Blanton, & Moreno, 2008).

이에 본 연구에서는 초등 수학 교육에서 가장 많은 부분을 차지하는 수와 연산 영역을 분석하기에 적당한 것으로 생각되며, 초등학생들에게 적절한 대수적 사고 중의 하나로 강조되어 온, 일반화된 산술로서의 대수 관점에 주목하고자 한다. 산술은 수에 관한 과학으로 초등학교에서의 산술 교육은 수와 연산의 개념 이해와 사칙 연산 능력의 숙달에 초점을 두었다. 그러나 산술 즉, 수 체계 내에서 정의되는 연산은 암묵적으로 일정한 규칙인 공리체계를 따르게 되는데, 이런 공리 체계는 <표 II-1>의 체의 공리에서와 같이 형식적인 언어로 표현될 수 있다. 이러한 체의 공리들은 일반적인 연산의 성질을 다루며 보통 수학의 형식적인 언어로 표현되는데 이는 대수적 표기법과 많은 것을 공유한다. 따라서 이런 공리들은 산술이 본질적으로 대수적인 특징을 갖는다는 것과 이런 측면에서 산술과 초기 대수는 완전히 구별되지 않는다는 점을 암시한다고 볼 수 있다(Carraher & Schliemann, 2007).

<표 II-1> 체의 공리

이름	덧셈	곱셈
교환성	$a+b=b+a$	$ab=ba$
결합성	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
분배	$a(b+c)=ab+ac$	$(a+b)c=ac+bc$
항등원	$a+0=a=0+a$	$a\times1=a=1\times a$
역원	$a+(-a)=0=(-a)+a$	$a\times a^{-1}=1=a^{-1}\times a$ if $a\neq0$

그러나 연산 능력이 체의 공리에 의해 학습되는 것은 아니며, 체의 공리들이 계산 절차나 알고리듬을 명시적으로 포함하고 있는 것도 아니다. 예를 들면, 체의 공리들은 받아올림이 있는 두 수의 덧셈 알고리듬이나, 463×57을 세로셈 알고리듬을 통해 계산하는 방법에 대해 설명하지 않으며, 뺄셈과 나눗셈의 경우에는 더욱 더 그러하다. 역으로 연산 능력의 숙달이 공리 체계에 대한 이해를 보장하지는 않는다. 즉, 두 수의 곱셈을 정확하게 구할 수 있는 능력이 필연적으로 곱셈의 교환법칙에 대한 이해를 수반하지는 않는다. 이것은 수와 연산에 관한 학습이 반드시 학생들에게 대수적인 사고를 개발할 수 있는 경험을 제공하는 것은 아니라는 점을 의미한다.

최근 일련의 연구들은 수와 연산에서의 일반화 경험을 통해 초기 대수 교육을 제공할 수 있다고 주장한다 (Bastable & Schifter, 2008; Carpenter et al., 2003; Carraher & Schliemann, 2007). 예를 들어, Carpenter와 그 동료들(2003)은 프로젝트에 참여했던 초등학교 3학년부터 5학년 학생들이 수식의 참과 거짓에 대한 탐구와 교실토론을 통해 산술의 구조적인 관계에 주목하고, 학생들 스스로 "어떤 수에 0을 더하면, 처음에 시작했던 수를 얻게 된다", "어떤 수에서 그 수를 빼면, 0이 된다", "두 수를 더할 때에는 순서를 바꾸어 더할 수 있다" 등의 일반화를 만들고 정당화할 수 있다는 것을 발견했다. 여기서 학생들은 비록 대수적인 기호로 표현하지는 않았지만, 일상 언어를 사용하여 덧셈의 항등원, 덧셈의 역원 그리고 덧셈의 교환성에 대해 일반화된 성질을 언급한 것으로 해석할 수 있다. 이처럼 초등학생들은 기호적이고 형식적인 대수 표기법을 학습하지 않고도 수 체계의 일반적이고 대수적인 성질에 대하여 탐구하고 표현할 수 있다. 이런 수와 연산의 성질에 대한 탐구는 수학적 추론의 본질로서 의미 있게 다루어질 필요가 있으며 동시에 학교 교육과정 전반에 걸쳐 지속적으로 다루어져야 할 대수 교육의 구성요소로 강조되어야 한다.

Ⅲ. 수학 교과서 분석의 개요

1. 분석의 범위와 초점

수와 연산 영역의 구성은 크게 수 체계에 관련된 내용과 연산에 관련된 내용으로 구분할 수 있다. 수 체계와 관련해서는 다루는 수의 종류에 따라 범자연수, 분수, 소수로 구분할 수 있다. 연산에 관련된 단원 구성은 해당 학년에서 다루는 수의 범위 내에서의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙연산을 다룬다. 초등 수학 교육에서 일반화된 산술로서의 대수 관점을 제대로 분석하기 위해서는 범자연수뿐만 아니라 양의 유리수 범위도 포함하여 살펴보는 것이 좋겠지만, 소논문에서 이를 모두 분석하는 것은 너무 광범위하다. 또한 교과서 분석의 핵심인 '일반화'라는 측면에서 생각해보면, 일단 4학년에서 자연수의 사칙연산이 일반화되도록 지도되기 때문에(교육인적자원부, 2007a), 본 논문에서는 범자연수 범위로 제한하여 해당 지도 내용을 자세하게 분석한다.

본 논문에서 일반화된 산술로서의 대수 관점과 관련하여 교과서를 분석할 때 핵심적인 것은 관계(relations)와 일반화(generalization)에 있다. 대수는 규칙성과 관계에 대한 연구로, 이는 그 자체로서도 중요하지만 특히 규칙성과 관계를 학습함으로써 자연스럽게 대수적 사고를 개발하기 때문에 중요하다(Reys et al., 2009). 본 논문은 수와 연산 영역을 분석하기 때문에, 관계를 중심으로 분석한다.

학생들의 대수적 사고를 개발하기 위한 중요한 관계 중의 하나는 수와 연산의 성질(법칙)이다(Batable & Schifter, 2008; NCTM, 2000; Reys et al., 2009). 구체적으로, Reys와 그 동료들(2009)은 0이나 1과 같은 특정한 수의 성질과 다양한 연산의 성질을 활용하여 어떻게 대수적 사고를 향상할 수 있는지 논의한다. 예를 들어, 학생들에게 79+0=79 또는 24×1=24와 같은 닫힌 식(closed sentences)을 제시하고 이것이 참인지 생각해 보게 한 다음, 37+□=37, 1002×□=1002와 같은 열린 식(open sentences)을 제시할 것을 권장한다. 마지막으로 예로 제시한 수식이 나타내는 성질을 일반화하기 위한 추측을 해 보도록 학생들을 격려하는 것이 중요하다고 주장한다. 물론 학생들이 즉각적으로 훌륭한 일반화를 하기가 어려울 수도 있으나, 교사가 추가적인 예를 제시하거나 아니면 학생들 스스로 유사한 예를 만들어 보면서 관련된 수학적 성질을 찾아 기록하게 할 수 있다. 물론 여기서 일반화되는 수학적 성질은 "0과 어떤 수를 더하면 그 수가 된다"와 "어떤 수에 1을 곱하면 원래 수가 된다"라는 것이다. 이와 같은 수와 연산의 성질은 수의 범위가 확장되더라도 변하지 않고 일정하게 유지되는 성질로써

초기 대수 교육과 자연스럽게 연결된다. 따라서 초등학교 교과서에서 덧셈의 항등원(0), 곱셈의 항등원(1), 덧셈의 교환법칙, 덧셈의 결합법칙, 곱셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙과 관련된 내용이 어떻게 도입되고 여러 학년에 걸쳐 어떻게 기술되는지 등을 분석할 필요가 있다.

한편, 관계라는 측면에서 분석해야 할 다른 주요 내용은 연산 간의 관계이다. Kaput(2008)은 일반화된 산술로서의 대수 관점에서 핵심적인 내용은 연산과 그 성질을 일반화하는 것뿐만 아니라 연산간의 보다 일반적인 관계와 형태에 대해서 추론하는 내용을 다루어야 한다고 주장한다. 여기에는 산술의 구조로부터 대수의 구문론적인(syntactic) 측면을 파악하는 것이 포함된다. 예를 들어, 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계를 이해함으로써, 주어진 특정한 수에 관계없이 수식의 형태에 주목하여 덧셈식을 보고 뺄셈식의 형태로 대치하는 것이다. 이런 측면에서 본 논문에서는 다양한 연산 간의 관계를 분석 내용으로 추가하여 각각의 관계가 어떻게 도입되는지, 그 관계가 여러 학년에 걸쳐 일관성 있게 기술되는지, 그 관계를 활용하여 계산을 효율적으로 할 수 있는 기회를 제공하는지 등을 살펴볼 필요가 있겠다. 이와 같은 선행연구의 검토를 토대로 본 논문에서 다루게 되는 분석 내용과 초점을 요약하면 <표 III-1>과 같다.

2. 교과서 분석의 기초: 개정 교육과정의 관련 내용

교과서는 수학과 교육과정을 반영하기 위한 구체적인 자료이므로, 교과서를 제대로 분석하기 위해서는 먼저 교육과정에서 관련된 내용을 어떻게 구성하고 있는지 전체적인 체계를 살펴보는 것이 필요하다. 이에 개정 교육과정에 제시된 범자연수와 연산 관련 내용을 정리하면 <표 III-2>와 같다(교육인적자원부, 2007a).

상세하게 교과서 분석을 하기 전에 일반화된 산술로서의 대수 관점에서 관련된 내용에 대한 전반적인 구성을 살펴보는 것이 도움이 될 것이다. 첫째, 연산의 일반적인 원리 및 법칙 이해와 관련하여 교육과정의 내용 구성을 살펴볼 필요가 있다. <표 III-2>를 살펴보면, 지도 내용 및 교수·학습상의 유의점에 연산을 여러 가지 방법으로 알아보는 내용을 강조하고 있음을 알 수 있다. 특히 계산 방법의 다양성뿐만 아니라 계산에 활용되는 표현 방법의 다양성도 포함하고 있고, 연산을 수행하기 전에 어림해 보는 활동을 지속적으로 강조하고 있다. 이와 같이 계산 방법에는 상당히 초점을 맞춘 반면에, 계산 원리나 법칙에 대한 이해에 관련해서는 직접적인 언급을 찾아보기 어렵다. 수와 연산 영역에서의 지도 초점이 계산 숙달보다는 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙의 이해에 있다는 점을 감안한다면(교육과학기술부, 2008), 지도 내용이나 유의점에도 이와 같은 내용이 명시적으로 기술될 필요가 있을 것이다.

