논문 2011-48TC-3-1

이중 제한조건 빔형성 방식의 기하학적 분석

(Geometrical Analysis of the Double Constraints Beamforming)

류 길 현*

(Kil Hyen Ryu)

요 약

이중의 제한조건을 사용하는 선형제한 최소분산 (Linear Constraint Minimum Variance LCMV) 빔형성 (Beamforming) 방식에서 가중치 벡터가 갱신되는 원리를 기하학적 분석(Geometrical Analysis)을 통하여 분석하였다. 모의실험을 통하여 제안하는 기하학적 분석 방법이 타당함을 나타내었다.

Abstract

In this thesis, we have developed novel geometrical analysis method for the double constraints linear constraint minimum variance (LCMV) beamforming algorithm. The proposed analysis method was matched well with the computer simulation result.

Keywords: Array Antenna, Beamforming, Signal Cancellation, Geometrical Analysis

Ⅰ. 서 론

선형제한 최소분산 (Linear Constraint Minimum Variance; LCMV) 방식의 빔형성 (Beamforming) 알고리듬에서 신호삭제 (Signal Cancellation) 현상을 해결하기 위해서 이중의 제한조건(Double Constraint)을 사용하는 것이 제안되었고[1~2], 본 논문에서는 여기에 대하여 기하학적 분석(Geometrical Analysis)을 실시하여 그 유용성을 나타낸다. 이중의 제한조건을 사용하는 빔형성 방법을 기하학적으로 분석하면, 최적 가중치 벡터(Optimal Weight Vector)가 어떻게 적응 알고리듬(Adaptive Algorithm)을 통하여 오차를 줄여 나가는지를 직관적으로 표현할 수 있어서 매우 유용하다.

* 정회원, 삼성전자 System LSI 사업부
(Samsung Electronics)
접수일자: 2010년12월5일, 수정완료일: 2011년3월17일

Ⅱ. 제한평면과 프로젝션

출력신호의 전력을 최소화 하면서 목표신호 방향의 이득을 최대화 하도록 유지하는 선형제한과 함께, 목표신호와 상관이 있는 간섭신호 방향의 이득을 최소화 하는 조건[1~2]

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \mathbf{w}^H\mathbf{R}\,\mathbf{w} \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{f}_s{}^H\mathbf{w}=1 \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{f}_c{}^H\mathbf{w}=0 \end{aligned} \tag{1}$$

에서 배열 안테나에 입사되는 목표신호의 도달각을 나타내는 방향벡터 (Steering Vector) $\mathbf{f_s}$가 0이 아니고 N 차원의 열벡터(Column Vector)일 때, 목표신호 방향의 제한 방정식(Constraint Equation)을 만족하는 가중치 벡터의 집합

$$\Lambda_s=\left\{\mathbf{w}:\mathbf{f}_s{}^H\mathbf{w}=1\right\} \tag{2}$$

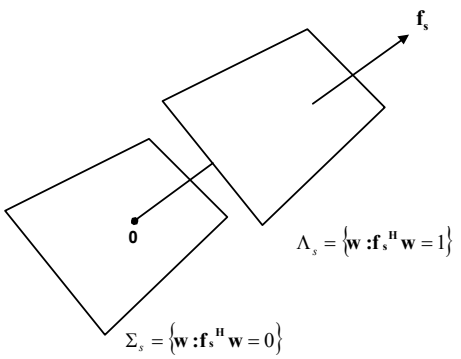


그림 1. 방향벡터 $\mathbf{f}_s$가 이루는 제한평면과 부공간.
Fig. 1. Constraint plane and subspace constructed by the steering vector $\mathbf{f}_s$.

을 제한평면(Constraint Plane)[3], 혹은 하이퍼평면(Hyperplane) 이라 한다. 그림 1에 방향벡터 $\mathbf{f}_s$가 이루는 제한평면 Λ_s를 나타내었다. 그림 1에서 방향벡터 $\mathbf{f}_s$와 제한평면 Λ_s는 수직을 이룬다. 또한 식 (2)의 호모지니어스(Homogeneous) 형태

$$\Sigma_s = \{\mathbf{w} : \mathbf{f}_s^H \mathbf{w} = 0\} \tag{3}$$

를 제한 부공간(Constraint Subspace)[4] 이라 한다. 그림 1에서 나타낸바와 같이 제한 부공간 Σ_s는 원점을 포함한다. 마찬가지로 식 (1)에서 간섭신호 방향의 제한 방정식을 만족하는 가중치 벡터의 집합

$$\Sigma_c = \{\mathbf{w} : \mathbf{f}_c^H \mathbf{w} = 0\} \tag{4}$$

을 간섭신호에 대한 제한 부공간이라고 한다.

