

## $M/E_n/1$ 큐에서 Overshoot에 대한 근사

배종호<sup>1</sup> · 정아름<sup>2</sup> · 김성곤<sup>3</sup>

<sup>1</sup>충남대학교 정보통계학과, <sup>2</sup>한국연구재단, <sup>3</sup>서울시립대학교 통계학과

(2010년 8월 접수, 2010년 11월 채택)

### 요약

본 논문은  $M/E_n/1$  큐에서 overshoot에 대한 근사식을 제안한다. overshoot은 큐의 작업부하량과정이 어떤 한계점을 처음으로 초과한 순간에 그 초과량을 의미하는데, overshoot의 분포 및 1차, 2차 적분은 큐의 최적화문제를 푸는데 중요한 역할을 한다. 본 논문에서는 그동안 이루어진 overshoot의 분포에 대한 이론적인 결과를 바탕으로 하여 overshoot의 분포를 고객의 서비스시간의 분포와 지수분포의 선형결합으로 표현하는 근사식을 제안한다. 그리고 제안된 근사식의 정확성을 확인하기 위하여 시뮬레이션을 통해 구한 overshoot의 분포와 비교한다.

주요용어:  $M/E_n/1$  큐, overshoot, 근사.

### 1. 서론

본 논문에서 우리는  $M/G/1$  큐의 특별한 경우인  $M/E_n/1$  큐를 고려한다.  $M/E_n/1$  큐는 고객의 서비스시간이 계차  $n$ 인 Erlang 분포를 갖고 고객의 도착시간이 포아송과정을 따르며 서버의 수가 1인 큐이다. 계차  $n$ 인 Erlang 분포는 독립적이고 동일한 지수분포를 따르는  $n$ 개의 확률변수들의 합이 따르는 분포이다. 큐의 효율성을 측정하는 성능척도(performance measure)에는 시스템 내에 있는 평균 고객수, 고객의 평균 대기시간, 서버의 바쁜기간 등 여러 가지가 있는데 본 논문에서는 서버의 작업부하량(workload)에 대해 관심을 갖는다. 작업부하량은 서버가 느끼는 짐의 양으로, 시각  $t$ 에서 작업부하량이란 시각  $t$ 에서 서비스 중인 고객의 잔여 서비스시간과 대기 중인 모든 고객들의 서비스시간의 합을 더한 것이다. 서버의 수가 1이고 선입선출방식으로 서비스하는 큐의 작업부하량은 고객의 가상대기시간과 동일하다. 고객의 가상대기시간(virtual waiting time)이란, 만일 시각  $t$ 에 어떤 고객이 도착한다면 본인이 서비스 받을 때까지 기다려야 할 시간을 의미한다. 시각  $t$ 에서 작업부하량을  $W_t$ 로 표시하고, 확률과정  $\{W_t | t \geq 0\}$ 을 작업부하량과정(workload process)이라 하겠다.

그림 1.1은 서버의 수가 1인 큐의 작업부하량과정의 sample path이다. 가로축의  $\circ$ 는 도착하는 고객들의 도착시각을 의미하고 그래프가 점프하는 양은 도착한 고객의 서비스시간과 같다. 작업부하량과정은 위로 점프하는 시점을 제외하고는 기울기가  $-1$ 인 그래프가 된다.

$M/G/1$  큐에서 작업부하량과정의 극한분포  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(W_t \leq x)$ 는 라플라스 변환의 형태로 알려져 있다 (Wolff, 1989, p.386). 그리고 몇몇 연구자들은  $M/G/1$  큐의 여러 변형된 모형에서 작업부하량과정의 극한분포를 구하였다. Bae 등 (2002)은  $M/G/1$  큐에  $P_X^M$ -서비스정책을 적용한 모형에서 작업부하량과정의 극한분포를 구하였고, De Kok과 Tijms (1985)는 참을성 없는 고객이 있는  $M/G/1$  큐에

<sup>3</sup>교신저자: (130-743) 서울시 동대문구 시립대길 13, 서울시립대학교 통계학과, 부교수.

