

논문 2011-48SP-2-16

Support 검출을 통한 reweighted L1-최소화 알고리즘

(Reweighted L1-Minimization via Support Detection)

이혁*, 권석범*, 심병효**

(Hyuk Lee, Seokbeop Kwon, and Byonghyo Shim)

요약

압축 센싱 (Compressed Sensing) 기술을 통해 $M \times N$ 측정 행렬의 원소들이 특정의 독립적인 확률 분포에서 뽑혀 identically 분포의 성질을 가지고 있을 때 $M \ll N$ 의 경우에도 스파스 (sparse) 신호를 높은 확률로 정확하게 복원할 수 있다. L1-최소화 알고리즘이 불완전한 측정에 대해서도 스파스 (sparse) 신호를 복원할 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 본 논문에서는 OMP를 변형시킨 support 검출과 가중치 기법을 이용한 L1-최소화 방법을 통하여 스파스 (sparse) 신호의 복원 성능을 향상시키는 알고리즘을 제안하고자 한다.

Abstract

Recent work in compressed sensing theory shows that $M \times N$ independent and identically distributed sensing matrix whose entries are drawn independently from certain probability distributions guarantee exact recovery of a sparse signal with high probability even if $M \ll N$. In particular, it is well understood that the L1-minimization algorithm is able to recover sparse signals from incomplete measurements. In this paper, we propose a novel sparse signal reconstruction method that is based on the reweighted L1-minimization via support detection.

Keywords : compressed sensing (CS), L1-minimization, orthogonal matching pursuit (OMP)

I. 서론

현재 사용되고 있는 대부분의 디지털 장치는 아날로그 신호를 획득하는데 있어 나이퀴스트 샘플링 (Nyquist Sampling) 이론에 기반한 방식을 사용하고 있다. 나이퀴스트 샘플링 이론에 의하면 원 신호를 완벽하게 복원하기 위해서는 아날로그 신호 주파수 대역폭

의 두 배 이상의 주파수로 샘플링을 해야 한다. 나이퀴스트 샘플링 이론은 명쾌하고 간단하지만, 신호를 완전 무결하게 복원하기 위한 필요충분조건이 아닌, 단순한 충분조건이기에 신호의 특성이 고려되지 않는 단점이 있다. 근래 3차원 영상이나 MRI 등의 바이오 신호 등의 예에서 볼 수 있듯이 샘플링 해야 하는 데이터의 양이 방대해짐에 따라 이 이론의 효율성에 대한 근본적인 의문이 꾸준히 제기되어 왔다.

Candes, Donoho 등이 제안한 압축 센싱 기술은 기존의 샘플링 방법보다 적은 수의 측정값으로 신호를 표현할 수 있으며 획득한 측정값으로부터 본래 아날로그 신호를 완벽하게 복원하거나 작은 오차를 가지고 복원할 수 있다는 점에서 큰 주목을 받고 있다.^[2, 7, 13, 18]

일반적으로 많은 데이터를 획득하기 위한 시스템에서 측정값과 본래 신호 사이의 관계는 다음과 같이 표현된다.

* 학생회원, ** 정회원, 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과

(School of Information and Communication, Korea University)

※ 이 논문은 2010년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 연구임(grant no. 2010-0012525). 또한 이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2009-0083945).

접수일자: 2010년10월6일, 수정완료일: 2011년1월31일

$$y = \Phi x \tag{1}$$

상기 식 (1)에서 x 는 원 신호, Φ 는 측정 행렬 (sensing matrix) 그리고 y 는 측정 벡터이다. 압축 센싱 기술에서 주요 관심사는 다음과 같이 정의된 내적을 통해 획득한 측정 벡터 $y \in R^M$ 로부터 원 신호 $x \in R^N$ 를 복원하는데 있다.

$$y_j = \langle x, \phi_j \rangle, j = 1, 2, 3, \dots, M \tag{2}$$

상기 식 (2)에서 ϕ_j 는 측정 행렬 Φ 의 열 (column) 성분을 나타내며 측정 벡터의 크기는 원 신호 벡터보다 상당히 작다 ($M \ll N$). M 의 크기가 N 보다 작을 경우 측정 벡터와 원 신호 x 의 관계를 표현하는 식인 $y = \Phi x$ 는 과소 결정된 (underdetermined) 방정식이 된다. 이 경우 주어진 측정 벡터 y 에 대해 하나 이상의 해 x 가 존재하기에 일반적으로 측정 벡터 y 로부터 원 신호 x 를 완벽하게 복원할 수 없다. 그러나 원 신호 x 가 스파스한 (sparse signal) 특징을 가지고 있다면 다음과 같은 L_0 -최소화 기법을 사용하여 원 신호를 완벽하게 복원할 수 있다.^[22]

$$\min \|x\|_0 \quad \text{subject to} \quad \Phi x = y \tag{3}$$

여기서 원 신호 $x \in R^N$ 벡터가 K 개의 영 아닌 값과 $(N-K)$ 개의 영인 값으로 구성될 때, x 는 K -스파스 벡터라고 한다.