둘째, 연산의 일반적인 원리나 성질의 적용과 관련하여 교육과정의 내용 구성을 살펴볼 필요가 있다. <표 III-2>의 지도 내용을 살펴보면, 학년별로 다루는 수의 범위를 어디까지 확장할 것인지에 관한 정보는 명확하게 제시하고 있는 반면에, 수의 범위가 확장되더라도 일정하게 유지되는 연산의 일반적인 원리나 성질과 관련된 진술은 찾아보기 어렵다. 다만, 4학년의 <교수·학습상의

<표 III-1> 본 논문의 분석 내용과 초점

분석 내용		분석 초점
수의 성질	0의 성질 1의 성질	· 0의 성질이나 0과의 연산을 어떻게 다루는가? · 1의 성질이나 1과의 연산을 어떻게 다루는가?
연산의 성질	덧셈의 교환법칙 덧셈의 결합법칙 곱셈의 교환법칙 곱셈의 결합법칙 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙	· 각 연산의 성질을 어떻게 도입하는가? · 여러 학년(학기)에 걸쳐 각 연산의 성질이 일관성 있게 기술되는가? · 학생들이 각 연산의 성질을 일반화할 기회를 갖는가? · 각 연산의 성질을 활용하여 계산을 효율적으로 할 수 있는 기회를 제공하는가?
연산간의 관계	덧셈과 뺄셈간의 관계 곱셈과 나눗셈간의 관계 덧셈과 곱셈간의 관계 뺄셈과 나눗셈간의 관계	· 각 연산간의 관계를 어떻게 도입하는가? · 여러 학년(학기)에 걸쳐 각 연산간의 관계가 일관성 있게 기술되는가? · 학생들이 각 연산간의 관계를 일반화할 기회를 갖는가? · 각 연산의 관계를 활용하여 계산을 효율적으로 할 수 있는 기회를 제공하는가?

<표 Ⅲ-2> 개정 수학과 교육과정에 제시된 범자연수와 연산 관련 내용

학년	내용
1학년	[1] 100까지의 수 • 0과 100까지 수의 개념을 이해하여, 수를 세고 읽고 쓸 수 있다. • 100까지 수의 범위에서 수 계열을 이해하고, 수의 크기를 비교할 수 있다. • 100까지의 수에 대한 위치적 기수법의 기초 개념을 이해한다. • 10이하의 수 범위에서 두 수로 분해하고, 두 수를 하나의 수로 합성할 수 있다. • 수 세기가 필요한 상황에서 묶어 세기, 뛰어 세기를 할 수 있다. [2] 간단한 수의 덧셈과 뺄셈 • 덧셈과 뺄셈이 이루어지는 상황을 알고, 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해한다. • 한 자리 수끼리의 뺄셈을 익숙하게 할 수 있다. • 합이 10이 되는 덧셈과 '10-(한자리수)'인 뺄셈식을 통하여 10에 대한 보수를 찾을 수 있다. • '(두 자리 수)-(한 자리 수)'의 계산을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해한다. • 한 자리 수인 세 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. [3] 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 두 자리 수의 범위에서 받아올림이 없는 덧셈을 할 수 있다. • 두 자리 수의 범위에서 받아내림이 없는 뺄셈을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다. <교수·학습상의 유의점> • '더한다', '합한다', '~보다 큰 수', '뺀다', '덜어 낸다', '차', '~보다 작은 수' 등의 일상적 용어를 사용하여 덧셈과 뺄셈의 개념에 친숙하게 된다. • 받아올림이나 받아내림이 없는 두 자리 수끼리의 덧셈, 뺄셈을 여러 가지 방법으로 알아보고, 암산으로 해결할 수 있다.
2학년	[1] 1000까지 수 • 일, 십, 백의 자리 값의 의미와 위치적 기수법을 이해하고, 1000까지의 수를 읽고 쓸 수 있다. • 세 자리 수의 계열을 이해하고, 세 자리 수의 크기를 비교할 수 있다. [2] 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 두 자리 수의 범위에서 받아올림이 있는 덧셈과 받아내림이 있는 뺄셈을 할 수 있다. • 두 자리 수의 범위에서 세 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해한다. [3] 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 세 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. • 세 자리 수의 범위에서 세 수의 덧셈, 뺄셈을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다. [4] 곱셈 • 곱셈이 이루어지는 상황을 알고, 곱셈의 의미를 이해한다. • 곱셈구구를 이해하고, 한 자리 수의 곱셈을 할 수 있다. <교수·학습상의 유의점> • 세 자리 수의 덧셈은 합이 1000 미만인 범위에서 한다. • 덧셈과 뺄셈을 하기 전에 답을 어림해 보게 한다. • 곱셈의 의미는 같은 수 더하기와 배의 개념을 통하여 다루고, 1의 단 곱셈구구와 0의 곱은 실제 생활과 관련지어 다룬다. • 연속량의 등분할에서는 도형을 모양과 크기가 같게 분할하는 경우만 다룬다.
3학년	[1] 10000까지의 수 • 일, 십, 백, 천의 자리 값의 의미와 위치적 기수법을 이해하고, 10000까지의 수를 읽고 쓸 수 있다. • 네 자리 수의 계열을 이해하고, 크기를 비교할 수 있다. [2] 네 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. • 네 자리 수의 범위에서 세 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다. [3] 곱셈 • '(두 자리 수)×(한 자리 수)', '(세 자리 수)×(한 자리 수)', '(두 자리 수)'×'(두 자리 수)'의 계산을 할 수 있다. • 곱셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다. [4] 나눗셈 • 나눗셈이 이루어지는 상황을 알고, 나눗셈의 의미를 이해한다.

3학년	• 곱셈과 나눗셈 사이의 관계를 이해한다. • '(두 자리 수)÷(한 자리 수)'의 계산을 할 수 있고, 나눗셈에서 몫과 나머지의 의미를 이해한다. • 나눗셈을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다. <교수·학습상의 유의점> • 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 하기 전에 답을 어림해 보게 한다.
4학년	[1] 다섯 자리 이상의 수 • 10000 이상의 큰 수에 대하여 자릿값과 위치적 기수법을 이해하고, 수를 읽고 쓸 수 있다. • 수 계열을 이해하고 크기를 비교할 수 있다. [2] 자연수의 사칙계산 • 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈을 할 수 있다. • 나누는 수가 두 자리 수인 나눗셈을 할 수 있다. • 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 계산 문제를 해결할 수 있다. <교수·학습상의 유의점> • 자연수의 사칙연산에서 완성되도록 계산 방법을 일반화한다. • 지나치게 복잡한 자연수 혼합 계산은 다루지 않는다. • 자연수, 분수, 소수의 계산에서 계산하기 전에 답을 어림해 보게 할 수 있다. • 계산하거나 어림한 값을 계산기를 사용하여 확인해 볼 수 있다.

유의점>에 "자연수의 사칙연산에서 완성되도록 계산 방법을 일반화한다"라는 진술만이 제시되고 있을 뿐이다. 학생들은 구체적인 조작 활동이나 수를 다양한 연산 상황으로 표현해보는 경험 등을 통해 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등의 연산의 성질을 이해하고 탐구할 수 있다 (Batable & Schifter, 2008). 또한, 이런 성질들을 활용하여 문제를 더욱 효율적으로 해결할 수 있을 뿐만 아니라 궁극적으로 수의 범위가 확장되더라도 일정하게 유지되는 일반적인 원리로서의 연산의 성질에 익숙하게 됨으로써 후속 대수 학습의 토대를 쌓을 수 있다(Carraher & Schliemann, 2007). 이와 같은 측면에서 연산의 성질이 적극적으로 활용될 수 있는 교육과정의 내용 구성을 검토할 필요가 있다. 예를 들어, NCTM(2000)에서는 유아원에서 2학년의 학생들이 특정한 수를 활용하여 교환법칙과 같은 연산의 일반적인 원리나 성질을 예시할 수 있어야 한다는 것과 3학년에서 5학년까지의 학생들이 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 연산의 성질을 확인하고 범자연수 연산에 적극적으로 활용할 수 있어야 한다는 점을 명시화한다. 이는 초등학교 학생들의 대수적 사고 개발을 위해서 학년군별로 어디에 초점을 두어 지도해야 하는지를 명확하게 제시한 것으로써 우리에게 시사하는 바가 크다고 생각된다. 만약 우리나라 초등학교 교육과정에서도 대수적 사고 신장을 보다 적극적으로 모색할 필요가 있다면 이와 같이 관련 내용을 어느 학년에서 어떻게 접근하고 학년별로 어떻게 심화·확대해 나갈 것인지에 관한 보다 체계적이고 명확한 기술이 필요하다고 본다.

셋째, 연산 간의 관계 이해와 관련하여 교육과정의 내용 구성을 살펴볼 필요가 있다. 우선 덧셈과 뺄셈간의 관계와 관련하여 1학년부터 두 연산을 함께 다루면서 그 관계를 이해하는 내용을 포함하고 있다. 특히, 제7차 교육과정에서는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 다룰 때 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해한다는 내용을 명시적으로 제시한 반면에(교육부, 1997), 개정 교육과정에서는 간단한 수의 덧셈과 뺄셈에서 두 연산간의 관계 이해를 다룸으로써 더 일찍 연산간의 관계에 초점을 두고 있다고 볼 수 있다. 한편, 곱셈과 나눗셈간의 관계와 관련하여 2학년에서는 곱셈만을 다루고 3학년에서 나눗셈을 처음으로 도입한 후, 이 후에 곱셈과 나눗셈 간의 관계 이해를 제시하고 있다. 덧셈과 뺄셈의 제시 방법과는 다르게 곱셈과 나눗셈은 각각의 연산을 별도로 다룬 다음, 두 연산 간의 관계를 탐색해 보도록 하고 있는데, 이에 대한 적절성을 탐색할 필요가 있다.