E-mail: sgkim@uos.ac.kr

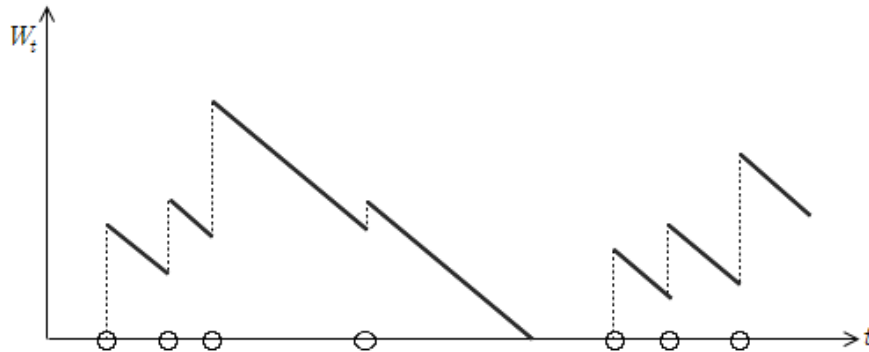


그림 1.1.  $M/G/1$  큐에서 작업부하량과정의 sample path

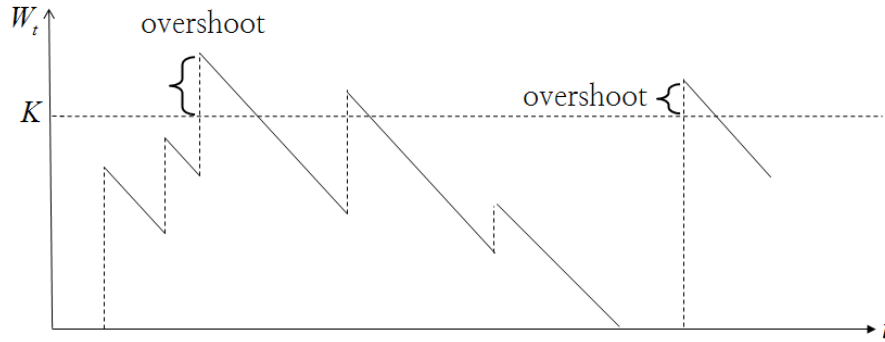


그림 1.2.  $M/G/1$  큐의 작업부하량과정의 overshoot의 예

서 작업부하량과정의 극한분포를 구하되  $x$ 가  $K$  이하인 경우에만 구하였다. 여기서  $K$ 는 고객이 인내할 수 있는 최대의 대기시간을 말한다. 그리고 Bae 등 (2001)은 참을성 없는 고객이 있는  $M/G/1$  큐에서 모든  $x$ 에 대하여 작업부하량과정의 극한분포를 구하였다. 그런데 위에서 언급한 Bae 등 (2001, 2002)의 연구는 흔히 최적화문제로 확장되는데 위 논문에서 설정한 모형들의 최적화문제를 풀기 위해서는 작업부하량과정의 한계점 초과량(overshoot)에 대한 연구가 필수적이다. 실제로 Kim 등 (2006)은 Bae 등 (2002)에서 연구한 모형의 최적화문제를 다루었고 그 문제는  $M/G/1$  큐에서 overshoot의 분포와 overshoot의 1차, 2차 적분을 필요로 한다. 여기서 overshoot란, 서버의 바쁜 기간이 시작된 후 작업부하량이 어떤 한계점을 처음으로 뛰어 넘은 순간에서 그 한계점을 초과한 양을 말한다. 그림 1.2는  $M/G/1$  큐에서 미리 설정된 한계점이  $K$ 일 때 작업부하량과정의 overshoot의 예이다.

Kim 등 (2006)에 의하면  $M/G/1$  큐 모형에서 overshoot, 즉  $S_K - K$ 의 정확한 공식과 1차 적분은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \Pr(S_K - K \leq y) &= 1 - \frac{\rho H(K)}{E(S)H'(K)} \int_{0-}^K (1 - G(K + y - u)) dH(u) \\ &\quad - \frac{\rho}{E(S)} \int_0^K (1 - G(K + y - u)) H(u) du, \quad y \geq 0. \\ E(S_K - K) &= \frac{H(K)}{H'(K)} (1 - (1 - \rho)H(K)) - \int_0^K (1 - (1 - \rho)H(u)) du, \end{aligned}$$

여기서  $\rho$ 는 큐의 교통밀도이고  $S$ 는 고객의 서비스시간이며,  $G(\cdot)$ 는  $S$ 의 분포함수이다. 그리고 함수  $H(\cdot)$ 의 정의와  $S_K - K$ 의 정확한 정의는 다음절에서 소개된다.

그러나 위 공식은 너무 복잡하여 계산이 어렵다. 실제로  $S$ 가 지수분포를 따르는 경우를 제외하고는  $H(\cdot)$ 를 정확히 계산하는 것이 거의 불가능하다. 따라서 overshoot의 분포의 정확한 공식은 실제에 적용하기 매우 어렵고, overshoot의 1차, 2차 적률의 계산도 불가능하다. 위에서 언급했듯이 overshoot의 분포 및 1차, 2차 적률은 Bae 등 (2001, 2002)에서 연구된 모형의 최적화 문제를 푸는데 필수적임에도 불구하고 overshoot의 분포의 이론적인 공식만 얻어졌을 뿐, 실제로 계산이 가능한 식은 없기에 그 근사값을 구하는 연구가 필요하다. 본 논문에서는  $M/G/1$  큐의 일종인  $M/E_n/1$  큐에서의 overshoot의 분포를 근사적으로 계산하는 방법을 보여주고, 근사적으로 구한 overshoot의 분포가 시뮬레이션을 통해 얻는 분포와 얼마나 유사한지 비교할 것이다.