L_0 -norm ($\|x\|_0 = \sum_i 1_{\{x_i \neq 0\}}$)을 최소화하는 문제는 non-convex 이고 조합식의 형태로 표현되기 (combinatorial) 때문에 N 이 작은 경우를 제외하고는 현실적으로 해를 얻어내기 쉽지않다.^[23] 이를 해결하기 위하여 L_0 -norm을 L_1 -norm으로 치환하는 L_1 -최소화 방법이 제안되었으며 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.^[3]

$$\min \|x\|_1 \quad \text{subject to} \quad \Phi x = y \tag{4}$$

L_1 -norm ($\|x\|_1 = \sum |x_i|$)은 볼록 함수 (convex function)이기 때문에 최적화 문제의 해를 비교적 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다. 하지만 영 아닌 원소의 개수를 나타내는 L_0 -norm의 관점에서 해석할 때 L_1 -norm은 영 아닌 원소에 대해 절대값에 비례하는 가중치를 부여하기 때문에 복원시 성능 열화가 발생하는 단점이 있다.^[2]

본 논문에서는 영 아닌 원소의 인덱스 집합 (이하 support로 표현) 검출을 통하여 사전에 절대값의 크기가 큰 원소에 작은 가중치를 주어 L_0 -최소화 알고리즘과 유사한 복원 성능을 얻을 수 있는 알고리즘 (이하 reweighted L_1 -최소화)을 제안한다. 또한 절대값의 크기가 클 것으로 예상되는 원소 위치를 추정하기 위하여 개선된 orthogonal matching pursuit (OMP) 알고리즘을 이용한다. 구체적으로는 support 검출 성능을 높이기 위하여 사전에 측정 벡터 y 와 상관성이 높은 열들을 최소 제곱 문제 (least squares problem) 단계에 활용한다. 컴퓨터 모의실험을 통하여 제안하는 기법의 복원 성능이 기존에 알려진 스파스 신호 복원 기법에 비해 최소 제곱 오차 (mean square error : MSE) 관점에서 우수한 성능을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

II. 본 론

1. reweighted L_1 -최소화 알고리즘

원 벡터 x 에서 절대값이 큰 원소에 대하여 L_0 -norm과 L_1 -norm간의 차이를 보정하기 위하여 제안된 reweighted L_1 -최소화 알고리즘은 다음과 같이 표현된다.^[12]

$$\min \sum_{i=1}^N \log(|x_i| + \epsilon) \quad \text{subject to} \quad \Phi x = y \tag{5}$$

식 (3)에 주어진 목적함수 ($\|x\|_1 = \sum |x_i|$)와 비교할 때, reweighted L_1 -최소화 알고리즘의 log-sum 함수는 절대값이 큰 원소들에 대해서 상대적으로 작은 가중치를 주게 된다. 식 (5)에 나타난 최적화 문제는 경계 최적화 (bound optimization) 방법 중 하나인 majorization-minimization (MM) 방식을 사용하여 얻을 수 있다.^[12]

$$x^{(s+1)} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^N \frac{|x_i|}{|x_i^{(s)}| + \epsilon} \tag{6}$$

상기 식 (6)에서 $x_i^{(s)}$ 는 벡터 $x^{(s)}$ 의 i 번째 원소를 말한다. 식 (6)에 나타난 바와 같이 반복적인 과정을 통해 식 (5)의 해 x 를 구할 수 있다. 즉, 일련의 reweighted L_1 -최소화 문제를 통하여 원 최적화 문제의 해를 구하게 된다. 식 (6)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\min \sum_{i=1}^N w_i |x_i| \text{ subject to } \Phi x = y \quad (7)$$

식 (7)에서 현재 반복 중에 있는 가중치 w_i 는 이전 과정의 가중치 ($w_i = \frac{1}{|x_i^{(s)}| + \epsilon}$)로부터 결정된다.