3. 교과서 분석의 기초: 범자연수와 연산에 관련된 교과서 지도 내용

교과서를 분석하기 전에 관련 내용들이 여러 학년(학기)에 걸쳐 어떻게 구성되어 있는지 전반적인 지도 내용을 이해하는 것이 필요하다. <표 III-3>은 범자연수와 연산에 관련된 수학 교과서의 지도 내용을 1학년 1학기부터 4학년 1학기까지 요약한 것이다(교육과학기술부,

2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2010a, 2010b, 2010c). 이는 Ⅳ장에서 분석되는 내용에 대한 기초 자료로써 전반적인 지도 내용을 살펴볼 필요가 있을 때마다 참조된다.

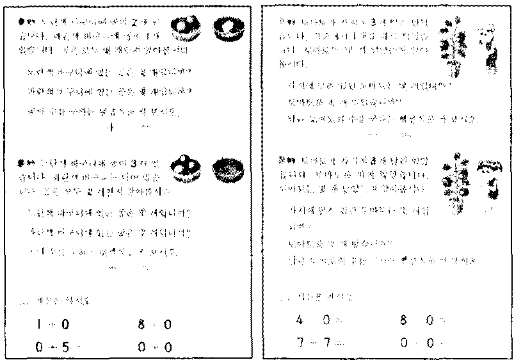
Ⅳ. 일반화된 산술로서의 대수 관점에 따른 교과서 분석

1. 수의 성질에 대한 분석

가. 0의 성질

0은 덧셈의 항등원으로서, 실수의 집합 R의 임의의 원소 a에 대하여, $a+0=a=0+a$ 가 성립한다. 0은 자연수에 비하여 더욱 추상적인 개념으로 덧셈에 대한 0의 성질은 0과 덧셈이 도입되는 1학년 1학기부터 범자연수의 사칙연산이 완성되는 4학년 1학기에 이르기까지 전반적으로 다루어질 수 있다. 즉, 덧셈과 관련된 단원은 1학년 1학기부터 4학년 1학기에 이르기까지의 모든 학기에 구성되어 있으므로, 수의 범위가 확장되더라도 일정하게 유지되는 성질로서 덧셈의 항등원을 다룰 수 있을 것이다. 구체적으로 교과서를 살펴보면, 0은 1학년 1학기의 '1. 5까지의 수' 단원에서 도입되는데, 1부터 5까지의 수를 먼저 도입하고 수의 순서 및 하나 더 많은 것과 하나 더 적은 것을 알아보게 한 후, 0의 개념이 도입된다(<표 Ⅲ-3> 참조).

덧셈과 뺄셈에서의 0의 성질은 1학년 1학기의 '4. 더하기와 빼기' 단원에서 각각 활동 중의 하나로 0을 포함하는 연산에서 다뤄지고 있다. 덧셈의 경우를 자세히 살펴보면(<그림 Ⅳ-1> 참조), 노란색 바구니에 공이 2개 있고 파란색 바구니에 공이 1개 있는 경우에 전체 공의 수를 구하는 덧셈식을 써 본 활동에 기초하여, 파란색 바구니가 비어 있는 경우 어떻게 덧셈식을 쓸 수 있는지 묻고 있다.



1-1, p.62 1-1, p.67

<그림 Ⅳ-1> 덧셈과 뺄셈에서의 0의 성질

교과서에서는 하나의 덧셈식만 쓰도록 안내한 반면에, 해당 교사용 지도서를 보면(교육과학기술부, 2009e, p.185) 교사는 두 개의 덧셈식 즉 $3+0=3$과 $0+3=3$을 예상하고, "이와 같이 어떤 수에 0을 더하거나 0에 어떤 수를 더할 수 있습니다"라는 말을 통해서 0과의 연산 '가능성'을 다루고 있다. 그러나 그 연산의 결과, 즉 "어떤 수와 0과의 합(또는 0과 어떤 수의 합)은 항상 어떤 수 그 자신이 된다"는 0의 성질에 대한 일반화는 언급되어 있지 않다. 다만, 계산 문제에서 0의 위치를 다양하게 제시하고 있는데(예, 덧셈의 경우 1+0, 0+5, 0+0 등), 이는 0을 포함하는 덧셈과 뺄셈을 각각 한 번씩만 제시했던

<표 Ⅲ-3> 범자연수와 연산에 관련된 수학 교과서의 지도 내용

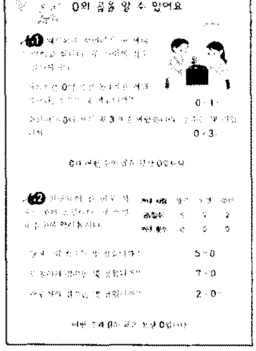
학기	단원	지도 내용
1-1	1. 5까지의 수	• 1부터 5까지의 수 세어보기→1,2,3,4,5 알아보기→수의 순서 알아보기→하나 더 많은 것 알아보기→하나 더 적은 것 알아보기→0알아보기→두 수의 크기 비교하기
	2. 9까지의 수	• 6,7 알아보기→8,9 알아보기→수의 순서 알아보기→두 수의 크기 비교하기→1 큰 수와 1작은 수 알아보기
	4. 더하기와 빼기	• 2,3,4,5의 가르기와 모으기→6,7의 가르기와 모으기→8,9의 가르기와 모으기→덧셈 알아보기→덧셈식 알아보기→뺄셈 알아보기→뺄셈식 알아보기→덧셈식을 보고, 뺄셈식 알아보기→뺄셈식을 보고 덧셈식 알아보기→두 수를 바꾸어 더해보기
	6. 50까지의 수	• 10 알아보기→19까지의 수 알아보기→몇 십 알아보기→몇 십 몇 알아보기→물건의 개수 세어보기→50까지의 수의 순서 알아보기→두 수의 크기 비교하기
1-2	1. 100까지의 수	• 60,70,80,90 알아보기→99까지의 수 알아보기→99까지의 수 세어보기→수의 순서 알아보기→두 수의 크기 비교하기

	3. 10을 가르기와 모으기	• 구체물 조작을 통하여 10을 두 수로 가르기→구체물 조작을 통하여 10이 되도록 두 수를 모으기→합이 10인 덧셈 및 덧셈식 알아보기→더해서 10이 되도록 두 수를 구하고 덧셈식으로 나타내기→10에서 빼기를 하고 뺄셈식으로 나타내기→10에서 몇을 뺐는지 알아보고 뺄셈식으로 나타내기
	4. 덧셈과 뺄셈(1)	• 세 수의 계산 알아보기→몇십과 몇의 합 구하기→몇십 몇과 몇의 합 구하기→몇십 몇과 몇십 몇의 합 구하기→몇십 몇과 몇의 차 구하기→몇십 몇과 몇십 몇의 차 구하기→덧셈식을 보고 뺄셈식 알아보기→뺄셈식을 보고 덧셈식 알아보기
	6. 덧셈과 뺄셈(2)	• 세 수의 덧셈 알아보기→(몇)+(몇)=(십 몇)의 덧셈하기(합이 10이 되도록 가수를 분해하여 더하기, 합이 10이 되도록 피가수를 분해하여 더하기)→(십 몇)-(몇)=(몇)의 뺄셈하기(감수를 분해하여 계산하기, 피감수를 분해하여 계산하기)→세 수 계산하기→여러 가지 방법으로 계산하기
2-1	1. 세 자리 수	• 백 알아보기→몇 백 알아보기→세 자리 수 세어보기→세 자리 수 읽고 쓰기→뛰어서 세어보기→두 수의 크기 비교하기→0에서 99까지의 수 배열표에서 규칙 찾기
	2. 덧셈과 뺄셈(1)	• 받아 올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 덧셈 알아보기→받아 내림이 있는 (두 자리 수)-(한 자리수)의 뺄셈 알아보기→세 수의 덧셈과 뺄셈 알아보기
	4. 덧셈과 뺄셈(2)	• 받아올림이 있는 두 자리 수의 덧셈 알아보기→받아내림이 있는 두 자리 수의 뺄셈 알아보기→덧셈과 뺄셈의 관계 알아보기→여러 가지 방법으로 계산하기→세 수의 혼합 계산 알아보기
	8. 곱셈	• 묶어서 세어보기→몇 배인지 알아보기→곱셈 알아보기→곱셈 활용하기
2-2	1. 곱셈구구	• 2,5단 곱셈구구 알아보기→3,4단 곱셈구구 알아보기→2,3,4,5단 곱셈구구 해보기→6,7단 곱셈구구 알아보기→8,9단 곱셈구구 알아보기→6, 7, 8, 9단 곱셈구구 해보기→1단 곱셈구구 및 0의 곱 알아보기→ →곱셈표에서 규칙 알아보기
	2. 덧셈과 뺄셈(1)	• 받아 올림이 없는 세 자리 수의 덧셈 알아보기→받아 내림이 없는 세 자리 수의 뺄셈 알아보기→여러 가지 방법으로 계산하기
	4. 덧셈과 뺄셈(2)	• 받아 올림이 한 번 있는 세 자리 수의 덧셈 알아보기→받아 올림이 두 번 있는 세 자리 수의 덧셈 알아보기→받아 내림이 한 번 있는 세 자리 수 뺄셈→받아 내림이 두 번 있는 세 자리 수 뺄셈→세 수의 계산
3-1	1. 10000까지의 수	• 천 알아보기→몇 천 알아보기→네 자리 수 알아보기→자릿값 알아보기→뛰어서 세어보기→두 수의 크기 비교하기
	2. 덧셈과 뺄셈	• 받아 올림이 있는 세 자리 수의 덧셈 알아보기→여러 가지 방법으로 덧셈하기→받아 내림이 있는 세 자리 수의 뺄셈 알아보기→여러 가지 방법으로 뺄셈하기
	4. 나눗셈	• 똑같이 묶어보기→똑같게 나누기→나눗셈의 몫 알아보기→곱셈과 나눗셈의 관계 알아보기→나눗셈의 몫을 구하는 방법 알아보기→나눗셈을 세로 형식으로 쓰는 방법 알아보기→곱셈을 활용하여 나눗셈의 몫 구하기
	6. 곱셈	• (몇십)×(몇) 계산하기→올림이 없는 (두 자리 수)×(한 자리 수) 계산하기→십의 자리에서 올림이 있는 (두 자리 수)×(한 자리 수) 계산하기→일의 자리에서 올림이 있는 (두 자리 수)×(한 자리 수) 계산하기→곱셈 활용하기
3-2	1. 덧셈과 뺄셈	• (네 자리 수)+(세 자리 수) 계산하기→(네 자리 수)+(네 자리 수) 계산하기→(네 자리 수)-(세 자리 수) 계산하기→(네 자리 수)-(네 자리 수)→세 수의 덧셈과 뺄셈 알아보기
	2. 곱셈	• 받아올림이 없는 (세 자리 수)×(한 자리 수) 알아보기→받아올림이 있는 (세 자리 수)×(한 자리 수) 알아보기→(몇십)×(몇십) 알아보기→(두 자리 수)×(몇십) 알아보기→(두 자리 수)×(두 자리 수) 알아보기→곱셈 활용하기
	4. 나눗셈	• (몇십)÷(몇) 계산하기→(몇십 몇)÷(몇) 계산하기(1)→나눗셈의 몫과 나머지 알아보기→나눗셈 검산하기→(몇십 몇)÷(몇) 계산하기(2)→(몇십 몇)÷(몇) 계산하기(3)
4-1	1. 큰 수	• 만 알아보기→다섯 자리 수 알아보기→십만, 백만, 천만 알아보기→억 알아보기→조 알아보기→큰 수 뛰어 세기→두 수의 크기 비교하기
	2. 곱셈과 나눗셈	• 100, 1000, 10000을 곱하는 것 알아보기→(몇백), (몇천)의 곱 알아보기→(세 자리 수)×(두 자리 수) 계산하기→(네 자리 수)×(두 자리 수)계산하기→세 수의 곱셈 알아보기→(몇십)으로 나누기(두 자리 수)÷(두 자리 수) 계산하기→(세 자리 수)÷(두 자리 수) 계산하기(1)→(세 자리 수)÷(두 자리 수) 계산하기(2)
	6. 혼합계산	• 덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 식의 계산 순서 알아보기→ 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식의 계산 순서 알아보기→( )가 있는 식의 계산 순서 알아보기→덧셈과 뺄셈, 곱셈이 섞여 있는 식의 계산 순서 알아보기→덧셈과 뺄셈, 나눗셈이 섞여 있는 식의 계산 순서 알아보기→( )가 있는 식의 계산 순서 알아보기→혼합 계산식의 계산 순서 알아보기