### 2. 모형의 설명

본 절에서는 논문에서 설정한 모형을 설명하고 몇 가지 가정을 부여한다. 또 논문에 사용되는 여러 기호에 대해 정의한다.

고객들은 도착률  $\nu$ 인 포아송과정으로 시스템에 도착한다고 가정한다. 확률변수  $S$ 는 고객의 서비스시간을 나타내며,  $S$ 의 분포함수를  $G(\cdot)$ 로 표시한다.  $G$ 의 평형분포함수(equilibrium distribution function)를  $G_e$ 라 하자.  $G_e$ 는 아래와 같은 식으로 표현 된다.

$$G_e(y) = \frac{1}{E(S)} \int_0^y (1 - G(s)) ds, \quad y \geq 0.$$

큐의 교통밀도  $\rho$ 는  $\rho = \nu E(S)$ 로 정의하는데 큐의 안정성을 위하여  $0 < \rho < 1$ 이라 가정한다. 작업부하량과정  $\{W_t | t \geq 0\}$ 의 초기값  $W_0$ 는 0으로 두고  $W_t$ 가 불연속인 점에서는 우측에서 연속이 되도록  $W_t = W_{t+}$ 로 가정한다.  $W_t$ 가  $K$ 를 처음으로 넘어서는 순간의 작업부하량을  $S_K$ 로 표시하자. 즉,  $S_K = W_{\inf\{t>0 | W_t > K\}}$ 이다. 작업부하량과정이 처음으로  $K$ 를 초과하는 순간의 초과량은  $S_K - K$ 로 표현할 수 있는데  $S_K - K$ 를 overshoot이라 부를 것이다.

고객의 도착간격시간과 서비스시간 중 어느 하나가 지수분포가 아닌 큐를 분석할 때 중요하게 이용하는 함수가 보조재생함수(auxiliary renewal function)이다. 보조재생함수  $H(\cdot)$ 는  $G$ 와  $\rho$ 에 관한 식으로서

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G_e^{n*}(x)$$

로 정의된다. 여기서  $G_e^{0*}$ 은 Heaviside함수로서  $G_e^{0*}(x) = I_{\{x \geq 0\}}(x)$ 이고  $G_e^{n*}$ 는

$$G_e^{n*}(x) = G_e^{(n-1)*} * G_e(x) = \int_{0-}^x G_e(x-u) dG_e^{(n-1)*}(u), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

으로 정의된다.

보조재생함수  $H(\cdot)$ 는 아래의 성질을 가지고 있다.

- (a)  $H(0-) = 0$ 이고  $H(0) = 1$ .
- (b)  $H(x)$ 는  $x$ 에 관한 증가함수이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 1/(1 - \rho)$ .
- (c)  $H(x)$ 는  $x > 0$ 에서 미분가능하며  $H'(0+) = \rho/E(S)$ .

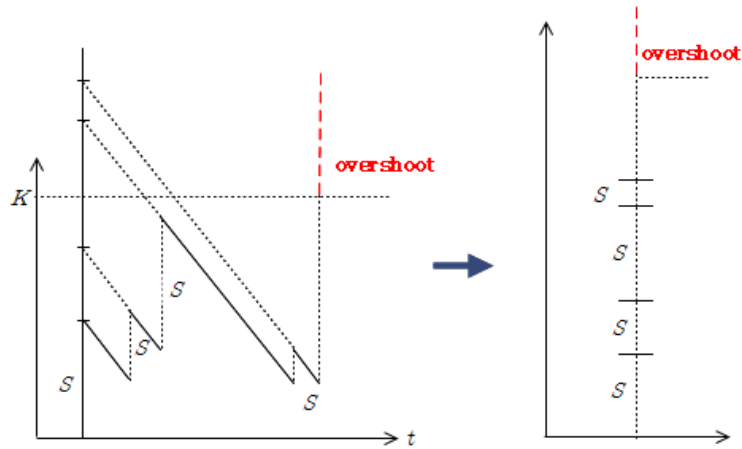


그림 3.1. 작업부하량과정의 overshoot를 재생과정의 age로 근사

(d)  $1 - (1 - \rho)H(x) \approx c \cdot e^{-\delta x}$ .

(d)에서  $\delta$ 는

$$\int_0^\infty e^{\delta y} d_y \{ \rho G_e(y) \} = 1$$

을 만족하는 유일한 양수이다. 그리고  $f(x) \approx g(x)$ 는  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ 을 의미한다.

(c)는 Bae 등 (2001)에, (d)는 Tijms (1986)에 그 증명이 나타나 있다. 성질 (d)에서 언급된  $(1 - \rho)H(x)$ 는 일반적인  $M/G/1$  큐에서 작업부하량과정의 극한분포함수이다.