다음으로 LCMV 방식의 빔형성 알고리듬에서 프로젝션(Projection)의 역할에 대해서 살펴본다. 두 개의 제한조건을 가지는 경우 가중치 벡터의 갱신법칙[1]은

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{Q}\mathbf{P}_c[\mathbf{w}(k) - \mu y(k)\mathbf{x}(k)] + \mathbf{a} \tag{5}$$

와 같다. 식 (5)에서 행렬

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{I} - \mathbf{f}_s \mathbf{f}_s^H / (\mathbf{f}_s^H \mathbf{f}_s) \tag{6}$$

를 프로젝션 연산자(Projection Operator), 혹은 직교 프로젝터(Orthogonal Projector)라고 한다. 프로젝션 연산자 $\mathbf{P}_s$를 가중치 벡터의 전단에 곱하면 $\mathbf{f}_s$에 의해서 정의되는 제한 부공간 Σ_s에 수직인 성분을 제거하는 역할을 한다. 이것을 "프로젝션 연산자 $\mathbf{P}_s$가 벡터를 제한 부공간 Σ_s에 프로젝션 한다" 라고 말한다. 이것을 확인하기 위해서 가중치 벡터 $\mathbf{w}$에 $\mathbf{P}_s$를 곱한 값 $\mathbf{P}_s\mathbf{w}$가 $\mathbf{f}_s$와 직교하는지를 계산하면

$$\mathbf{f}_s^H \mathbf{P}_s \mathbf{w} = \mathbf{f}_s^H \left(\mathbf{I} - \mathbf{f}_s \mathbf{f}_s^H / \mathbf{f}_s^H \mathbf{f}_s\right)\mathbf{w} = 0 \tag{7}$$

이 되므로 벡터 $\mathbf{P}_s\mathbf{w}$는 제한 부공간 Σ_s 상에 존재 함을 알 수 있다. 같은 논리로 행렬 $\mathbf{P}_c$는 가중치 벡터를 제한 부공간 Σc에 프로젝션 한다. 즉 $\mathbf{P}_c\mathbf{w}$와 $\mathbf{f}_c$와의 내적(Inner Product)을 하면

$$\mathbf{f}_c^H \mathbf{P}_c \mathbf{w} = \mathbf{f}_c^H \left(\mathbf{I} - \mathbf{f}_c \mathbf{f}_c^H / \mathbf{f}_c^H \mathbf{f}_c\right)\mathbf{w} = 0 \tag{8}$$

이 되므로 벡터 $\mathbf{P}_c\mathbf{w}$는 제한 부공간 Σ_c에 존재함을 알 수 있다. 마지막으로 식 (5)에서 행렬 $\mathbf{Q}$ 도 프로젝션 연산자의 역할을 하는지 확인하기 위해 $\mathbf{P}_c\mathbf{w}$ 전단에 $\mathbf{Q}$를 곱해서 벡터 $\mathbf{f}_s$와 내적을 하면

$$\mathbf{f}_s^H \mathbf{Q}\mathbf{P}_c \mathbf{w} = \mathbf{f}_c^H \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_c \mathbf{f}_s \mathbf{f}_s^H / \mathbf{f}_s^H \mathbf{P}_c \mathbf{f}_s\right)\mathbf{P}_c \mathbf{w} = 0 \tag{9}$$

와 같이 벡터 $\mathbf{Q}\mathbf{P}_c\mathbf{w}$도 제한 부공간 Σ_s상에 존재함을 알 수 있다. $\mathbf{P}_s$ 프로젝터의 역할을 그림 2에 나타내었고, 마찬가지의 원리로 $\mathbf{P}_c$는 가중치 벡터 $\mathbf{w}$를 제한 부공간 Σ_c에 프로젝션 하고, $\mathbf{Q}$는 벡터 $\mathbf{P}c\mathbf{w}$를 제한 부공간 Σ_s에 프로젝션 하는 것을 쉽게 나타낼 수 있다.

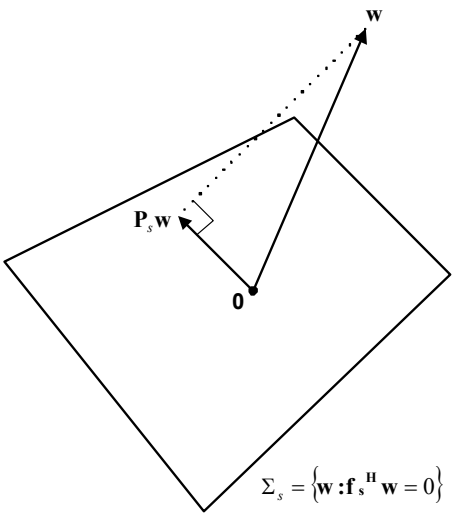


그림 2. $\mathbf{P}_s$는 $\mathbf{w}$를 Σ_s에 프로젝션 한다.
Fig. 2. $\mathbf{P}_s$ projects the $\mathbf{w}$ onto the Σ_s.