제7차 교과서에 비해(예, 덧셈의 경우 0+2) 0의 성질을 보다 다양하게 탐구할 기회를 제공하고 있다고 볼 수 있다(교육인적자원부, 2007b, 2007c).

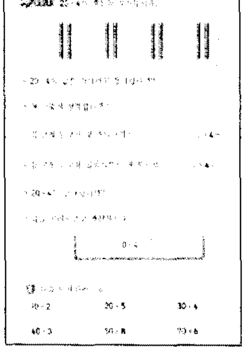
1학년 1학기 이후에 0자체와의 직접적인 덧셈이나 뺄셈은 제시되지 않는 반면에, 매 학기 등장하는 '덧셈과 뺄셈' 단원의 여러 가지 계산 과정에서 0의 성질을 자연스럽게 다루고 있다. 예를 들어, 1학년 2학기 '4. 덧셈과 뺄셈(1)' 단원에서 20+3과 같이 몇 십과 몇의 합을 구하는 계산 과정에서 0+3 또는 3+0이 다루어지고, 20+30을 구하는 과정에서 0+0을 다루게 된다. 이와 같은 계산 과정은 수의 범위가 세 자리 수와 네 자리 수로 확장되어도 유사한 방법으로 다루어지게 되며, 뺄셈의 경우도 비슷하다(교육과학기술부, 2009d, 2010b).

한편, 곱셈에서의 0의 성질과 관련하여 교과서를 살펴보면, 곱셈의 개념은 2학년 1학기 '8.곱셈'에서 도입되지만 0과의 곱셈이 처음 다루어지는 곳은 2학년 2학기 '1. 곱셈구구' 단원이다. 이 단원은 먼저 2의 단부터 9의 단까지의 곱셈 구구 및 활용에 관한 내용을 제시한 후 1의 단 곱셈구구와 0의 곱을 묶어 하나의 독립된 차시로 구성하여 제시하고 있다(<표 III-3> 참조). <그림 IV-2>에 제시된 바와 같이 공을 꺼내는 활동에서 0의 곱에 대해서 알아보게 하는데, 주목할 만한 것은 "0과 어떤 수의 곱은 항상 0입니다.", "어떤 수와 0의 곱은 항상 0입니다."라는 문장을 제시하고 있다는 것이다. 즉, 학생들에게 곱셈에서의 0의 성질을 명시적으로 일반화할 수 있는 기회를 제공하고 있다.



2-2, p.17

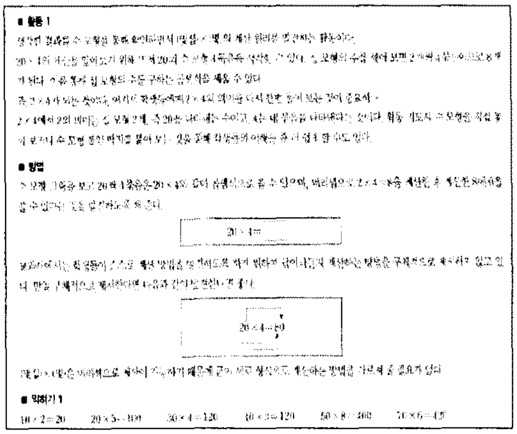
<그림 IV-2> 곱셈에서의 0의 성질



3-1, p.83

<그림 IV-3> (몇 십)×(몇)에서의 0의 성질

곱셈구구 단원 이후에 0자체와의 직접적인 곱셈은 제시되지 않는 반면에, 매 학기 등장하는 '곱셈' 또는 '곱셈과 나눗셈' 단원의 여러 가지 계산 과정에서 0의 성질을 다룰 기회가 있다. 예를 들어, 3학년 1학기 '6. 곱셈' 단원에서 20×4와 같이 몇 십과 몇의 곱을 구하는 계산 과정에서 0×4가 다루어진다. 그러나 <그림 IV-3>, <그림 IV-4>에 제시된 바와 같이 0과 어떤 수의 곱의 결과를 활용하는 대신에 머리셈으로 계산하여 2×4=8을 먼저 계산한 후 8에 0을 덧붙여 쓰는 방법을 발견할 것을 기대하고 있다(교육과학기술부, 2010a, 2010d). 물론 수모형을 통해서 (몇 십)×(몇)의 계산 원리를 발견하게 하고 이를 곱셈식으로 나타내보게 하는 것은 의미가 있으나, 0×4의 의미는 고려되지 않는 채 편리하고 간단한 방법이라는 이유로 머리셈만 지도하는 것은 초기 대수 지도에 있어서 재고해볼 필요가 있다.



<그림 IV-4> 3-1, p.83 해당 차시 지도서

이러한 경향은 이후의 곱셈 단원에서 일관되게 유지된다. 예를 들어, <그림 IV-5>에서 제시한 대로 3학년 2학기 '2. 곱셈' 단원에서 30×40과 같이 몇 십과 몇 십의 곱을 구하는 과정에서 0×0, 3×0, 0×4와 같이 0과의 곱을 다양하게 다룰 수 있는 기회가 있지만, 실제로 기대되는 학생들의 반응은 이미 알고 있는 30×4의 결과를 이용하여 0을 단순히 추가하는 방법뿐이다(교육과학기술부, 2010b, 2010e). 계산 결과인 1200에서 일의 자리 0은 0×0의 계산 결과라기보다는 곱해지는 수 40에 있는 0을 그대로 옮겨 적은 것으로 표현되기 때문이다. 물론 학생

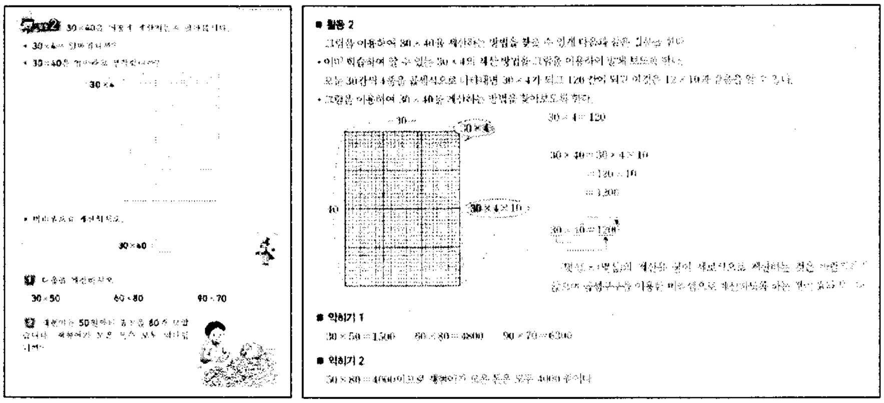
들에게 그림을 이용하여 연산의 의미를 이해하도록 돕고 있지만, 계산의 효율성을 빌미로 0과의 곱을 생각해 볼 기회는 희박해 보인다.

나. 1의 성질

1은 곱셈의 항등원으로서 실수의 집합 R의 임의의 원소 a에 대하여, $a\times1=a=1\times a$ 가 성립한다. 교과서에서는 1과의 곱셈을 2학년 2학기의 '1. 곱셈구구' 단원에서 처음으로 다룬다. 특히, 2단부터 9단까지의 곱셈 구구를 먼저 다룬 후 후속 차시에서 1단의 곱셈구구를 다루고 있으며, 이어서 1단부터 9단까지의 곱셈을 곱셈표로 정리하게 하고 있다(<표 Ⅲ-3> 참조).