### 3. Overshoot의 분포에 대한 근사

$M/G/1$  큐에서  $S_K - K$ 의 분포함수에 대한 정확한 공식은 아래와 같다 (Kim 등, 2006).

$$\begin{aligned} \Pr(S_K - K \leq y) &= 1 - \frac{\rho H(K)}{E(S)H'(K)} \int_{0^-}^K (1 - G(K + y - u)) dH(u) \\ &\quad - \frac{\rho}{E(S)} \int_0^K (1 - G(K + y - u)) H(u) du, \quad y \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

overshoot의 분포함수에 대한 근사식을  $K$ 에 관한 함수로 표현하기 위하여  $K$ 의 값에 따른 overshoot의 성질을 예상하면 다음과 같다.

(1)  $K \rightarrow 0+$ 이면  $\Pr(S_K - K \leq y) \rightarrow G(y)$ .

(2)  $K \rightarrow \infty$ 이면  $\Pr(S_K - K \leq y) \rightarrow G_e(y)$ .

(1)을 예상하는 것은,  $K$ 가 0이면 첫 고객이 서버에 도착하자마자 overshoot이 발생하고 그 고객의 서비스시간이 곧 overshoot이 되기 때문이다. (1)은 식 (3.1)에서  $K$ 를 0+로 보냄으로써 증명할 수도 있다.

(2)를 예상하는 이유는 그림 3.1과 같다.  $K$ 가 아주 크다면 매우 많은 횟수의 작업부하량과정의 점프가 누적된 후에  $K$ 를 넘게 될 것이고 그  $K$ 를 넘긴 양이 overshoot이다. 한편 재생간격시간의 분포함수가  $G(\cdot)$ 인 재생과정의 age과정  $A(t)$ 를 생각하자. 그림 3.1에서 보는 것처럼  $A(t)$ 의 극한분포

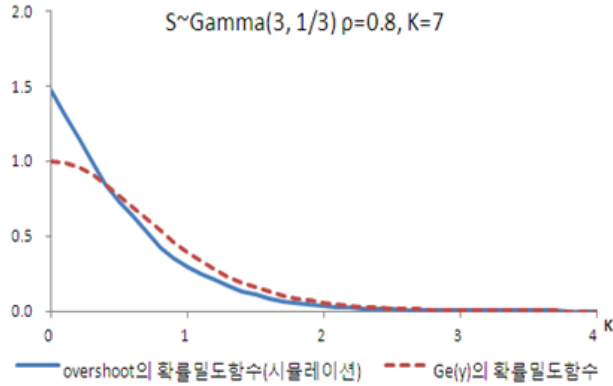


그림 3.2.  $G_e(y)$ 와 overshoot의 확률분포 비교

함수  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(A(t) \leq y)$ 가  $\lim_{K \rightarrow \infty} \Pr(S_K - K \leq y)$ 와 유사할 것으로 예상할 수 있다. 그리고  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(A(t) \leq y)$ 는  $G_e(y)$ 와 같음이 잘 알려져 있다. 실제로 Lee와 Ahn (1998)은 이 사실을 언급 하면서  $K$ 가 클 때 overshoot의 분포함수 대신  $G_e(y)$ 를 근사함수로 채택한 바 있다.

그러나 (2)의 예상은 사실과 다르다. 왜냐하면  $K \rightarrow \infty$ 일 때  $E(S_K - K)$ 가 분포  $G_e$ 의 평균으로 가지 않기 때문이다. 즉,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K) \neq \frac{E(S^2)}{2E(S)}.$$

$\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K)$ 의 정확한 공식은 정리 3.1에서 유도된다. 또 (2)의 예상이 틀렸다는 것은 시뮬레이션 결과를 통해서도 확인할 수 있다. 그림 3.2는  $S$ 가 형상모수 3, 평균 1인 감마분포를 따르고  $\rho = 0.8, K = 7$ 인 경우에 시뮬레이션을 통해 구한 overshoot의 확률밀도함수와  $dG_e(y)/dy$ 를 비교한 것이다. 참고로,  $E(S) = 1$ 일 때  $K = 7$ 이면  $K$ 는 충분히 큰 값이다.

그렇다면 왜  $\lim_{K \rightarrow \infty} \Pr(S_K - K \leq y)$ 가  $G_e(y)$ 와 차이를 보이는 것일까? 직관적으로 설명하자면 다음과 같다. overshoot은 어떤 고객이 시스템에 들어오는 순간 작업부하량의 점프에 의해 생기는데 그 점프가 일어나기 전에 한동안 작업부하량의 감소가 존재한다. 그러므로 overshoot의 크기는 일반적인 재생과정에서의 age와는 본질적으로 다른 특성을 가지고 있다. 따라서  $K$ 가 클 때의 overshoot의 분포와 재생과정의 age의 극한분포가 다르게 되는 것이다. 그림 3.2를 보면  $K$ 가 클 때의 overshoot의 분포는 오히려 지수분포와 유사함을 관찰할 수 있다. 서비스의 분포가 얼랑분포인 경우에  $\rho$ 와  $K$ 에 다른 값을 가정해도 비슷한 현상이 관찰된다.