Ⅲ. 이중제한 조건에서의 기하학적 분석

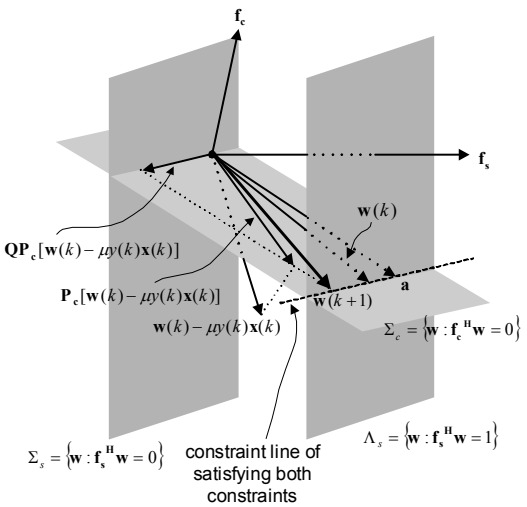
지금부터 본 논문에서 제안하는 두 개의 제한조건을 갖는 LCMV 빔형성 방법이 어떻게 동작하는가를 기하학적으로 분석한다. 한가지의 제한조건만을 갖는 Frost

방법[5]에서는 가중치 벡터가 출력전력을 최소화 하는 방향으로 갱신 되면서, 한 개의 제한평면 만을 만족하면 됐으므로 평면적인 그림으로 설명이 가능하였다. 그러나 제안하는 적응 알고리듬에서는 목표신호와 간섭신호에 의한 두 개의 제한평면이 존재하므로 그림 3과 같이 3차원 공간에서 입체적으로 나타낸다. 그림 3에서 목표신호의 도달각 $\mathbf{f}_s$에 의한 제한평면 Λ_s과 제한 부공간 Σ_s를 나타내었다. 이것과 동시에 목표신호와 상관이 강한 간섭신호의 도달각 $\mathbf{f}_c$에 의한 제한 부공간 Σ_c를 나타내었다. 여기서 $\mathbf{f}_s$와 $\mathbf{f}_c$는 같지 않으므로 두 개의 평면 Σ_s와 Σ_c는 일정한 각을 이루면서 만나게 된다고 가정하면 이것은 선을 이루는 데 이것을 그림 3에 점선으로 나타내었다. 이 선은 명백하게 다음 두개의 제한조건

$$\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{w}=1,\quad \mathbf{f}_c^{\,H}\mathbf{w}=0 \tag{10}$$

을 동시에 만족하는 가중치 벡터의 집합을 나타낸다.

지금부터 이 두 개의 제한조건을 만족하는 선을 제한선(Constraint Line)이라고 부르기로 하자. 이 제한선의 의미는 식 (5)의 적응 알고리듬에 의해서 가중치 벡터가 갱신 될 때, 그 값은 항상 이 제한선 위에 놓이게 된다는 것이다. 이러한 현상이 일어나는 원리에 대해서 아래에 자세히 설명한다. 적응 알고리듬 식 (5)에서 k 번째의 가중치 벡터 $\mathbf{w}(k)$에 출력 전력을 최소화 하는



$$\mathbf{w}(k+1)=\mathbf{QP}_c[\mathbf{w}(k)-\mu y(k)\mathbf{x}(k)]+\mathbf{a}$$

그림 3. 두 개의 제한조건을 갖는 LCMV 방식 적응 알고리듬의 동작 원리.

Fig. 3. The operation of the LCMV adaptive beamforming algorithm with two constraints.