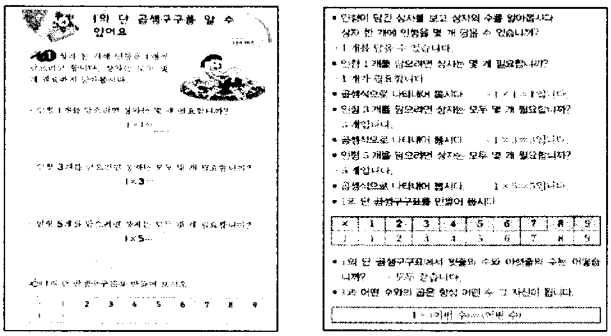
한편, 1단의 곱셈구구를 지도하는 차시에서 1×(어떤 수)의 형태만 지도하고 있다(<그림 Ⅳ-6>). 1의 단 곱셈구구표에서 곱셈의 교환법칙을 적용하면 (어떤 수)×1의 형태도 다루고 있다고 주장할 수 있으나, 실제 지도서를 보면, 1과 어떤 수와의 곱만 예상하고 있음을 알 수 있다. 사실 (어떤 수)×1의 경우는 2단부터 9단까지의 곱셈구구에서 각각 일관되게 다뤄졌기 때문에 1단에서 별도로 다룰 필요가 없을 것이라고 생각할 수도 있으나, 곱셈에서의 1의 성질을 파악하는 데는 충분하지 않을 수 있다. 왜냐하면 각 단의 곱셈구구에서는 얼마씩 늘어나는지에 초점을 두고 있기 때문에, 학생들의 입장에서 여러 차시를 통해 다룬 곱셈구구의 내용 중에서 (어떤 수)×1만을 따로 생각하여 일반화할 것이라고 기대하기 어렵기 때문이다.

그런데, 같은 단원 마지막 차시인 '곱셈표에서 규칙 알아보기'에서 1단부터 9단까지의 곱셈을 한꺼번에 다루



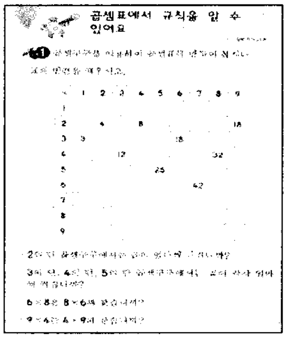
3-2, p.23 3-2, 해당 차시 지도서

<그림 Ⅳ-5> (몇 십)×(몇 십)에서의 0의 성질



2-2, p.16 2-2, 해당 차시 지도서

<그림 Ⅳ-6> 1의 단 곱셈구구에서 다룬 1의 성질



2-2, p.18

<그림 Ⅳ-7> 곱셈표에서 규칙 알기

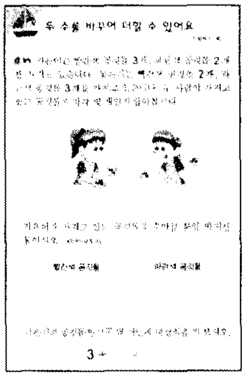
기 때문에 1×(어떤 수) 또는 (어떤 수)×1에 대한 일반화를 명시적으로 다룰 기회가 있다(<그림 IV-7> 참조). 그러나 교과서나 지도서에 이에 대한 발문이나 예시가 제시되어 있지는 않다. 이는 1의 단 곱셈구구를 알아보는 차시에서 1과 어떤 수와의 곱은 항상 어떤 수 그 자신이 된다는 것을 지도하기 때문에 불필요한 반복을 피하려는 의도로 해석할 수 있다. 그러나 곱셈의 항등원으로서의 1의 성질을 학생들이 충분히 경험하기 위해서는 1×(어떤 수)의 형태와 (어떤 수)×1의 형태를 모두 다루면서 규칙을 찾고 일반화해 보는 경험이 필요하다고 생각된다.

한편, 12×3과 같이 올림이 없는 (두 자리 수)×(한 자리 수)를 계산하는 과정에서 1×3을 생각해보게 하는 것을 제외하고는(교육과학기술부, 2010a) 2학년 2학기 이후에 1의 성질을 다루는 내용을 찾아보기 어렵다. 참고로 7차 교과서(교육인적자원부, 2007e)에서는 3-가 단계의 '4. 나눗셈' 단원에서 곱셈과의 역연산 관계를 통해 나눗셈의 몫을 알아보기 위한 활동의 하나로 1과의 곱셈이 함께 제시되고 있고, '6. 곱셈' 단원에서 '재미있는 놀이' 차시에서 1이 포함된 세 수의 곱셈이 제시되었던 반면에, 개정 교과서에서는 나눗셈의 몫의 개념을 뺄셈과 연계하여 동수누감의 의미로 접근하고 있기 때문에 1과의 곱셈이 없다. 결국 곱셈구구 단원 이외에 학생들이 1의 성질을 탐색할 기회가 없으므로, 1의 단 곱셈구구를 알아보는 차시나 곱셈표에서 규칙을 알아보는 차시에서 1의 성질을 충분히 탐구하고 일반화하는 경험을 제공하는 것이 필요하다고 생각된다.

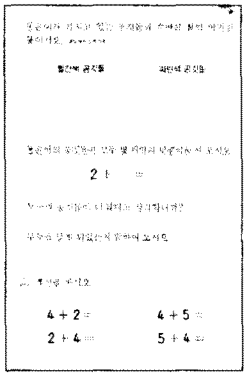
2. 연산의 성질에 대한 분석

가. 덧셈의 교환법칙

덧셈의 교환법칙은 초등학생들에게 연산을 더욱 효율적으로 다룰 수 있게 한다. 예를 들면, 두 수를 바꾸어서 더해도 결과가 동일하다는 것을 알고 있는 학생은 2+7을 2에서부터 7만큼 세어나가는 방법보다 7부터 2만큼 세어나가는 방법을 선택할 수 있다. 교과서에서는 덧셈과 뺄셈이 처음으로 도입되는 1학년 1학기의 '4. 더하기와 빼기' 단원에서 덧셈의 교환법칙과 관련된 내용을 한 차시로 구성하여 제시하고 있다. <그림IV-8>을 살펴보면, 먼저 붙임딱지를 이용하여 3+2와 2+3의 결과를 각각 알아본 다음, 이 결과를 비교해보게 한다. 특히, "무엇을 알게 되었는지 말하여 보시오"라는 질문을 통해 학생들이 "두 수를 바꾸어 더해도 결과는 같다"라는 덧셈의 교환법칙을 발견할 것을 기대하고 있다. 그러나 이외의 후속 학기에서는 덧셈의 교환법칙과 관련된 내용을 찾아보기 어렵다. 덧셈의 교환법칙은 비단 한 자리 수끼리의 덧셈에만 적용되는 성질이 아니며, 이 성질을 이용하여 계산의 효율성을 높일 수 있기 때문에 후속 학기에서도 학생들이 교환법칙을 반복하여 경험해 보거나 이와 같은 연산의 성질을 적극적으로 이용하여 보다 효율적으로 계산할 기회를 제공해야 할 것이다.



1-1, p.70



1-1, p.71

<그림 IV-8> 덧셈의 교환법칙

나. 덧셈의 결합법칙

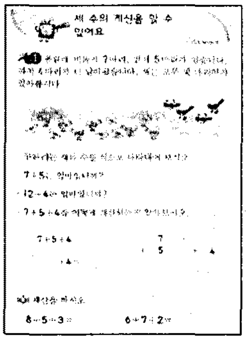
덧셈의 결합법칙과 관련하여 교과서를 살펴보면, 먼저 1학년 2학기 '4. 덧셈과 뺄셈(1)' 단원의 세 수의 계산을 다루는 차시에서 "3+4+1의 계산은 3+4를 먼저 계산하고 나중에 1을 더한다는 것을 알게 한다."고 명시한 후, 덧셈과 뺄셈의 혼합산에서 "계산 순서를 바꾸면 결과가 달라짐을 보여 계산 순서를 지켜야 함"을 반복하여 강조한다(교육과학기술부, 2009f, p.184). 즉, 학생들이 덧셈의 결합법칙을 처음으로 탐구할 수 있는 차시임에도 불구하고, "세 수의 계산은 앞에서부터 차례대로 계산한다"는 방법을 과도하게 일반화하고 있다.

그러나 이러한 일반화에 반하여 후속 단원인 1학년 2학기 '6. 덧셈과 뺄셈(2)'의 세 수의 계산을 다루는 차시에서는 4+6+7, 5+3+7, 2+7+8의 계산 방법을 다루면서 예를 들어, "3과 7의 합은 얼마입니까? 5+3+7은 얼마입니

까? 무엇을 알 수 있습니까?"라는 일련의 질문을 통하여, 학생들이 두 수의 합이 10이 되는 특수한 경우가 있는 세 수의 덧셈에서, 합이 10이 되는 경우를 먼저 계산하기 위해 (4+6)+7과 같이 앞에서부터 더하기도 하고, 5+(3+7)에서와 같이 뒤에서부터 더하기도 하며, (2+8)+7과 같이 처음 수와 마지막 수를 더하기도 한다는 점을 학습하게 하고 있다(교육과학기술부, 2009b). 이어 예를 들어, 3+9와 같은 두 수의 덧셈에서도 3을 2와 1로 가른 다음, 1과 9를 먼저 계산하고 이를 2에 더하는 방법을 제시하고 있다. 이런 활동을 통해 학생들은 암묵적으로 덧셈의 결합법칙을 이해할 수 있으며, 이 성질을 이용하여 덧셈을 더욱 효율적으로 해결할 수 있게 될 것으로 기대된다.

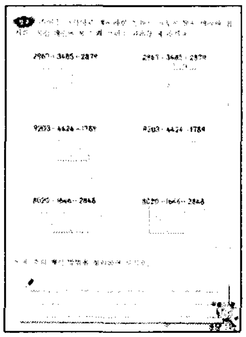
그러나 같은 단원의 후속 차시인 '세 수의 계산 알아보기'에서는 이미 덧셈의 결합법칙을 이용하여 문제를 더 효율적으로 해결할 수 있다는 것을 학습했음에도 불구하고 <그림IV-9>에서와 같이 7+5+4와 같은 세 수의 덧셈을 앞에서부터 차례대로 계산하는 방법만을 고정하여 제시하고 있다. 다만, 교사용지도서에서 학생들이 앞에서부터 더하지 않고 뒤에서부터 더하거나, 처음과 마지막 수를 더하는 방법을 제기할 수 있는 가능성을 열어놓고 "덧셈의 이러한 특수성을 간단히 언급할 수도 있다"고 기술되어 있다(교육과학기술부, 2009f, p.255). 즉, 세 수의 계산을 처음 지도하는 단원에서는 계산의 종류(연가산, 연감산, 혼합산)에 상관없이 무조건 앞에서부터 계산해야 한다는 점을 일반화하여 강조한 반면에, 후속 단원에서 연가산을 다룰 때, 덧셈의 결합법칙을 언급할 가능성을 열어놓은 것은 일관성 측면에서 오히려 학생들에게 혼동을 야기할 수도 있다. 덧셈의 결합법칙에 대한 언급 또는 이에 대한 자세한 논의는 오히려 세 수의 계산을 처음 지도하는 차시에서 연가산을 다룰 때 지도해야 할 것으로 생각된다. 물론, 연가산의 경우는 더하는 순서를 바꾸어도 합이 동일한 반면에, 혼합산이나 연감산의 경우는 결합법칙이 성립하지 않기 때문에 학생들의 혼동을 줄이고자 공통적으로 앞에서부터 계산하면 된다고 쉽게 지도하려는 의도로 해석할 수 있다. 실제 이와 같은 의도는 교과서의 후속 학기에서 동일하게 적용된다. 즉, 2학년 1학기, 2학년 2학기, 3학년 2학기에서 각각 '세 수의 계산'을 다루는데, 세 수의 덧셈을 공통적으로 앞에서부터 계산하는 방법을 강조한다.