그래서 우리는 다음과 같은 근사식을 가정하겠다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \simeq w(K)G(y) + (1 - w(K))F(y), \quad y \geq 0, K > 0,$$

여기서  $\lim_{K \rightarrow 0} w(K) = 1, \lim_{K \rightarrow \infty} w(K) = 0$ 이고  $G(y)$ 는  $S$ 의 분포함수이며  $F(y)$ 는 평균이  $\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K)$ 인 지수분포의 분포함수이다. 즉,

$$F(y) = 1 - \exp\left(\frac{-y}{\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K)}\right), \quad y > 0$$

이다.

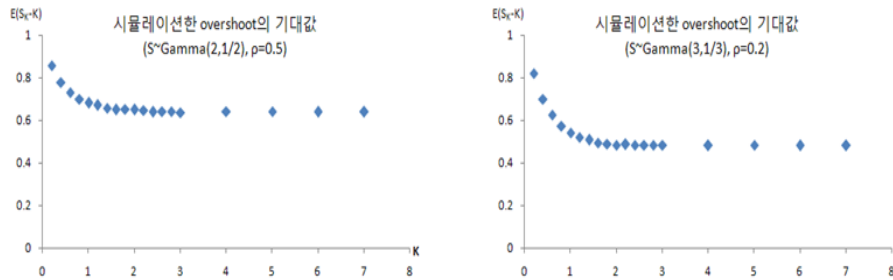


그림 3.3.  $K$ 에 대한  $E(S_K - K)$ 의 그래프

$w(K)$ 를 정하기 위해  $E(S_K - K)$ 가  $K$ 에 따라 어떻게 변하는지 보겠다. 그림 3.3은  $E(S_K - K)$ 를  $K$ 의 함수로 보아 그래프를 그린 것이다. 여기서 overshoot의 기댓값은  $K$ 에 대해 지수적으로 감소하는 것처럼 보인다.

이상의 모든 것을 종합하여 우리는  $S_K - K$ 의 분포함수에 대한 근사식을 아래와 같이 둔다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \simeq e^{-aK}G(y) + (1 - e^{-aK})F(y), \quad y \geq 0, K > 0. \tag{3.2}$$

위 식에서  $a$ 는 어떤 양수이다. 양수  $a$ 와  $\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K)$ 의 값을 결정하기 위하여 다음의 정리가 필요하다.

**정리 3.1**  $0 < \rho < 1$ 이고  $G(0) = 0$ 이며  $G'(0)$ 가 존재할 때,

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K) &= \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)}. \\ \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{d}{dK} E(S_K - K) &= G'(0)E(S) - 1. \end{aligned}$$

증명: Kim 등 (2006)에 의하면

$$E(S_K - K) = \frac{H(K)}{H'(K)} (1 - (1 - \rho)H(K)) - \int_0^K (1 - (1 - \rho)H(u)) du \tag{3.3}$$

이다. 먼저

$$\lim_{K \rightarrow \infty} H(K) = \frac{1}{1 - \rho}$$

이고 어떤 양수  $c$ 에 대하여

$$1 - (1 - \rho)H(K) \approx c \cdot e^{-\delta K}$$

이므로

$$H'(K) \approx \frac{c\delta}{1 - \rho} \cdot e^{-\delta K}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{H(K)}{H'(K)} (1 - (1 - \rho)H(K)) = \frac{1}{\delta}$$

이다. 그리고,  $W = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$ 로 놓는다면,  $W$ 는  $M/G/1$  큐의 정상상태에서의 작업부하량이 되며,

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K (1 - (1 - \rho)H(u)) du &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \Pr(W > u) du \\ &= E[W] \\ &= \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)}. \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K) = \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)}.$$

두번째 식을 증명하기 위하여 식 (3.3)의 양변을  $K$ 에 관해 미분하면

$$\frac{d}{dK} E(S_K - K) = \frac{-H(K)H''(K)}{(H'(K))^2} (1 - (1 - \rho)H(K)) - (1 - \rho)H'(K)$$

이다.  $H(0) = 1$ 이므로  $H'(0+)$ 과  $H''(0+)$ 만 구하면 된다.

