한국지능시스템학회 논문지 2011, Vol. 21, No. 5, pp. 630-636
http://dx.doi.org/10.5391/JKIIS.2011.21.5.630

퍼지 리아푸노프 함수 기반 강인한 퍼지 제어기 설계

Design of the Robust Fuzzy Controller based on Fuzzy Lyapunov Functions

김 호 준* · 박 진 배**+ · 주 영 훈**
Ho Jun Kim · Jin Bae Park · Young Hoon Joo ·

* 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {khj08121, jbpark}@yonsei.ac.kr
** 군산대학교 제어로봇공학과
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약
본 논문은 매개변수 불확실성을 가지는 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 시스템의 안정도 해석과 안정화 조건을 고려한다. T-S 퍼지 시스템의 안정도 해석 시 conservativeness를 줄이기 위해 퍼지 리아푸노프 함수를 이용한다. 매개변수 불확실성을 가지고 있는 시스템의 안정도를 해석하고 시스템을 안정화 시키는 퍼지 강인 제어기 설계 기법을 제시한다. 안정도 조건과 안정화조건은 선형행렬부등식의 형태로 표현된다. 모의실험을 통해 제안된 접근 방법의 효용성을 보인다.

키워드 : T-S 퍼지 시스템, 선형행렬부등식, 퍼지 리아푸노프 함수, 강인 제어기

Abstract
This paper is concerned with the stability analysis and stabilization for the Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy systems with parametric uncertainties. To reduce conservativeness in stability analysis for T-S fuzzy systems, fuzzy Lyapunov functions are used. Stability analysis is performed and robust fuzzy controller is designed for stabilization of the system with parametric uncertainties. The stability and stabilization conditions are formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, simulation example is presented to show the effectiveness of the proposed approach.

Key Words : T-S fuzzy system, linear matrix inequalities(LMI), fuzzy Lyapunov, robust controller

1. 서 론

현재, 존재하는 대부분의 시스템은 비선형성과 불확실성을 가지고 있다. 하지만 비선형 시스템을 그대로 모델링해서 제어하는 방법에는 많은 어려움이 있다. 따라서 우리가 비교적 다루기 쉬운 선형 제어 이론을 도입하기 위해 선형화를 통해 시스템을 근사화 시켜서 시스템을 제어 하는 경우가 많다. 하지만 시스템을 선형 시스템으로 근사화 시키는 과정에서 필연적으로 오차가 발생한다. 따라서 보다 정확한 제어가 필요한 경우나 비선형성이 매우 큰 경우 제어를 하기 어려울 수 있다. 이러한 어려움을 극복하기 위해 최근 들어 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 시스템에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다. T-S 퍼지 시스템은 시스템의 비선형성을 부분적인 선형 시스템으로 정확하게 나타낼 수 있다. 따라서 비선형성을 가진 시스템을 근사화 시켜서 시스템을 해석하는 기존의 방법과 차이가 있다. 기존의 방법과 달리 T-S 퍼지 시스템은 주어진 비선형 시스템에 대해서 선형 제어 이론을 도입할 수 있음에도 오차 없이 정확하게 안정도를 해석하고 제어기를 설계 할 수 있다,

T-S 퍼지 시스템의 이러한 장점에도 불구하고, 아직 연구가 더 필요한 부분이 있다. 그것들 중 하나는 안정도를 해석함에 있어 conservativeness가 존재한다는 점이다. 원래 시스템을 T-S 퍼지 시스템으로 변환하여 안정도를 해석할 경우 주어진 시스템이 안정한 시스템이라고 하더라도, 안정하지 않다고 판정 할 수 있다. 즉, T-S 퍼지 시스템의 안정도 및 안정화 조건은 충분조건만을 만족한다. 공통의 리아푸노프 함수는 모든 퍼지 규칙에 대해서 부등식 조건을 만족하는 하나의 행렬을 찾아야 했기 때문에 conservativeness가 매우 크다는 단점이 있다. 따라서 이러한 단점을 극복하기 위해 [3-5], [8] 에서 많은 연구를 하였다. 특히, [5]에서는 공통의 리아푸노프 함수의 단점을 극복할 수 있는 퍼지 리아푸노프 함수를 제안하였다.