한편, 이에 대해 유일하게 예외적인 경우가 있다. <그림 IV-10>에서와 같이 3학년 2학기의 세 수의 덧셈·뺄셈에서 계산하는 순서에 따른 결과를 예상해보고 직접 계산한 후 계산 결과를 생각해볼 기회를 '탐구활동'으로 제시하고 있다는 점이다. 이는 저학년에서 학생들이 연가산이나 연감산에서 더하거나 빼는 순서를 바꿀 때 합이나 차의 결과가 어떻게 되는지를 직접적으로 탐색해보지 않고, 덧셈에서도 무조건 앞에서부터 두 수를 더하는 방법을 '편리한' 방법 또는 학생들의 '정신적 혼란'을 줄이는 방법으로 단정한 것에 비해 바람직한 것으로 해석할 수 있다.



1-2, p.92

<그림 IV-9> 앞에서부터 계산하는 세 수의 덧셈

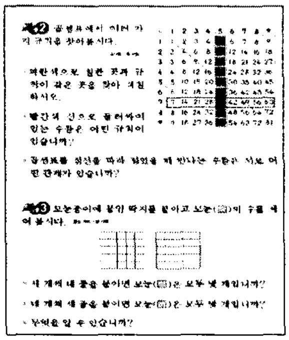


3-2, p.16

<그림IV-10> 세 수의 계산방법에 대한 탐구

다. 곱셈의 교환법칙

덧셈의 교환법칙과 마찬가지로 곱셈의 교환법칙 역시 연산을 더욱 효율적으로 다룰 수 있게 한다. 개정 교과서를 살펴보면, 7차 교과서에 비해 외형적으로 곱셈의 교환법칙과 관련된 내용이 축소된 것처럼 해석될 수 있다. 왜냐하면 7차 교과서에서(교육인적자원부, 2007d) 하나의 차시로 구성되어 있던 "두 수를 바꾸어 곱하여 봅시다/곱셈표를 만들어 봅시다"라는 차시가 삭제되었기 때문이다. 그러나 <그림IV-7>에 제시된 "곱셈표에서 규칙을 알 수 있어요"라는 차시에서 "6×8은 8×6과 같습니까?"와 같은 발문이나, 곱셈표에서 대각선으로 접었을 때 만나는 수들의 관계를 탐구하는 활동, 모눈종이에 붙임 딱지를 3개씩 4줄을 붙이는 활동과 4개씩 3줄을 붙이는 활동의 비교를 통해 곱셈의 교환법칙을 집중적으로 다루고 있음을 알 수 있다(<그림 IV-11> 참조).



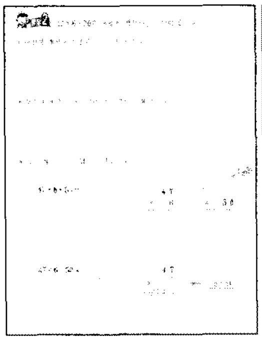
2-2, p.19

<그림Ⅳ-11> 곱셈표에서의 곱셈의 교환법칙

그러나 2학년 2학기를 제외하면 곱셈의 교환법칙과 관련된 내용을 찾아보기 어렵다. 예외적으로 4학년 1학기 '2. 곱셈과 나눗셈' 단원에서 세 수의 곱셈을 다룰 때 곱셈의 결합법칙과 관련하여 교환법칙을 활용할 여지는 있으나 이는 지도서에 '학습지도의 배경'으로 간단히 설명되어 있을 뿐, 교과서 활동을 통해 교환법칙을 사용할 기회는 없다(교육과학기술부, 2010c, 2010f). 결과적으로 곱셈의 교환법칙을 명시적으로 다루는 시기는 2학년 2학기로 한정되며, 수의 범위가 여러 자리 수로 확장되는 후속 학기에서는 곱셈의 교환법칙과 관련된 차시나 활동을 구성하지 않고 있다. 학생들이 한 자리 수끼리의 곱셈을 통해 곱셈의 교환법칙을 이해했다고 하더라도 수의 범위가 확장되었을 때 이러한 성질이 그대로 유지되는 것으로 일반화하기 어려울 수 있다. 또한 곱셈의 교환법칙을 활용하면 큰 수의 연산을 보다 효율적으로 할 수 있다는 측면에서 교과서에 여러 자리 수끼리의 곱셈에서도 곱셈의 교환법칙을 탐구해볼 기회를 제공하거나 이를 효율적으로 활용해 보는 활동을 고려해볼만하다.

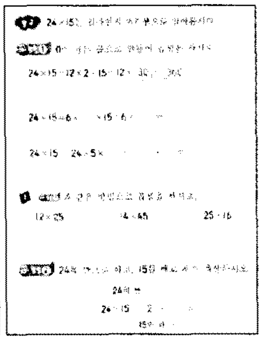
라. 곱셈의 결합법칙

곱셈의 결합법칙과 직접적으로 관련된 내용은 범자연수 범위에서 곱셈을 마지막으로 다루는 4학년 1학기 '2. 곱셈과 나눗셈' 단원에서 세 수의 곱셈을 다룰 때 제시된다. <그림 Ⅳ-12>에 제시한 바와 같이, 47×6×50에 대해서 특정한 계산 방법을 먼저 제시하는 것이 아니라 학생들이 스스로 어떻게 계산하면 좋을지 생각해 보게 한 다음, 다른 사람들과 그 계산 방법에 대해서 이야기해 보게 한다. 그런 다음, 앞에서부터 계산하는 방법뿐만 아니라 뒤에서부터 계산하는 방법을 제시하고 있다. 이와 관련하여 교사용지도서에서는 세 수의 곱셈을 할 때 계산을 편리하게 하기 위해서 무조건 차례대로 곱하기보다는 수의 배열을 고려하여 계산 순서를 달리해야 한다는 점을 지도하게 하고 있다(교육과학기술부, 2010f).



4-1, p.31

<그림Ⅳ-12> 곱셈의 결합법칙을 활용한 세 수의 계산



3-2, p.32

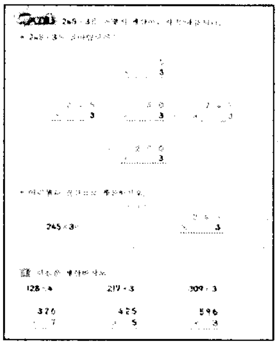
<그림Ⅳ-13> 곱셈의 결합법칙을 활용한 두 수의 계산

한편, <그림Ⅳ-13>에서와 같이 3학년 2학기 '2. 곱셈' 단원의 탐구활동에서 24×15를 알아보는 방법을 다루는데, 두 수의 곱셈을 0이 있는 곱으로 만들어 계산하는 과정에서 곱셈의 결합법칙을 활용하고 있다. 이전까지 곱셈의 결합법칙을 명시적으로 제시한 경우가 없었음에도 불구하고, 본 차시에서 이를 활용하여 곱셈을 하도록 안내하고 있다. 학생들이 곱셈의 결합법칙 자체를 탐구해 볼 기회를 제공하지는 않고 있으나, 결합법칙을 활용하여 주어진 곱셈을 효율적으로 계산해 보는 경험을 제공한다는 측면에서 의미 있는 활동으로 판단된다.

마. 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙

덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙과 관련하여 개정 교육과정 해설서에서는 3학년의 곱셈 지도에서 "'12×3=(10×3)+(2×3)'과 같은 덧셈에 대한 곱셈의 분배성과 곱셈구구를 이용하여 계산"할 수 있게 할 것을 강조한다(교육과학기술부, 2008, p. 91). 이와 같은 덧셈에 대한 곱셈의 분배성은 '(두 자리 수)×(한 자리 수)'뿐만 아니라 '(세 자리 수)×(한 자리 수)', '(두 자리 수)×(두 자리 수)'의 등의 계산에서도 일관되게 활용될 것으로 기술되고 있다(교육과학기술부, 2008).

구체적으로 교과서를 살펴보면 3학년 2학기의 '곱셈' 단원에서 다양한 자리 수끼리의 곱셈을 지도할 때, 수 모형, 동전 모형, 또는 모눈종이를 활용한 조작 활동과 연결하면서 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 직·간접적으로 제시하고 있다. 예를 들어, 245×3의 계산 방법을 다룰 때, 먼저 100원, 10원, 1원 짜리 동전 모형 붙임 딱지를 이용하여 245원을 나타낸 후, 각각의 동전의 개수를 곱셈식으로 구해보게 한다. 그런 다음, 세로셈 형식을 사용하여 245×3=(5×3)+(40×3)+(200×3)임을 드러낸다(<그림 IV-14> 참조). 이런 경향은 이후 다른 자리 수끼리의 곱셈을 할 때도 일관되게 유지된다. 예를 들어, '(두 자리 수)×(두 자리 수)'의 계산 방법을 다룰 때 먼저 모눈종이를 활용하여 12x26의 계산방법을 네 부분으로 나눠 알아보도록 한 후, 형식화하는 후속 활동에서 12×26=(12×6)+(12×20)임을 드러내고 있다.