배중호와 김성곤 (2007)에 의하면  $H'(x)$ 는 다음의 적분방정식을 만족함이 밝혀져 있다.

$$H'(x) = \frac{\rho}{E(S)} (1 - G(x)) + \int_0^x H'(x - y) d_y (\rho G_e(y)), \quad x > 0.$$

$x$ 를 0+로 보내면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} H'(x) = \frac{\rho}{E(S)}$$

를 얻는다. 양변을  $x$ 로 미분하면

$$H''(x) = -\frac{\rho}{E(S)} G'(x) + \frac{\rho}{E(S)} \int_0^x H''(x - y) (1 - G(y)) dy + \frac{\rho}{E(S)} H'(0)(1 - G(x))$$

가 된다. 여기서  $x$ 를 0+로 보냄으로써

$$\lim_{x \rightarrow 0+} H''(x) = -\frac{\rho}{E(S)} \left( G'(0) - \frac{\rho}{E(S)} \right).$$

그러므로

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} E(S_K - K) = G'(0)E(S) - 1$$

을 얻는다. □

이제  $S_K - K$ 의 분포함수의 근사식 (3.2)에서  $a$ 를 구하기 위해

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} E(S_K - K) = \lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} \int_0^\infty y d_y \left\{ e^{-aK} G(y) + (1 - e^{-aK}) F(y) \right\}$$

로 놓으면,

$$\begin{aligned} G'(0)E(S) - 1 &= \lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} \left( e^{-aK} E(S) + (1 - e^{-aK}) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)} \right) \right) \\ &= a \left( \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)} - E(S) \right) \end{aligned}$$

표 4.1. 여러 모수 하에서  $\delta$ 와  $a$ 의 값

$\rho$	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$		$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$		$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$	
	$\delta$	$a$	$\delta$	$a$	$\delta$	$a$
0.1	1.5000	2.4000	1.8936	1.8316	2.3663	1.5526
0.2	1.2597	2.5403	1.5419	1.9301	1.8655	1.6288
0.3	1.0610	2.6390	1.2733	1.9987	1.5096	1.6815
0.4	0.8835	2.7165	1.0447	2.0525	1.2202	1.7227
0.5	0.7192	2.7808	0.8405	2.0970	0.9701	1.7569
0.6	0.5642	2.8358	0.6529	2.1353	0.7462	1.7863
0.7	0.4161	2.8839	0.4775	2.1687	0.5411	1.8121
0.8	0.2734	2.9266	0.3113	2.1986	0.3503	1.8351
0.9	0.1349	2.9651	0.1527	2.2255	0.1706	1.8560

을 얻는다. 위 식으로부터,

$$a = \frac{G'(0)E(S) - 1}{\frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)} - E(S)} \quad (3.4)$$

로 결정하면 된다.

결론적으로, 우리는 다음처럼 overshoot의 분포함수를 근사한다. 고객의 서비스시간  $S$ 가 계차  $n$ 인 Erlang 분포를 따르는  $M/G/1$  큐에서 서버의 작업부하량 과정을  $\{W_t | t \geq 0\}$ 이라 하자.  $W_0 = 0$ 이라는 가정하에  $S_K$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$S_K = W_{\inf\{t>0 | W_t > K\}}$$

이때  $K$ 에 대한 overshoot  $S_K - K$ 의 분포함수를 다음처럼 근사한다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \simeq e^{-aK}G(y) + (1 - e^{-aK})F(y), \quad y \geq 0, K > 0,$$

여기서  $G(y)$ 는  $S$ 의 분포함수이고  $F(y)$ 는 평균이  $1/\delta - \{\rho E(S^2)\}/\{2(1-\rho)E(S)\}$ 인 지수분포의 분포함수이다.  $\rho$ 는 큐의 교통밀도이고  $\delta$ 는  $G(\cdot)$ 의 평형분포함수인  $G_e(\cdot)$ 에 대하여

$$\int_0^\infty e^{\delta y} d_y \{\rho G_e(y)\} = 1$$

을 만족하는 유일한 양수이다. 그리고  $a$ 는 식 (3.4)에 의해 주어진다.

#### 4. 수치적 결과

본 절에서는 앞 절에서 구한 근사식의 정확도를 평가하기 위하여  $S$ 가  $\text{Gamma}(2, 1/2)$ ,  $\text{Gamma}(3, 1/3)$ ,  $\text{Gamma}(5, 1/5)$  분포를 따를 때 여러  $\rho$ 와  $K$ 의 값에 대하여 overshoot의 분포함수에 대한 우리의 근사식과 시뮬레이션을 통해 얻은 분포함수의 추정치를 비교한다. 시간의 스케일을 조정함으로써  $E(S) = 1$ 이라 가정한다. 표 4.1은 서비스시간의 분포 및 여러  $\rho$ 에 대하여 상수  $\delta$ 와  $a$ 를 계산한 값이다.