시스템에서 나타나는 불확실성을 제어할 수 있는 강인 제어기를 설계하는 것 또한 중요한 연구 주제이다. 실제로 어떠한 시스템을 오차 없이 정확히 모델링하기는 매우

접수일자 : 2011년 7월 25일
완료일자 : 2011년 10월 15일
+ 교신저자
이 논문은 2011년도 두뇌한국 21사업과 2010년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구과제입니다.
(NO. 20104010100590)

어려운 일이다. 따라서 모델링 과정에서 생기는 오차를 견뎌낼 수 있는 강인 제어기 설계를 위한 연구가 많이 이루어져 왔다[1], [9-10]. 특히, [1]에서는 매개변수 불확실성을 가지는 시스템에 대해서 퍼지 강인 제어기를 설계하였다. 하지만 [1]에서는 공통의 리아푸노프 함수를 기반으로 한 강인 제어기를 설계하였기 때문에 모든 퍼지 규칙을 만족시키는 하나의 행렬을 찾아야 하므로 매우 큰 conservativeness를 가지고 있다. 따라서 매우 제한된 시스템에서만 이용될 수 있다. 본 논문에서는 기존의 이러한 강인제어기의 단점을 극복하기 위해 퍼지 리아푸노프 함수를 기반으로 한 강인 제어기 설계 기법을 제시한다. 퍼지 리아푸노프 함수를 해석 할 때 conservativeness를 더 줄이기 위하여 [2]에서 제안한 방법을 이용하였다.

본 논문에서는 비선형 시스템에서 퍼지 리아푸노프 함수를 기반으로 한 퍼지 강인 제어기 설계기법을 제시한다. 제안된 안정도 및 안정화 조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 유도되어 쉽게 제어기 이득 값을 찾을 수 있다. 제안된 이론의 타당성을 검증하기 위해 모의실험을 한다.

2. 퍼지 모델

본 논문에서는 다음과 같은 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+\triangle f(x(t))+(g(x(t))+\triangle g(x(t)))u(t) \quad (1)$$

이 때 $x(t)\in R^n$은 상태변수, $u(t)\in R^m$는 제어입력이다. $f(x(t))$와 $g(x(t))$는 비선형 벡터함수이고, $\triangle f(x(t))$와 $\triangle g(x(t))$는 불확실성을 포함한 벡터 함수이다. 비선형 시스템 (1)은 다음과 같은 T-S 퍼지 모델로 표현된다.

Plant Rule i:

IF $z_1(t)\ is\ \Gamma_1^i$ and ... and $z_p(t)\ is\ \Gamma_p^i$

THEN

$$\dot{x}(t)=(A_i+\triangle A_i)x(t)+(B_i+\triangle B_i)u(t), \quad (2)$$

여기서 Γ_h^i 는 i번째 규칙$(i=1,2,...,r)$에서 h번째 퍼지 집합이며, A_i, B_i 는 알려진 차원의 행렬이다. $\triangle A_i$, $\triangle B_i$ 는 각각 타당한 차원의 행렬이며 매개 변수 불확실성을 나타낸다. $z_h(t)$는 h번째 전반부 변수의 퍼지 집합이다. r은 T-S 퍼지 모델의 규칙의 수를 나타낸다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 식 (2)는 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))((A_i+\triangle A_i)x(t)+(B_i+\triangle B_i)u(t))$$

(3)

여기서

$$w_i(z(t))=\prod_{j=1}^{p}\Gamma_j^i(z_j(t)),\ h_i(z(t))=\frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r}w_i(z(t))},$$

$$w_i(z(t))\ge 0,\ \sum_{i=1}^{r}w_i(z(t))>0,$$

$$h_i(z(t))\ge 0,\ \sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1,\ i=1,2,...,r,$$

$\Gamma_j^i(z_j(t))$는 Γ_j^i 집합 안의 $z_j(t)$의 소속정도를 나타낸다.

플랜트와 제어기가 퍼지 시스템의 전건부 변수를 공유하는 PDC(Parallel dustributed compensation)를 적용하여 퍼지 제어기를 설계하면 제어기는 다음과 같이 표현된다.