조건을 만족하기 위해 보정 되는 값인 $-\mu y(k)\mathrm{x}(k)$가 더해진다. 이 결과는 Frost가 했던 1차의 제한조건의 경우와 마찬가지로제한선을 벗어나게 된다. 이것에 프로젝션 연산자 $\mathbf{P}_c$를 곱한 벡터는 그림 2에서 설명한 것과 같은 원리로 간섭신호에 의한 제한 부공간 Σ_c에 놓이게 된다. 이것에 다시 프로젝션 연산자 $\mathbf{Q}$를 곱하면 목표신호에 의한 제한 부공간 Σ_s에 놓이게 된다. 그림 3에서 보면 이렇게 계산된 벡터는 Σ_s와 Σ_c가 만나는 선상에 위치함을 알 수 있다. 이것은 $\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{w}=0$과 $\mathbf{f}_c^{\,H}\mathbf{w}=0$, 두 개의 제한조건을 만족하는 벡터라는 것을 알 수 있다. 제안하는 적응 알고리듬에서는 이 벡터를 초기값 벡터 $\mathbf{a}$와 벡터 합을 하게 되는 데 벡터 $\mathbf{a}$의 성질에 대해서 자세히 살펴보기로 하자. 간섭신호에 대한 방향벡터 $\mathbf{f}_c$와 벡터 $\mathbf{a}$의 내적은

$$\mathbf{f}_c^{\,H}\mathbf{a}=\left(\mathbf{f}_c^{\,H}\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s\right)/\left(\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s\right)=0 \tag{11}$$

이므로 벡터 $\mathbf{a}$는 간섭신호에 의한 제한 부공간 Σ_c에 놓여 있음을 알 수 있다. 또한

$$\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{a}=\left(\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s\right)/\left(\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s\right)=1 \tag{12}$$

이므로 벡터 $\mathbf{a}$는 제한평면 Λ_s ={$\mathbf{w}$:$\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{w}$=1}에 위치함을 알 수 있다. 즉 벡터 $\mathbf{a}$는 Σ_c에 놓여 있으면서 Λ_s에 위치하므로 그림 3을 보면 알 수 있듯이 항상 두 개의 제한조건을 만족하는 제한선에 위치함을 알 수 있다. 또한 이 벡터는 $\mathbf{a}$=($\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s$)/($\mathbf{f}_s^{\,H}\mathbf{P}_c\mathbf{f}_s$) 이므로 벡터 $\mathbf{f}_s$를 $\mathbf{P}_c$에 의해서 제한 부공간 Σc로 프로젝션 한 방향과 일치함을 알 수 있다. 즉 벡터 a는 제한선과 수직을 이루게 된다. 최종적으로 k+1 번째 가중치 벡터 $\mathbf{w}$(k+1)는 벡터 $\mathbf{QP}$c[$\mathbf{w}$(k)−μ y(k)x(k)]와 벡터 $\mathbf{a}$의 벡터 합으로 나타난다. 그림 3을 보면 $\mathbf{w}$(k+1)은 항상 제한선에 위치하게 되어 적응 알고리듬 식 (1)에서 원래 의도했던 대로 목표신호방향의 이득은 1로 하면서 동시에 간섭신호 방향의 이득은 0으로 만드는 제한 조건을 항상 만족 시킨다는 것을 알 수 있다. 결론적으로 식 (5)의 적응 알고리듬은 그림 3에서 설명한 바와 같이 항상 2개의 제한조건을 만족시키면서 출력 전력을 최소화 하는 방향으로 가중치 벡터를 갱신해나간다. 만약 배열 안테나에 입사되는 신호가 $\mathbf{f}_s$의 방향벡터를 갖는 한 개의 목표신호 및 $\mathbf{f}_c$의 방향벡터를 갖는 한 개의 간섭신호만이 존재했을 경우에는 식 (5)에 의한 가중치 벡터의 변화는 일어나지 않을 것이라고 예상할 수 있다. 그 이유는 가중치 벡터의 초기조건은 벡터 $\mathbf{a}$인데[1~2], 그림

3을 보면 벡터 **a**는 이미 입사되는 목표신호 및 간섭신호에 대한 제한조건을 만족하는 제한선에 위치하고 있으므로 더 이상 가중치 벡터를 갱신할 필요가 없을 것이다.

Ⅳ. 모의실험

이중의 제한조건을 갖는 빔형성 방식에서 제안하는 기하학적 분석방법의 타당성을 분석하기 위해서 다음과 같은 모의실험을 수행하였다. 한 개의 목표신호가 θ_s(0도) 방향으로 입사되고, 코히어런트 (Coherent) 간섭신호가 θ_c(60도) 방향으로 입사될 경우의 초기조건에 의한 빔패턴을 그림 4에 나타내었다. 그림에서 보는바와 같이 목표신호와 코히어런트한 성질을 갖는 간섭신호가 있더라도 간섭신호에 대한 제한조건의 영향으로 인해 60방향으로 Null이 생성됨을 알 수 있다. 이 상황에서 도달각을 알지 못하는 -60도 방향의 코히어런트 하지 않은 (Non-Coherent) 간섭신호가 생성될 경우 식 (5)에 의한 가중치 벡터의 갱신에 의한 빔패턴의 결과를 그림 5에 나타내었다.