2. Support 검출을 통한 반복적인 reweighted L1-최소화 알고리즘

제안하는 기법의 특징은 reweighted L1-최소화 알고리즘에서 초기 가중치를 주어 스파스한 신호의 복원 성능을 향상 시킨다는 점이다. 기존 방식은 반복 과정이 시작될 때 모든 원소에 대해 동일한 초기치 ($w_i = 1$)를 할당하는데 비해 제안하는 알고리즘은 support 검출을 통해 의미있는 초기 가중치를 할당한다.

그림 1.(a)에서 볼 수 있듯이 L1-최소화 알고리즘의 경우 원 신호 x_0 에 대하여 $\|x\|_1 < \|x_0\|_1$ 을 만족하는 해 x 가 존재한다. 이때 이 x 값이 원 신호 x_0 가 아님은 자명하다. 반면에 그림 1.(b)의 경우 non-support 방향으로 비교적 큰 가중치가 주어지기 때문에 $\|Wx\|_1 < \|Wx_0\|_1$ 을 만족하는 어떠한 x 도 존재하지 않음을 알 수 있다. 즉, x_0 만이 유일한 해가 된다. 이러한 점에 착안하여 제안하는 기법에서는 기존의 reweighted L1-최소화 알고리즘에서 support 검출된

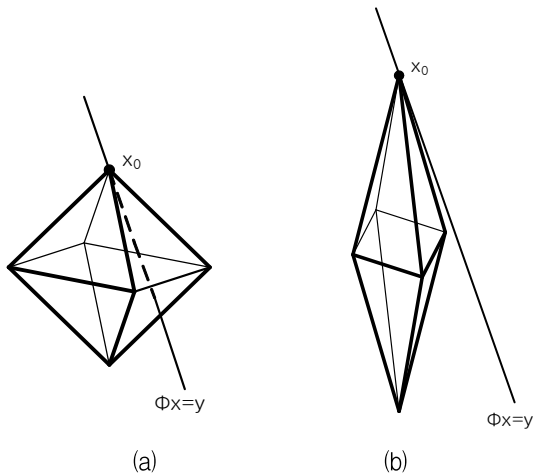


그림 1. 원 신호 x_0 에 대하여 (a) (unweighted) L1-ball 및 (b) weighted L1-ball의 모식도

Fig. 1. Illustration of the (a) unweighted ball and (b) weighted L1-ball. Note that x_0 is the true solution and the line $\Phi x = y$ corresponds to the feasible set.

표 1. 변형된 Orthogonal Matching Pursuit Table 1. Modified Orthogonal Matching Pursuit.

Input :	Φ, y, K
Output :	Support set T
Option :	Maximum allowed sparsity K
Step 1 :	Set the iteration count s to zero, $r_0 = y$, and $T_0 = \emptyset$.
Step 2 :	Find the set $C \subset \{1, 2, \dots, n\}$ containing the index of $\lceil (1 - \alpha)K \rceil$ largest absolute value
Step 3 :	Set $s = s + 1$ and find index set $t^{(s)} = \text{argmax}_{j=1, \dots, n} \langle r^{(s-1)}, \phi_j \rangle $
Step 4 :	Augment $T^{(s)} = T^{(s-1)} \cup \{t^{(s)}\}$ and the matrix $\widetilde{\Phi}^{(s)} = [\Phi^{(s-1)} \phi_{t^{(s)}}]$
Step 5 :	Solve a least squares problem $x^{(s)} = \text{argmin}_x \ \widetilde{\Phi}^{(s)} x - y\ _2$.
Step 6 :	Compute the new residual $r^{(s)} = y - \Phi^{(s)} x^{(s)}$. $\Phi^{(s)} = [\Phi^{(s-1)} \phi_{t^{(s)}}]$
Step 7 :	If $s = K$ or $\ r^{(s)}\ _2 \leq \epsilon$, go Step 8. else go to Step 3. end.
Step 8 :	Set $T = T^{(s)}$

원소 위치에 작은 초기 가중치를, support가 아닌 원소 위치에 큰 값의 초기 가중치를 할당하는 방법을 제안한다. 두말 할 나위없이 본 방식의 효과를 보장하기 위해서는 정확한 support 정보가 필수적이다. 본 연구에서는 support 검출의 정확도를 높이기 위하여 현재 추정되는 support와 사전에 선택된 상관성이 높은 열(column)의 위치를 함께 이용하는 방식으로 OMP를 변형하였다.