Controller Rule i:

IF $z_1(t)\ is\ \Gamma_1^i$ and ... and $z_p(t)\ is\ \Gamma_p^i$

THEN $u(t)=F_ix(t), \quad i=1,2,...,r,$

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))K_ix(t)$$

(4)

매개변수 불확실성을 나타내는 $\triangle A_{i,}\ \triangle B_i$는 시간에 따라 변하는 행렬이기 때문에 시스템에 그대로 적용할 경우 제어기의 이득 값을 찾아내기가 어렵다. 따라서 다음 가정을 통해 행렬을 변형한다.

가정 1. 노름 유계 (norm bounded)되어 있는 불확실성을 포함한 행렬 $\triangle A_i, \triangle B_i$는 다음과 같이 표현된다.

$$\triangle A_i=D_iF_i(t)E_{1i},\ \triangle B_i=D_iF_i(t)E_{2i}$$

여기서 $D_{i,}\ E_{1i}, E_{2i}$는 적절한 차원을 가지고 있는 알고 있는 상수행렬이고, $F_i(t)$ 는 $F_i^T(t)F_i(t)\le I$를 만족하는 르베그 가측 (Lebesgue-measurable) 행렬이다.

원활한 수식전개를 위해 다음 보조정리를 도입한다.

보조정리 1 [10]. 적절한 차원을 가진 상수 행렬 D, E와 상수 대칭 행렬 S가 있고, $F^TF\le R$을 만족하며 $\epsilon>0$ 일 때,

$$S+DFE+E^TF^TD^T<0 \text{ 이면,}$$

$$S+\left[\epsilon^{-1}E^T\ \epsilon D\right]\begin{bmatrix}R & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon^{-1}E\\ \epsilon D^T\end{bmatrix}<0 \text{ 을 만족한다.}$$

퍼지 리아푸노프 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$V(x(t))=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))x^T(t)P_ix(t)>0 \quad (5)$$

이때, 소속함수 $h_i(z(t))$는 $\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1$ 이라는 성질에 의해 다음 성질을 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{r}\dot{h}_i(z(t))=0 \quad (6)$$

또한, 다음 방정식이 성립한다.

$$2[x^T(t)M_1+\dot{x}(t)M_2]\times[\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))A_ix(t)]=0 \quad (7)$$

식 (7)의 좌변의 두 번째 항은 항상 0이므로 위 식은

항상 성립한다. 여기서 M_1, M_2 는 적절한 차원을 가진 임의의 행렬이다.

식 (6)과 식 (7)을 통해 [2]에서는 기존의 퍼지 리아푸노프 함수의 안정도를 해석하는 방법보다 더 완화된 선형 행렬 부등식 조건을 제시하였다. 본 논문에서는 [2]에서 제안한 방법을 기반으로 퍼지 리아푸노프 함수를 이용한 강인 제어기 설계 기법을 제시한다.

3. 안정도 해석 및 강인 제어기 설계

이번 장에서는 매개변수 불확실성을 가지는 시스템(3)의 안정도 및 안정화조건에 대해 논의한다. 시스템의 안정도해석을 위해 $u(t)=0$이라 한다. 증명을 위해 가정 1과 보조정리 1을 이용한다. A^T는 행렬 A의 전치행렬을 뜻하며, $*$는 대칭행렬 내에서 대응하는 전치행렬을 뜻하며, $diag$는 대각행렬을 뜻한다.

정리 1. 임의의 스칼라 값 ϵ_{ii}, μ_{ii}이 주어졌을 때 $|\dot{h}_i(z(t)| \le \phi_i$ 라 가정하고 $\phi_i \ge 0$을 만족하면, 다음 조건을 만족하는 임의의 행렬 R이 존재하고 대칭행렬 T_i, Z이 존재하며, $u(t)=0$일 때 불확실성을 가진 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

$$T_i > 0, \tag{8}$$

$$T_i + Z > 0, \tag{9}$$

$$\Phi_i < 0 \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{10}$$

이때 $\Phi_i \equiv \begin{bmatrix} T_\phi - A_i R^T - R A_i^T & * & * & * \\ T_i + R - \mu_{ii} A_i R & \mu_{ii}(R + R^T) & * & * \\ -E_{1i} R^T & 0 & -\epsilon_{ii} I & * \\ D_i^T & \mu_{ii} D_i^T & 0 & -\epsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix}$이고,

$P_\phi \equiv \sum_{i=1}^{r} \phi_i (P_i + M_2)$, $R \equiv M_1^{-1}$, $T_i \equiv R P_i R^T$, $T_\phi = R P_\phi R^T$

$Z = R M_2 R^T$라 정의한다.