$\tilde{A}(y)$ 를 overshoot의 분포함수에 대한 근사식으로 두고,  $\hat{A}(y)$ 를 시뮬레이션을 통한 분포함수의 추정함수로 두자(100,000회의 시뮬레이션). 그림 4.1은  $S$ 가  $\text{Gamma}(2, 1/2)$ ,  $\text{Gamma}(3, 1/3)$ ,  $\text{Gamma}(5, 1/5)$  분포를 따를 때  $\rho = 0.3, 0.6$ ,  $K = 3$ 에 대하여  $\tilde{A}(y)$ 와  $\hat{A}(y)$ 를 함께 그린 것이다.



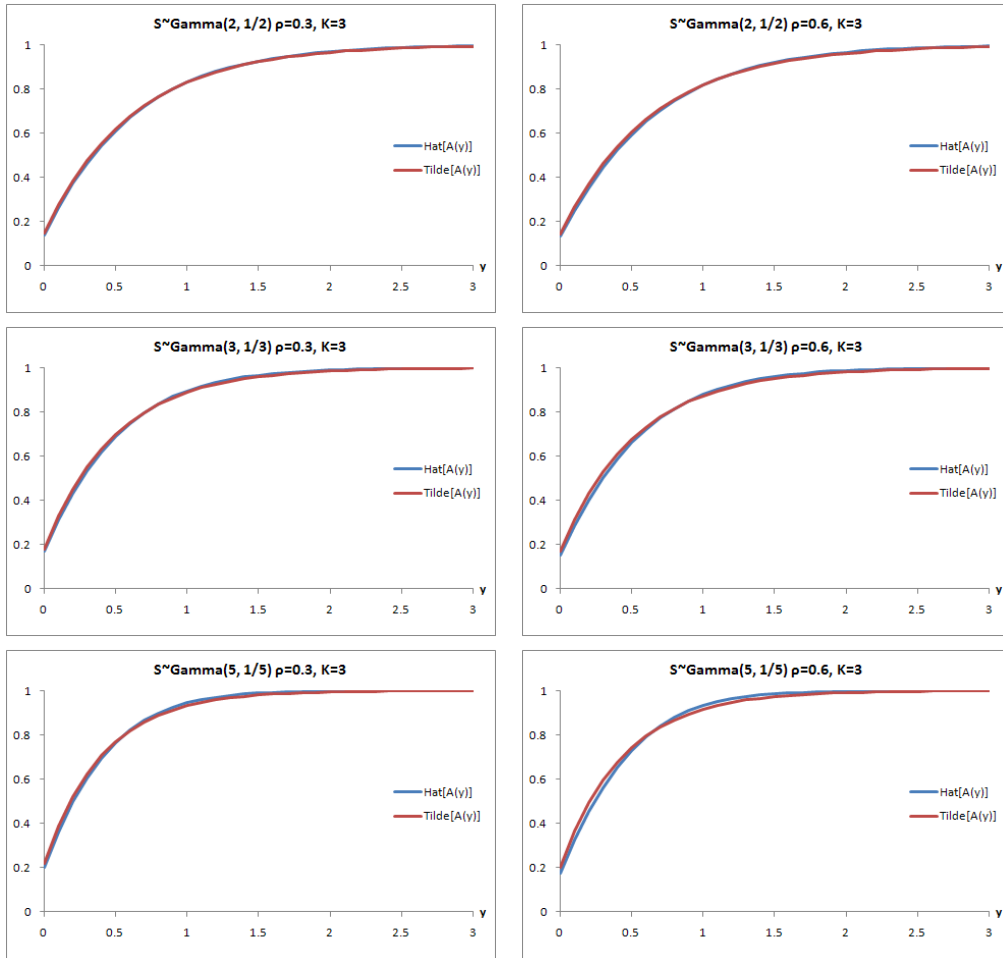


그림 4.1.  $\tilde{A}(y)$ : overshoot의 분포함수에 대한 근사식,  $\hat{A}(y)$ : overshoot의 분포함수(시뮬레이션)

우리가 제시한 근사함수의 정확성을 더 자세히 확인하기 위하여,  $\sup_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 의 값을 표 4.2에 기록하였다.

표 4.2가 보여주는 모든 경우에  $\sup_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 는 0.1보다 작으며,  $K$ 가 1이고  $S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$ 인 경우를 제외하면  $\sup_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 는 0.05보다 작음을 알 수 있다. 또한 Erlang 분포의 계차가 작을 때 근사함수의 정확도가 훌륭함을 알 수 있다.

### 5. 결론

$M/G/1$  큐에서 overshoot의 분포는 참을성 없는 고객이 있는  $M/G/1$  큐모형,  $M/G/1$  댐 모형처럼 어떠한 형태로든 작업부하량에 제한이 있거나  $M/G/1$  큐에서 서비스 속도를  $P_X^M$ -서비스 정책에 의해 조정하는 큐모형의 최적화 문제를 해결하는데 매우 중요하다. 그러나 기존의 연구에서는 overshoot의 분포에 대한 이론적인 공식만 구해졌기에 overshoot의 분포에 대한 근사식이 필요하다.