즉 그림 4의 경우는 가중치 벡터의 초기조건에 의한 빔패턴을 나타낸 것이고, 그림 5의 경우는 가중치 벡터가 수렴한 후의 빔패턴을 나타낸 것이다. 그림 4에서 보듯이 가중치 벡터가 갱신하기 전에는 -60도로 입사되는 간섭신호에 대해서는 전혀 신호감쇄가 이루어지지 않았으나, 그림 5를 보면 가중치 벡터의 수렴 후에는

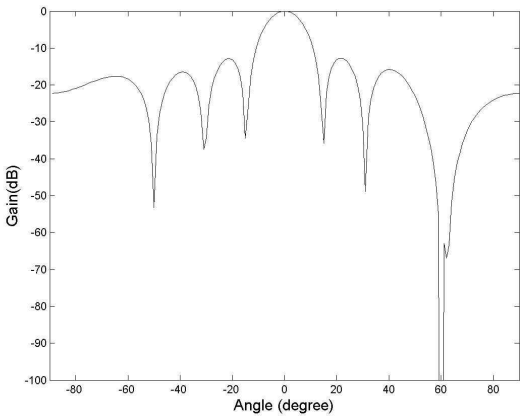


그림 4. θ_s(0도) 방향의 목표신호, θ_c(60도) 방향의 간섭신호가 존재할 경우의 초기조건에 의한 빔패턴.

Fig. 4. Beampattern with initial condition when the direction of the target signal is θ_s(0 degree), the direction of the coherent interfering signal is θ_c(60 degree).

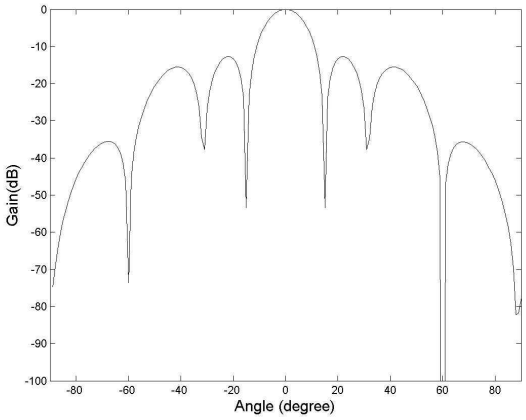


그림 5. θ_s(0도) 방향의 목표신호, θ_c(60도) 방향의 간섭신호 및 -60도 방향의 간섭신호가 존재할 경우 가중치 벡터가 수렴한 후의 빔패턴.

Fig. 5. Beampattern with the converged weight vector when the direction of the target signal is θ_s(0 degree), the direction of the coherent interfering signal is θ_c(60 degree), and the direction of the non-coherent signal is -60 degree.

-60도 방향의 간섭신호에 대한 신호감쇄가 크게 일어났음을 알 수 있다.

이상과 같은 모의실험 결과를 종합해 보면 두 개의 제한조건을 갖는 LCMV 방식에서는 목표신호 방향과 도달각을 아는 간섭신호 방향에 대해서는 가중치 벡터의 변화는 일어나지 않으며, 그 외의 간섭신호 성분에 대해서 가중치 벡터의 갱신이 일어난다는 것을 알 수 있고, 이것은 그림 3에서 살펴본 가중치 벡터의 기하학적인 동작원리와 잘 들어맞음을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 이중의 제한조건을 갖는 LCMV 방식의 빔형성 알고리듬의 특성에 대한 기하학적 분석을 실시하였다. 식 (5)를 기하학적으로 분석하면, 이것이 최적 가중치 벡터와의 오차를 적응 알고리듬을 통하여 어떻게 줄여 나가는지를 직관적으로 표현할 수 있어서 매우 유용함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] 류길현, 김광태, “이중의 제한조건을 갖는 빔형성 방법,” 대한전자공학회 논문지, 제 47권, TC편, 제 9호, 9-13쪽, 2010년.

[2] 류길현, 김광태, “이중 제한조건 빔형성 방식에서 수렴조건 분석,” 대한전자공학회 논문지, 제 47권 TC편, 제 9호, 14-18쪽, 2010년.
[3] D. G. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming. 2nd ed, Addison-Wesley, 1984.
[4] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods. New York: John Wiley & Sons, 1969.

저 자 소 개

류 길 현(정회원)
1991년 경북대학교 전기공학 학사
1995년 경북대학교 전자공학 석사
2009년 경북대학교 전자공학 박사
2003년～현재 삼성전자
수석연구원
<주관심분야 : 통신시스템>