증명) 식(5)의 퍼지 리아푸노프 함수를 미분한다.

$$\dot{V}(x(t)) = 2\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) x^T(t) P_i \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} \dot{h}_j(z(t)) x^T(t) P_j x(t)$$

위 식에 식 (6)의 성질을 고려하고 식 (7)을 추가하면 $\dot{V}(x(t))$는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) 2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} \dot{h}_j(z(t)) x^T(t)(P_j + M_2) x(t) \\ &\quad + 2[x^T(t) M_1 + \dot{x}^T(t) \mu_{ii} M_1] \\ &\quad \times [\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i + \triangle A_i) x(t)] \\ &\le \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) 2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} x^T(t) \phi_j (P_j + M_2) x(t) \\ &\quad + 2[x^T(t) M_1 + \dot{x}^T(t) \mu M_1] \\ &\quad \times [\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i + \triangle A_i) x(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) P_\phi x(t) + 2x^T(t) M_1 \dot{x}(t) \\ &\quad - 2x^T(t) M_1 (A_i + \triangle A_i) x(t) + 2\dot{x}^T(t) \mu_{ii} M_1 \dot{x}(t) \\ &\quad - 2\dot{x}^T(t) \mu_{ii} M_1 (A_i + \triangle A_i) x(t)],\end{aligned}$$

$\dot{V}(x(t)) \le \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \left[x^T(t) \; \dot{x}^T(t) \right] \Theta_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ 이때,

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} P_\phi - M_1(A_i + \triangle A_i) - (A_i + \triangle A_i)^T M_1^T & * \\ P_i + M_1^T - \mu_{ii} M_1 (A_i + \triangle A_i) & \mu_{ii}(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} \tag{11}$$

이다. 식 (11)을 2개의 행렬로 나누어 준다.

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} P_\phi - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * \\ P_i + M_1^T - \mu M_1 A_i & \mu_{ii}(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_1 \triangle A_i - \triangle A_i^T M_1^T & * \\ -\mu_{ii} M_1 \triangle A_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} P_\phi - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * \\ P_i + M_1^T - \mu_{ii} M_1 A_i & \mu_{ii}(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} M_1 D_i \\ \mu_{ii} M_1 D_i \end{bmatrix} F_i(t) [-E_{1i} \; 0] + [-E_{1i} \; 0]^T F_i^T(t) \begin{bmatrix} M_1 D_i \\ \mu M_1 D_i \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{12}$$

보조정리 1에 의해 식 (12)는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P_\phi - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * \\ P_i + M_1^T - \mu_{ii} M_1 A_i & \mu(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -E_1^T & M_1 D_i \\ 0 & \mu_{ii} M_1 D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ii}^{-1} I & 0 \\ 0 & \epsilon_{ii} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_1 & 0 \\ D_i^T M_1^T & \mu_{ii} D_i^T M_i^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

식 (12)에 Schur complement를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} P_\phi - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * & * & * \\ P_i + M_1^T - \mu M_1 A_i & \mu_{ii}(M_1 + M_1^T) & * & * \\ -E_1 & 0 & -\epsilon_{ii} I & 0 \\ D_i^T M_1^T & \mu D_i^T M_i^T & 0 & -\epsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} \tag{14}$$

식 (13)에 $diag\left[M_1^{-1} \; M_1^{-1} \; I I\right]$로 합동변환을 취해줄 경우 식 (13)은 다음과 같이 변환된다..

$$\begin{bmatrix} T_\phi - A_i R^T - R A_i^T & * & * & * \\ T_i + R - \mu_i A_i R^T & \mu_{ii}(R + R^T) & * & * \\ -E_{1i} R^T & 0 & -\epsilon_{ii} I & * \\ D_i^T & \mu_{ii} D_i^T & 0 & -\epsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix}$$

따라서, 선형 행렬 부등식 (8)-(10)을 만족하면 $\dot{V}(x(t)) < 0$을 만족하므로 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

정리 1에서 매개변수 불확실성을 가진 시스템의 안정도를 판별하였다. 다음으로 정리 2에서는 매개변수 불확실성을 가진 시스템 (3)의 강인제어기의 이득 값 K_i를 설계하기 위한 조건을 유도한다.