표 4.2.  $\tilde{A}(y)$ 와  $\hat{A}(y)$ 의 최대 차이값

$\rho$	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$				$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$				$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$			
	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$
0.1	.0406	.0143	.0114	.0106	.0214	.0102	.0063	.0127	.0869	.0126	.0124	.0347
0.2	.0352	.0112	.0103	.0061	.0173	.0164	.0160	.0135	.0892	.0205	.0198	.0281
0.3	.0323	.0109	.0114	.0100	.0180	.0169	.0199	.0182	.0872	.0265	.0262	.0280
0.4	.0288	.0154	.0124	.0152	.0195	.0230	.0232	.0231	.0856	.0317	.0330	.0321
0.5	.0270	.0154	.0165	.0171	.0213	.0234	.0284	.0255	.0850	.0345	.0372	.0364
0.6	.0272	.0173	.0165	.0193	.0212	.0290	.0265	.0286	.0812	.0386	.0400	.0408
0.7	.0253	.0199	.0182	.0175	.0232	.0303	.0285	.0291	.0787	.0424	.0443	.0405
0.8	.0270	.0197	.0186	.0190	.0225	.0265	.0312	.0299	.0751	.0419	.0441	.0461
0.9	.0240	.0219	.0195	.0183	.0229	.0311	.0317	.0321	.0764	.0464	.0493	.0474

본 연구에서는 고객의 서비스시간이 Erlang 분포인  $M/E_n/1$  큐에서 overshoot의 분포에 대한 간단한 근사식을 제시하되, overshoot의 분포를 고객의 서비스시간의 분포와 어떤 지수분포의 선형결합으로 표시함으로써 매우 단순한 근사식을 제시하였다. 그리고 구해진 근사식의 정확도를 확인하기 위하여 여러 모수 하에서 시뮬레이션의 결과와 본 연구에서 제안된 근사식을 비교하였다. 비교한 결과  $n$ 이 크고  $K$ 가 작은 경우를 제외하고는 좋은 근사를 보임을 확인하였고  $n$ 이 크고  $K$ 가 작은 경우도 근사식의 절대오차가 그다지 크지 않음을 확인하였다.

본 연구에 이어 고객 서비스시간의 분포가 Erlang 분포가 아닌 다른 분포(초지수분포, 와이블분포 등)를 따르는 경우에도 범용적으로 적용할 수 있는 근사식을 찾는 연구가 이루어질 것이다.

## 참고문헌

- 배종호, 김성곤 (2007). 보조재생함수에 대한 근사, <응용통계연구>, **20**, 333-342.
- Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2001). The virtual waiting time of the  $M/G/1$  queue with impatient customers, *Queueing Systems*, **38**, 485-494.
- Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2002). A  $P_\lambda^M$ -policy for an  $M/G/1$  queueing system, *Applied Mathematical Modelling*, **26**, 929-939.
- De Kok, A. G. and Tijms, H. C. (1985). A queueing system with impatient customers, *Journal of Applied Probability*, **22**, 688-696.
- Kim, J., Bae, J. and Lee, E. Y. (2006). An optimal  $P_\lambda^M$ -service policy for an  $M/G/1$  queueing system, *Applied Mathematical Modelling*, **30**, 38-48.
- Lee, E. Y. and Ahn, S. K. (1998).  $P_\lambda^M$ -service policy for a dam with input formed by compound Poisson process, *Journal of Applied Probability*, **35**, 482-488.
- Tijms, H. C. (1986). *Stochastic Modeling and Analysis: A Computational Approach*, John Wiley & Sons.
- Wolff, R. W. (1989). *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice Hall.

# An Approximation to the Overshoot in $M/E_n/1$ Queues

Jongho Bae<sup>1</sup> · Ahreum Jeong<sup>2</sup> · Sunggon Kim<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Chungnam National University; <sup>2</sup>National Research Foundation of Korea

<sup>3</sup>Department of Statistics, University of Seoul

(Received August 2010; accepted November 2010)

---

## Abstract

In this paper, we propose an approximation to the overshoot in  $M/E_n/1$  queues. Overshoot means the size of excess over the threshold when the workload process of an  $M/E_n/1$  queue exceeds a prespecified threshold. The distribution, 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> moments of overshoot have an important role in solving some kind of optimization problems. For the approximation to the overshoot, we propose a formula that is a convex sum of the service time distribution and an exponential distribution. We also do a numerical study to check how exactly the proposed formula approximates the overshoot.

Keywords:  $M/E_n/1$  queue, overshoot, approximation.

---

<sup>3</sup>Corresponding author: Associate Professor, Department of Statistics, University of Seoul, Siripdae-gil 13, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743, Republic of Korea. E-mail: sgkim@uos.ac.kr