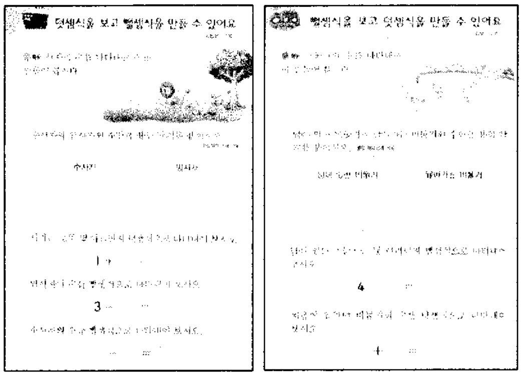
3-2, p.21

<그림IV-14> 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙

3. 연산 사이의 관계 분석

가. 덧셈과 뺄셈 사이의 관계

Ⅲ장의 교육과정 개관에서 살펴본 바와 같이 개정 교과서에서 덧셈과 뺄셈은 처음으로 연산이 도입되는 1학년부터 후속 학년에 이르기까지 일관성 있게 하나의 단원으로 구성된다. 구체적인 내용을 살펴보면, 우선 1학년 1학기의 '4. 더하기와 빼기' 단원에서 덧셈(식)과 뺄셈(식)을 각각 다룬 후, 후속 차시에서 덧셈식을 보고 뺄셈식을 구하거나, 뺄셈식을 보고 덧셈식을 구하는 활동을 통해 두 식 사이의 관계를 탐구하도록 제시하고 있다(<그림IV-15> 참조).



1-1, p.68 1-1, p.69

<그림IV-15> 덧셈과 뺄셈 사이의 관계

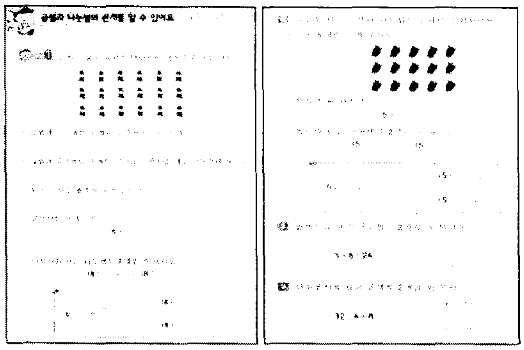
또한, 1학년 2학기의 '4. 덧셈과 뺄셈(1)' 단원과 2학년 1학기의 '4. 덧셈과 뺄셈(2)' 단원에서 하나의 차시 활동을 통해 덧셈과 뺄셈 사이의 관계를 집중적으로 다루고 있다. 이와 관련하여 교사용지도서를 살펴보면, 제7차 1-나 지도서에서는 "수가 확장되어도 덧셈식과 뺄셈식이 서로 역연산 관계에 있다는 것을 인식하도록 지도한다"고 명시되어 있는 반면에(교육인적자원부, 2007f, p.193), 개정 지도서에서는 1학년 2학기에 이와 관련된 언급이 없고 대신에 2학년 1학기의 지도서에서 "두 자리 수끼리의 덧셈과 뺄셈을 통하여 1학년 과정에서 학습한 덧셈과 뺄셈이 역연산 관계라는 사실을 확인한다."고 제시되어 있다(교육과학기술부, 2009g, p.179). 즉, 덧셈과 뺄셈이 역연산 관계라는 사실을 배우는 것은 1학년 과정임을 재확인하고 있으나, 이 관계가 수의 범위가 확장되어도 일정하게 유지된다는 사실은 강조되어 있지 않다.

한편, 이후 학기에서는 덧셈과 뺄셈 사이의 관계를 명시적으로 다루지 않는다. 덧셈과 뺄셈 사이의 역연산 관계는 수의 범위에 관계없이 일정하게 유지되는 성질이고, 학생들은 이 관계를 활용하여 효율적으로 방정식을 해결할 수 있다는 점에서 저학년에서만 두 연산 사이의 관계를 다루는 것이 적절한지, 또한 저학년에서만 두 연산 사이의 관계를 다뤄야 한다면, 이를 학생들이 일반화할만큼 충분한 경험을 제공하는지 주의할 필요가 있다.

나. 곱셈과 나눗셈 사이의 관계

덧셈과 뺄셈 사이의 관계는 연산이 처음 도입되는 단원에서부터 도입되는 반면에, 곱셈과 나눗셈 사이의 관

계는 곱셈이 도입되는 단원에서 소개되지 않고, 3학년 1학기 '4. 나눗셈' 단원에서 나눗셈을 처음으로 도입하는 시기에 다루어진다. 구체적인 내용을 살펴보면, 똑같이 묶어보기, 똑같게 나누기, 나눗셈의 몫을 알아보는 차시를 다룬 다음, 곱셈과 나눗셈의 관계를 알아보는 차시를 1차시에 걸쳐 집중적으로 탐구한다(<표 III-3> 참조). <그림IV-16>에 제시된 바와 같이, <활동 1>에서 먼저 학생들에게 주어진 그림을 보고 곱셈과 나눗셈의 관계를 생각해 보고 이야기를 나누게 한 다음, 곱셈식을 써 보고 이를 토대로 나눗셈식 2개를 도출하게 한다. <활동 2>에서는 곱셈식을 보고 나눗셈식 2개를 쓰는 것 이외에 나눗셈식을 보고 곱셈식 2개를 써 보도록 하여, 곱셈과 나눗셈이 서로 역연산 관계에 있다는 것을 탐구하게 한다.



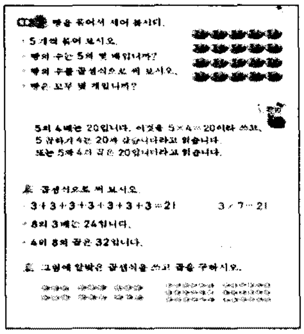
3-1, p.58 3-1, p.59

<그림IV-16> 곱셈과 나눗셈 사이의 관계

그러나 곱셈과 나눗셈 사이의 관계는 그 자체로서만 학습되는 것이 아니라 이후의 차시에서 이를 이용하여 나눗셈의 몫을 편리하게 구하는 방법으로 적극 활용됨에 주목할 필요가 있다. 구체적으로 살펴보면, 그림으로 묶어 덜어내기, 뺄셈식을 만들기, 똑같게 나누기, 곱셈과 나눗셈의 관계 써 보기를 통해 여러 가지 방법으로 12÷3의 몫을 구해보게 한 다음, 가장 쉽고 편리하게 나눗셈의 몫을 구하는 방법을 생각해 보게 한다. 처음 세 가지 방법은 몫의 의미를 이해하는 데 도움을 줄 것으로 기대되는 반면에, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하는 것은 몫을 계산하는 데 가장 쉽고 편리한 방법으로 기대된다(교육과학기술부, 2010d). 이런 측면에서 후속 차시에서는 곱셈을 활용하여 나눗셈의 몫을 구하는 방법을 별도의 차시로 구성하고 있다. 이렇듯 곱셈식을 보고 나눗셈식을 써 보는 일련의 활동은 학생들로 하여금 곱셈과 나눗셈의 관계를 심도 있게 생각해 볼 기회를 제공할 것으로 기대된다. 한편, 후속 학기에서 곱셈과 나눗셈의 관계를 다루는 시기는 3학년 2학기와 4학년 1학기에 각각 나눗셈을 검산하는 과정에서 곱셈식을 일부 활용하고 있는 정도에 그친다.

다. 덧셈과 곱셈 사이의 관계

덧셈과 곱셈 사이의 관계는 개정 교과서에서 2학년 1학기의 '곱셈' 단원에서 처음으로 다루어진다. 구체적인 내용을 살펴보면, 묶어 세기를 바탕으로 동수누가에 의한 덧셈식과 몇 배의 개념을 함께 다룬 다음, 후속 차시에서 배의 개념으로 곱셈을 도입하고 있다. 예를 들어, 4씩 5묶음은 4+4+4+4+4=20이고 이는 4의 5배라고 표현해 본 후, 4의 5배를 4×5로 나타내고 있다. 제7차 교과서에서는 동수누가에 의한 덧셈식과 곱하기로 각각 나타내보게 함으로써 2차시에 걸쳐 덧셈식과 곱셈식을 직접적으로 연계했다는 점을 고려하면(교육인적자원부, 2007d), 개정 교과서에서는 이런 연산간의 관계가 상대적으로 덜 강조된 것으로 생각된다. 다만, <그림 IV-17>에 제시된 바와 같이, 여러 표현을 곱셈식으로 나타내 보는 활동에서 동수누가에 의한 덧셈식을 곱셈식으로 써 보는 활동을 부가적으로 제시하고 있다.



2-1, p.111

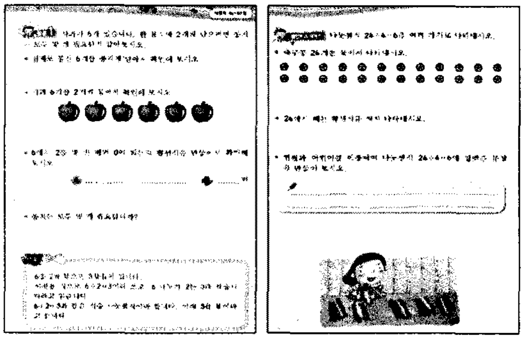
<그림 IV-17> 덧셈식을 곱셈식으로 나타내기

이후 학년에서는 수모형 조작 활동을 통하여 여러 가지 곱셈을 다루는 반면에, 3학년 1학기에서도 덧셈식을 전혀 제시하지 않고, 곱을 머리로 계산하는 방법과 형식화하여 필산하는 방법에 중점을 두고 있다. 제7차 교과

서에서는 3-가 단계에서 예를 들어, 13×5와 같은 곱셈을 수 모형으로 알아본 후, '13+13+13+13+13은 얼마입니까?' 라는 발문을 통해 수모형을 덧셈식으로 구해보게 한 후, 이를 다시 13×5=65의 곱셈식으로 나타내 보게 하며, 이와 같은 방법이 4차시에 걸쳐 다뤄지기 때문에 학생들이 덧셈과 곱셈의 관계를 탐구할 기회가 상대적으로 많았다. 그러나 개정 교과서에서는 2학년에서만 두 연산간의 관계를 명시적으로 다루기 때문에, 이 시기에 학생들이 두 연산간의 관계를 충분히 경험하도록 지도하는 데 주의를 기울여야 할 것이다.