정리 2. 임의의 스칼라 값 ϵ_{ij}, μ_{ij}이 주어지고, $|\dot{h}_i(z(t)| \le \phi_i$ 라 가정하고 $\phi_i \ge 0$을 만족하며 $u(t)$가 식 (4)의 형태일 때, 다음 조건을 만족하는 임의의 행렬 R_i, S_i이 존재하고 대칭

행렬 T_i, Z 이 존재하면, 다음과 같이 유도된 선형 행렬 부등식에 의해 구해진 제어기 이득 값 K_i는 시스템 (3)을 안정화 시킨다.

$$T_i > 0, \tag{15}$$

$$T_i + Z > 0, \tag{16}$$

$$\Phi_i < 0 \qquad i = 1,2,...,r \tag{17}$$

$$\overline{\Phi_{ij}} < 0 \qquad i < j = 1,2,...,r \tag{18}$$

이때,

$$P_\phi \equiv \sum_{i=1}^{r} \phi_i (P_i + M_2),\ R \equiv M_1^{-1},\ T_i \equiv RP_iR^T,\ T_\phi = RP_\phi R^T$$

,

$Z = RM_2R^T, S_j = RK_j^T$ 이고 Φ_i는 정리 1에서 정의하였으며

$$\overline{\Phi_{ij}} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{\Phi_{ij}} & * & * & * & * & * \\ \widetilde{\Phi_{ij}} & 2\mu_{ij}(R+R^T) & * & * & * & * \\ -E_{1i}R^T - E_{2i}S_j^T & 0 & -\epsilon_{ij}I & * & * & * \\ -E_{1j}R^T - E_{2j}S_i^T & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}I & * & * \\ D_i^T & \mu_{ij}D_i^T & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}^{-1}I & * \\ D_j^T & \mu_{ij}D_j^T & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}^{-1}I \end{bmatrix} \tag{19}$$

이다.

이때, $\widehat{\Phi_{ij}} = 2T_\phi - A_iR^T - B_iS_j^T - RA_i^T - S_jB_i^T - A_jR^T - B_jS_i^T - RA_j^T - S_iB_j^T$

$\widetilde{\Phi_{ij}} = T_i + T_j + 2R - \mu_{ij}(A_iR^T + B_iS^T + A_jR^T + B_jS_i^T)$ 이다.

제어기 이득 값 K_i는 다음과 같다.

$$K_i = S_i^T (R^{-1})^T \tag{20}$$

증명)

정리 1과 마찬가지로 퍼지 리아푸노프 함수를 이용한다. 리아푸노프 함수를 미분하고 식 (6)과 식 (7)을 고려하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) 2x^T(t)P_i\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} \dot{h}_j(z(t)) x^T(t)(P_j + M_2)x(t) \\ &\quad + 2[x^T(t)M_1 + \dot{x}^T(t)\mu_{ij}M_1] \\ &\quad \times [\dot{x}(t) - \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t)) \\ &\quad \times (A_i + \triangle A_i + B_iK_j + \triangle B_iK_j)x(t)] \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) 2x^T(t)P_i\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{r} x^T(t)\phi_j(P_j + M_2)x(t) \\ &\quad + 2[x^T(t)M_1 + \dot{x}^T(t)\mu_{ij}M_1] \\ &\quad \times [\dot{x}(t) - \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t)) \\ &\quad \times (A_i + \triangle A_i + B_iK_j + \triangle B_iK_j)x(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))[2x^T(t)P_i\dot{x}(t) \\ &\quad + x^T(t)P_\phi x(t) + 2x^T(t)M_1\dot{x}(t) \\ &\quad - 2x^T(t)M_1(A_i + \triangle A_i + B_iK_j + \triangle B_iK_j)x(t) \\ &\quad + 2\dot{x}^T(t)\mu_{ij}M_1\dot{x}(t) \\ &\quad - 2\dot{x}^T(t)\mu_{ij}M_1(A_i + \triangle A_i + B_iK_j + \triangle B_iK_j)x(t)] \end{aligned}$$