가. modified OMP를 통한 support 검출

support 검출은 측정 벡터 y 로부터 복원하려는 원 신호 벡터 x 의 원소 중에서 영 아닌 값의 위치를 찾는 것을 말한다. 언급한대로 측정 벡터 y 와 원 신호 벡터 x 간의 관계는 $y = \Phi x$ 으로 주어지는데, 가정에 의해 신호 $x \in R^N$ 이 K -스파스 벡터이기 때문에 벡터 Φx 는 Φ 의 K 개 열에 의해 span하는 공간에 속하게 된다. 부분집합 $J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ 가 주어졌을 때, P_{J_y} 를 측정 벡터 y 의 $\{\phi_j | j \in J\}$ 에 의해 span 되는 공간으로의 직교 정사영이라고 하자. 이 경우 support 검출을 위한 최적화 문제는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$I = \operatorname{argmax}_{J: |J|=k} \|P_{Jy}\|^2 \quad (8)$$

상기 식 (8)에서 $|J|$ 는 J 의 cardinality를 의미한다. I 는 측정 벡터 y 를 정사영 했을 때 측정 행렬 Φ 의 열 중에서 가장 큰 에너지를 포함하는 K 개의 인덱스 집합을 말한다. 식 (8)을 직접 사용하여 최적의 support 집합을 찾는 경우 N 의 크기에 따라 최적의 I 를 찾기 위한 후보의 수가 지수적으로 증가하는 단점이 존재한다.

이러한 단점을 극복하기 위해 반복적인 greedy 알고리즘이 제안되었다. 이에 OMP^[14], regularized OMP (ROMP)^[15], 그리고 stagewise OMP (StOMP)^[16] 등이 있다. 이 기법들은 매 반복 과정마다 규칙화된 (regularized) 벡터 r 과 측정 행렬 Φ 의 열과의 상관성을 시험하여 하나의 support를 선택하게 된다. 이러한 알고리즘들은 주어진 반복회수가 끝날 때 또는 벡터 r 의 L_2 -norm 값이 특정 기준 보다 작을 때 종료되게 된다.

본 연구에서는 support 검출 성능을 높이기 위하여 사전 인덱스 정보를 이용하도록 OMP 알고리즘을 변형한다. 표 1의 Step 5에 나타나는 최소 제곱 (least squares) 문제를 풀기 위해서 측정 행렬 Φ 중에 사전 인덱스 정보와 반복 과정에서 새롭게 선택된 support에 해당하는 열을 함께 사용하며, 다음의 최소 제곱 문제를 통하여 신호를 추정할 수 있다.

$$\widehat{x}^{(s)} = \operatorname{argmin}_x \|\widehat{\Phi}^{(s)}x - y\|_2 \quad (9)$$

상기 식 (9)에서 $\widehat{\Phi}^{(s)} = [\Phi^{(s-1)} \phi_{C \cup t^{(s)}}]$ 는 반복 과정을 통해서 새롭게 선택된 열 $\phi_{t^{(s)}}$ 와 인덱스 집합 C 에 해당하는 열들을 결합하여 만들어지며, 여기서 열 $\phi_{t^{(s)}}$ 는 아래와 같이 측정 행렬의 열 중에서 벡터 r 과 상관성이 가장 높은 인덱스에 해당하는 열이다.

$$t^{(s)} = \operatorname{argmax}_{j=1, \dots, n} |\langle r^{(s-1)}, \phi_j \rangle| \quad (10)$$

s 와 n 은 반복 과정 회수와 측정 행렬 열의 개수이며, 표 1에서 볼 수 있듯이 상기 식 (10)에서 r 은 측정 벡터 y 로부터 추정된 벡터 x 의 영향 (contribution)을 제거한 벡터이다 (표 1의 Step 6 참조). 또한, 집합 C 는 다음과 같이 정의된다.

$$C = \{i | \tau \leq |u_i|, u = \Phi^T y\} \quad (11)$$

상기 식 (11)에서 τ 는 벡터 u 원소들의 절대값 중 상위 $\lceil (1-\alpha)k \rceil$ 번째 값을 말한다. α 를 통해서 임계치 (threshold)를 조절할 수 있고 측정 벡터 y 와 상관성이 높은 열들을 높은 확률로 포함시킬 수 있다.

나. success probability 분석

복원 하고자 하는 원 신호 x 의 원소 중 영 아닌 값의 개수가 K 이고 나머지 $(N-K)$ 개의 값이 영이라고 가정하자. 이 경우 측정 벡터 y 는 Φ 의 K 개의 열들의 선형 조합으로 표현 될 수 있다. 측정 행렬 Φ 를 K 개의 열로 이뤄진 Φ_{su} 와 $(N-K)$ 개의 열들로 이뤄진 Ψ 로 나뉘었을 때 greedy selection ratio를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\rho(r) = \frac{\|\Psi^T r\|_\infty}{\|\Phi_{su}^T r\|_\infty} \quad (12)$$

OMP 알고리즘은 $\rho(r) < 1$ 일 경우 Φ_{su} 로부터 열들을 얻어낸다. 처음 반복 과정에서 OMP 알고리즘은 $\rho(r^0) < 1$ 일 경우 최적의 열을 선택하게 되고 이 경우 r^0 는 측정 벡터 y 이다.