라. 뺄셈과 나눗셈 사이의 관계

개정 교과서에서 뺄셈과 나눗셈 사이의 관계는 나눗셈이 처음 도입되는 3학년 1학기의 첫 차시에서부터 <그림 Ⅳ-18>과 같이 "6에서 2를 몇 번 빼면 0이 되는지 뺄셈식을 만들어서 확인해 보시오"와 "24에서 0이 될 때까지 4을 빼는 뺄셈식을 만들어보시오"와 같이 명시적으로 나눗셈을 뺄셈과 연계하여 도입하고 있다. 제7차 교과서의 해당 차시에서는 이와 같은 내용이 해당 교사용지도서에서만 소개된 반면에(교육인적자원부, 2007g, p.140), 교과서에서는 학생들로 하여금 뺄셈과 나눗셈 사이의 관계를 명시적으로 드러내거나 두 식을 함께 표현한 경우가 거의 없었던 점을 고려해볼 때, 개정 교과서에서의 두 연산간의 관계는 관련된 첫 차시부터 잘 강조된 것으로 생각된다.

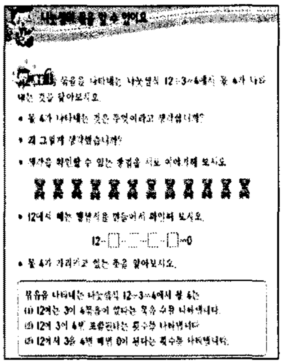


3-1, p.49 3-1, p.50

<그림Ⅳ-18> 뺄셈과 나눗셈 사이의 관계

또한 나눗셈의 몫을 알아보는 차시에서도 <그림 Ⅳ-19>와 같이 뺄셈식을 만들어서 확인해보는 활동을 통해 몫이 가리키고 있는 뜻을 알아보게 하고 있다. 이를 바탕으로 후속 차시에서는 뺄셈식을 만들어서 몫을 구해보는 활동까지 제시하고 있다.

이처럼 개정 교과서는 7차 교과서에 비해 뺄셈과 나눗셈의 관계를 학생들이 여러 차시에 걸쳐 심도 있게 탐구할 기회를 제공하는 것으로 해석된다. 다만, 후속 학기에서는 두 연산 사이의 관계를 명시적으로 다루지 않으므로, 나눗셈을 처음 도입하는 단원에서 학생들이 두 연산 간의 관계에 대해 일반화를 해야 할 것으로 기대된다.



3-1, p.56

<그림Ⅳ-19> 뺄셈식을 활용한 나눗셈의 몫의 의미 알아보기

V. 맺는 말

본 논문은 일반화된 산술로서의 대수 관점에 초점을 두고 범자연수와 연산 내용을 대상으로 수와 연산의 성질 및 관계의 일반화 정도를 심층 분석해 보았다. 이를 바탕으로 관련된 논의를 전개하면 다음과 같다. 첫째, 수와 연산의 성질을 분석해 본 결과 초기 대수 교육과 연결되고 통합될 수 있는 내용이 많이 포함되어 있음을 알 수 있다. 그러나 특히 연산의 다양한 성질에 대한 이해는 암묵적으로 제시된 경우가 많았다. 또한 공통적으로 관련된 학년에 걸쳐 지속적으로 제시되기 보다는 특정 학년에서 일시적으로 제시되는 경우가 대부분이었음에 주목할 필요가 있다. 0 또는 1과 같은 특정한 수의 성질이나 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 연산의 성질은 수의 범위가 확장되더라도 일정하게 유지되는 성질이므로, 학생들이 관련된 단원에서 지속적으로 탐구하는

경험을 많이 제공하는 것이 초기 대수 교육의 기초가 될 것으로 기대된다. 이런 측면에서 수와 연산의 성질을 여러 학년에 걸쳐 어떻게 접근하는 것이 바람직한지, 그리고 이를 통해 산술과 대수가 어떻게 의미 있게 연결될 수 있는지에 대해서 집중적인 연구가 필요하다.

둘째, 위에 기술한 바와 같이 특정 학년이나 학기에 일회적으로 수와 연산의 성질을 다루기 때문에 이를 일반화하는 경험이 특히 중요할 것으로 기대된다. 그러나 교과서 분석 결과 학생들이 일반화를 할 기회가 많이 제공되어 있지 않다. 대수는 생각하는 방법이며 이 과정에서 특별히 일반화가 중요하다는 점을 고려해 볼 때 (Reys et al., 2009), 학생들이 특정한 예들의 수준을 뛰어 넘어 일반화하고 그 아이디어를 정당화할 기회를 갖는 것이 필요하다고 생각된다. 물론 초등 학생들의 발달 수준을 감안하여 연역적 정당화를 기대하기는 어려우나, 자기 수준에 맞는 대수적 사고를 경험하는 학생들이 수학의 구조와 성질을 더 잘 이해한다는 점을 고려할 때 (Carpenter & Levi, 2000), 일반화 경험을 통하여 초등학생들의 대수적 사고 발달을 촉진할 수 있을 것이다.

셋째, 수학 교과서에 제시된 연산 사이의 관계를 분석해 본 결과 대개 해당 연산이 처음 도입되는 단계나 학기에서 집중적으로 다루어진 후, 후속 단계나 학기에서는 별반 다루어지지 않는 경향이 있었다. 연산들이 서로 어떻게 관련되는지 이해하는 것은 수학적 상황과 구조를 다양하게 표현하고 분석하는 데 기초가 되기 때문에 (NCTM, 2000), 교과서에서 연산 사이의 관계를 보다 지속적으로 그리고 명시적으로 다룰 필요가 있다고 본다.

마지막으로, 본 연구 결과 연산의 성질 및 관계 자체는 명시적이든 암묵적이든 모두 다루어진 반면에, 이를 여러 상황에서 활용하여 연산의 의미나 관련 문제를 효율적으로 해결하는 것은 상대적으로 부족한 것으로 드러났다. 예외적으로 곱셈의 결합법칙이나 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙의 경우 그 성질뿐만 아니라 이를 이용하여 계산을 효율적으로 할 수 있는 예가 제시되어 있다. 또한 곱셈과 나눗셈의 관계, 뺄셈과 나눗셈의 관계는 각각 나눗셈의 몫을 효율적으로 구하거나 몫의 기본적인 의미를 이해하는 데 적극적으로 활용되었다는 점이 고무적이다. 초등학교 고학년에서는 연산 자체의 성질보다는 이를 이용하여 효율적으로 연산을 수행하는 경험이 적절하다는 점을 고려해볼 때(NCTM, 2000), 다른 연산의 성질이나 관계를 여러 가지 상황에서 활용해 보는 활동이 보다 많이 제시될 필요가 있을 것이다.

최근 초기 대수 교육의 중요성이 많이 강조됨에도 불구하고 우리나라 초등학교 수학과 교육과정에서 어떤 내용을 어떤 방법으로 도입하고 전개하는 것이 필요한지에 대한 분석은 거의 없는 실정에서 본 연구는 부족하나마 범자연수와 연산의 성질 및 관계를 중심으로 교과서에서 관련된 내용을 상세하게 분석하였다. 이를 통해 일반화된 산술로서의 관점에서 초기 대수 교육을 진작하기 위한 초등학교 교육과정 및 교과서 개발에 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 광주: 한솔사.

____ (2009a). 수학 1-1. 서울: 두산동아(주).

____ (2009b). 수학 1-2. 서울: 두산동아(주).

____ (2009c). 수학 2-1. 서울: 두산동아(주).

____ (2009d). 수학 2-2. 서울: 두산동아(주).

____ (2009e). 수학 1-1 교사용 지도서. 서울: 두산동아(주).

____ (2010a). 수학 3-1. 서울: 두산동아(주).

____ (2010b). 수학 3-2. 서울: 두산동아(주).

____ (2010c). 수학 4-1. 서울: 두산동아(주).

____ (2010d). 수학 3-1 교사용 지도서. 서울: 두산동아(주).

____ (2010e). 수학 3-2 교사용 지도서. 서울: 두산동아(주).

____ (2010f). 수학 4-1 교사용 지도서. 서울: 두산동아(주).

교육부 (1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1997-15호 [별책 2]. 서울: 대한교과서.

____ (1998). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2007a). 초·중등학교 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호 [별책 1]. 서울: 대한교과서.

____ (2007b). 수학 1-가. 서울: (주)천재교육.

____ (2007c). 수학 1-나. 서울: (주)천재교육.

____ (2007d). 수학 2-나. 서울: (주)천재교육.

____ (2007e). 수학 3-가. 서울: (주)천재교육.

____ (2007f). 수학 1-나 교사용 지도서. 서울: (주)천재교육.

____ (2007g). 수학 3-가 교사용 지도서. 서울: (주)천재교육.

김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위 논문.

백석윤 (2009). 창의중심 미래형 수학과 교육과정의 성격, 목표 및 초등학교 내용 개요(안). 수학교육논집, 27, 61-72, 대한수학회(2009년도 제27회 수학교육 심포지엄: 창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구).

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early elgebra. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.165-184). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebra method of problem solving in primary school. In V. V. Davydov (Ed.) *Psychological abilities of primary school children in learning mathemaics* (Vol. 6, pp. 275-338). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithematic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, MA.

Kaput, J. (2008). What is algebra? what is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.5-17). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.19-55). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Boileau, A., & Carançon, A. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approaches. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 257-293). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th Ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

An Analysis of the Whole Numbers and Their Operations in Mathematics Textbooks: Focused on Algebra as Generalized Arithmetic

JeongSuk Pang
Dept. of Elementary Education (Mathematics Education), Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

JiYoung Choi
Seoul DaeDong Elementary School
Daerim-2Dong #702, Youngdeungpho-gu, Seoul 150-072, Korea
E-mail : ji2006@empal.com

Given the importance of algebra in the early grades, this paper analyzed the contents of whole numbers and their operations from the perspectives of generalized arithmetic. In particular, the focus of analysis was given to the properties of 0 and 1, those of operations such as commutativity, associativity, and distributivity, and the relations between operations. As such, this paper analyzed in detail how such properties and relations were introduced and expanded across different grades. It is expected that many issues in this paper will serve basic information to develop instructional materials in a way to fostering students' algebraic thinking in the elementary grades.

* ZDM Classification : H12
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D30
* Key Words : early algebra, algebraic thinking, generalized arithmetic, analysis of mathematics textbooks, properties of numbers, properties of operations, commutativity, associativity, distributivity, identity, relationships between operations