위 식을 $\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ 에 관한 행렬로 정리하고 $diag[M^{-1}\ M^{-1}]$로 합동 변환을 취해주면 다음 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & \sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t)) \left[x^T(t)\ \dot{x}^T(t)\right] \overline{\Theta_i} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i<j}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))[x^T(t)\ \dot{x}^T(t)] \overline{\Theta_{ij}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이때,

$$\overline{\Theta_i} = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \Theta_i \begin{bmatrix} (M^T)^{-1} & 0 \\ 0 & (M^T)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \overline{\Theta_{ij}} = & \begin{bmatrix} \begin{array}{l} (2T_\phi - A_iR^T - B_iS_j^T - RA_i^T - S_jB_i^T \\ - A_jR^T - B_jS_i^T - RA_j^T - S_iB_j^T) \end{array} & * \\ T_i + T_j - \mu_{ij}(A_iR^T + B_iS_j^T + A_jR^T + B_jS_i^T) & 2\mu_{ij}(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \begin{array}{l} (-\triangle A_iR^T - \triangle B_iS_j^T - R\triangle A_i^T - \triangle S_jB_i^T \\ - \triangle A_jR^T - \triangle B_jS_i^T - R\triangle A_j^T - \triangle S_iB_j^T) \end{array} & * \\ -\mu_{ij}(\triangle A_iR^T + \triangle B_iS_j^T - \triangle A_jR^T - \triangle B_jS_i^T) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. $\overline{\Theta_i}$는 정리 1의 증명과 같은 과정을 통해 선형 행렬 부등식 조건 (17)을 유도할 수 있다. 마찬가지로 가정 1과 보조정리 1을 이용해서 $\overline{\Theta_{ij}}$를 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \begin{array}{l} (2T_\phi - A_iR^T - B_iS_j^T - RA_i^T - S_jB_i^T \\ - A_jR^T - B_jS_i^T - RA_j^T - S_iB_j^T) \end{array} & * \\ T_i + T_j - \mu(A_iR^T + B_iS_j^T + A_jR^T + B_jS_i^T) & 2\mu_{ij}(M_1 + M_1^T) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -RE_{1i}^T - S_jE_{2i}^T & -RE_{ij}^T - S_iE_{2j}^T & D_i & D_j \\ 0 & 0 & \mu D_i & \mu D_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ij}^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{ij}^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{ij}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{ij}I \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} -E_{1i}R^T - E_{2i}S_j^T & 0 \\ -E_{1j}R^T - E_{2j}S_i^T & 0 \\ D_i^T & \mu_{ij}D_i^T \\ D_j^T & \mu_{ij}D_j^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

식 (21)에 Schur complement를 적용하면 식 (19)와 같이 변환된다. 따라서 부등식 (15)-(18)을 만족하면 식 (20)과 같이 유도된 제어기 이득 값 K_i는 시스템 (3)을 점근적으로 안정화 시킨다.

4. 모의실험 및 결과 고찰

본 논문에서 제안한 강인제어기의 성능을 평가하기 위해 [2]에서 사용한 시스템을 이용한다.

시스템을 T-S 퍼지 모델로 다음과 같이 표현 할 수 있다.

Rule 1 :

IF $z_1(t)\ is\ \Gamma_1^1$

THEN $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Rule 2 :

IF $z_1(t)\, is\, I_1^2$
THEN $\dot{x}(t)=A_2x(t)+B_2u(t)$

$u(t)$는 식 (4)의 형태이다. 각각의 시스템 행렬과 매개변수 값은 다음과 같다.

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & -10\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$
$$B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$
$$\epsilon=0.3\ ,\ \phi=1\ ,\ \mu=0.1\,.$$

각각의 규칙에 대응하는 소속함수는 다음과 같다.

$$h_1(x_1(t))=\begin{cases}0.5(1-\sin(x_1)) & \text{for}\,|x_1|\le\pi/2\\ 0 & \text{for}\,x_1>\pi/2\\ 1 & \text{for}\,x_1<-\pi/2\end{cases}$$
$$h_2(x_1(t))=1-h_1(x_1(t))$$

매개변수의 오차범위는 기준 매개변수 값의 30%라고 가정한다. 따라서 $\Delta A_1=\Delta A_2=\begin{bmatrix}2\times0.3\times F(t) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 이고 가제어성을 유지하기 위해 $\Delta B_1=\Delta B_2=[0\ \ 0]^T$ 라 가정한다. 가정 1에 의해
$D_1=D_2=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix},\ E_{11}=E_{12}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_{21}=E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$
라 정의할 수 있다. 초기 값은 $x_1(0)=-3, x_2(0)=-5$ 이다. 그림 1은 매개변수 불확실성을 가진 시스템의 위상 궤도를 나타낸다. 위 시스템에 본 논문의 정리 2에서 제안한 선형행렬 부등식을 Matlab을 이용해 해를 구해서 제어기 이득 값 K_1, K_2를 구하면 다음과 같다.

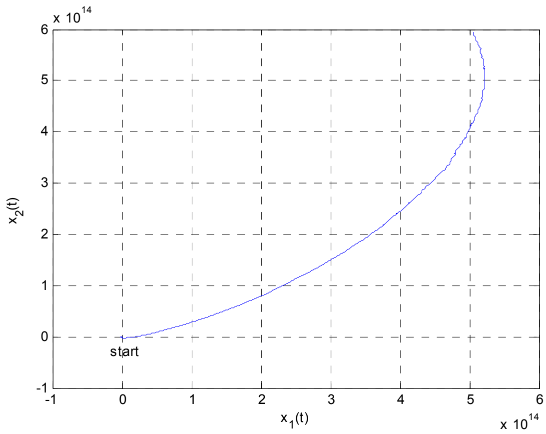

그림 1. 매개변수 불확실성을 가진 시스템의 위상 궤도
Fig. 1. The phase trajectory of the system with parametric uncertainties.

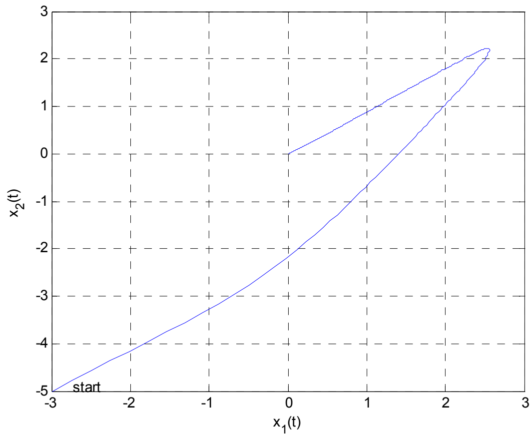

그림 2. 제어된 매개변수 불확실성을 가진 시스템의 위상 궤도
Fig. 2. The phase trajectory of the controlled system with parametric uncertainties.

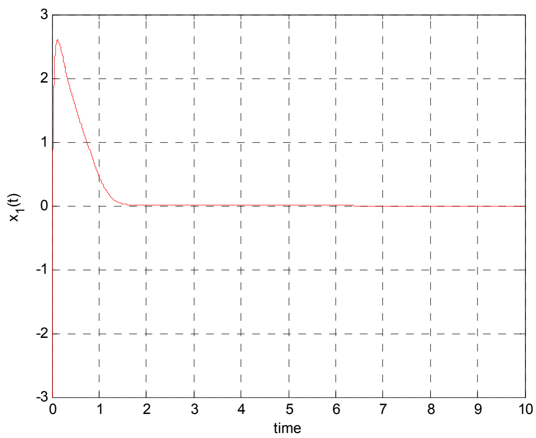

그림 3. 상태변수 $x_1(t)$의 시스템 응답
Fig. 3. Closed loop system response of state $x_1(t)$

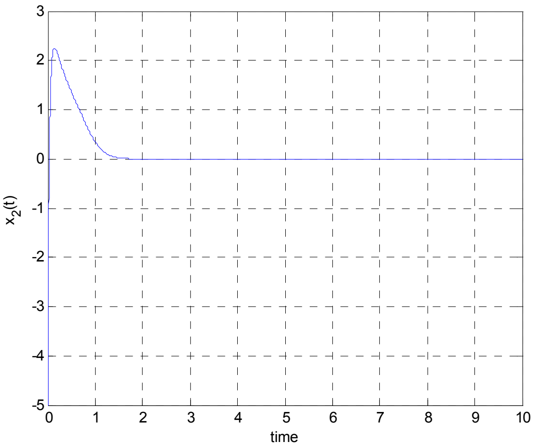

그림 4. 상태변수 $x_2(t)$의 시스템 응답
Fig. 4. Closed loop system response of state$x_2(t)$

$$K_1 = [54.7552 \ \ -76.7974]$$
$$K_2 = [26.8000 \ \ -32.1649]$$

제어기 이득 값을 시스템에 적용하면 상태변수들의 위상 궤도는 그림 2와 같이 변한다. 각각의 상태변수의 시간에 따른 시스템 응답은 그림 3, 그림 4 에서 나타낸다. 제어하기 전 발산하던 시스템이 본 논문에서 제안한 강인제어기에 의해 점근적으로 안정화됨을 확인 할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 매개변수 불확실성을 가지는 시스템에 대한 안정도 분석 및 강인 퍼지 제어기 설계에 대해서 논의하였다. 매개변수 불확실성을 가지는 비선형시스템을 퍼지 모델링 한 후 이를 이용하여 퍼지 제어기를 설계하였다. 안정도 판정 및 안정화 조건 부등식의 conserv ati-venss를 줄이기 위해 퍼지 리아푸노프 함수를 이용하였다. 유도된 부등식은 선형 행렬 부등식의 형태로 표현된다. 선형 행렬 부등식의 해를 통해 시스템을 안정화 시키는 제어기 이득 값을 얻어냈다. 설계된 제어기의 효과를 검증하기 위해 [2]에서 제안한 시스템을 이용하여 모의실험을 하였다.

참 고 문 헌

[1] Lee, H. J., J. B. Park and G. Chen, “Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties,” *IEEE. Trans*, Vol. 9 , No. 2 , pp. 369-379, 2001
[2] Mozelli, L. A, R. M. Palhares and G. S. C. Avellar, “A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization con-ditions for fuzzy systems,” *Information Sciences*, Vol. 179, No. 8 pp. 1149-1162, 2009.
[3] H.K.Lam and M. Narimani, “Stability Analysis and Performance Design for Fuzzy-Model-Based Control System Under Imperfect Premise Matching, ”*IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 17, No. 4, pp. 949-961, 2009.
[4] Feng, G., “Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions”, *IEEE. Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 12 No. 1, pp. 22-28, 2004.
[5] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, “A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems”, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 4, pp. 582-589, 2003.
[6] Sala, A., “On the conservativeness of fuzzy and fuz-zy-polynomial control of nonlinear system”, *Annual Reviews in Control*, Vol. 33, No. 1, pp. 48-58, 2009.
[7] K.Tanaka and M.Segeno, “Stability analysis and de-sign of fuzzy control of nonlinear systems: Stability and the design issues”, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 45, No.2, pp. 1697-1700, 1992.
[8] M. Bernal, T. M. Guerra, A. Kruszewski, "A mem-bership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models." F*uzzy Sets and Systems*. Vol. 160, no. 19, pp. 2776-2795, 2009.
[9] Chang, W., et al., “Design of robust fuzzy-mod-el-based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems”, *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 125, No. 1, pp. 1-22, 2002.
[10] L. Xie, “Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainties”, *Int. J. Contr.*, Vol. 63, No. 4, pp. 741-750, 1996.

저 자 소 개

김 호 준 (Ho Jun Kim)

2011년 : 연세대학교 전기전자공학과 졸업.
2011년～현재 : 동 대학원 전기전자공학과 석사과정

관심분야 : T-S 퍼지, 강인 제어
Phone : 02-2123-2773
Fax : 02-362-4539
E-mail : khj08121@yonsei.ac.kr

박 진 배 (Jin Bae Park)

2011년 21권 2호 참조

주 영 훈 (Young Hoon Joo)

2011년 21권 3호 참조