결과적으로 OMP 알고리즘의 성공 (success)을 위해서는 매 반복 과정마다 1보다 작은 greedy selection ratio 값을 가져야 한다. 따라서 success event를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$M_{suc} = \{\max_t \rho(r^t) < 1\} \quad (13)$$

상기 식 (13)에서 $\{r^t\}$ 는 Φ_{su} 의 열이 span하는 공간에 속하는 K 개 벡터의 시퀀스이며 Ψ 와는 독립적이다. modified OMP에서 성공확률 (success probability)은 $P(M_{suc} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau)$ 로 표현될 수 있으며 여기서 $I = \{i | h_i > \alpha, h = \Phi^T y\}$ 이고 $\sigma_{\min}(\Phi_I)$ 는 Φ_I 의 가장 작은 singular value이다. 사건 $\{\sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau\}$ 이 발생했을 때 조건부 확률의 하계 (lower bound)는 다음의 과정을 통해 얻을 수 있다.

우선 각 인덱스 $t=0,1,\dots,K-1$ 에 대하여 greedy selection ratio를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\rho(r^t) = \frac{\max_\psi |\langle \Psi, r^t \rangle|}{\|\Phi_{su}^T r^t\|_\infty} \quad (14)$$

$\Phi_{su}^T r^t$ 는 길이 K 의 벡터이기 때문에

$\|\Phi_{su}^T r^t\|_\infty \geq \frac{\|\Phi_{su}^T r^t\|_2}{\sqrt{K}}$ 이며 식 (14)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho(r^t) \leq \frac{\sqrt{K} \max_\psi |\langle \Psi, r^t \rangle|}{\|\Phi_{su}^T r^t\|_2} \quad (15)$$

상기 식 (15)를 간단하게 표현하기 위해 벡터 u 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u^t = \frac{\tau r^t}{\|\Phi_I^T r^t\|_2} \quad (16)$$

상기 식 (15)와 (16)를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\rho(r^t) \leq \frac{\sqrt{K} \|\Phi_I^T r^t\|_2 \max_\psi |\langle \psi, u^t \rangle|}{\tau \|\Phi_{su}^T r^t\|_2} \quad (17)$$

또한, singular value property^[14]를 이용하여 상기 식 (17)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho(r^t) \leq \frac{\sqrt{K^3} \max_\psi |\langle \psi, u^t \rangle|}{10\tau} \quad (18)$$

상기 식 (18)을 이용하여 성공 확률의 하계 (lower bound)를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(M_{suc} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau) \\ \geq P(\max_t \max_\psi |\langle \psi, u^t \rangle| < \frac{10\tau}{\sqrt{K^3}} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau) \end{aligned} \quad (19)$$

Ψ 의 열들은 서로 독립적이기 때문에 상기 식 (19)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(M_{suc} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau) \\ \geq \prod_\psi P(\max_t |\langle \psi, u^t \rangle| < \frac{10\tau}{\sqrt{K^3}} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

마지막으로 joint correlation property^[14]를 이용하여 상기 식 (20)를 정리하면 성공 확률 (success probability)의 하계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(M_{suc} | \sigma_{\min}(\Phi_I) \geq \tau) \\ \geq (1 - 2Ke^{-100c\tau^2 M/K^3})^{N-K} \end{aligned} \quad (21)$$

c 는 Φ 의 요소가 Gaussian 분포를 따를 경우 1/4, Bernoulli 분포를 따를 경우 1/2이 된다^[14]. 결국 사전에

선택된 열들의 최소 singular value인 τ 값이 커질수록 높은 확률로 support가 검출됨을 알 수 있다.

III. 실험

본 연구에서 수행한 모든 시뮬레이션은 Microsoft Windows XP 기반의 PC (Intel Core 2 Duo CPU 2.3 GHz, RAM 3 GB)에서 수행되었으며, MATLAB 프로그램으로 구현되었다.

실험의 목적은 스파스 신호를 복원하기 위해 필요한 측정값의 개수를 제안된 알고리즘을 통해 줄일 수 있음을 보여주는 것이다. 본 실험에서는 제안하는 기법과 기존에 알려진 matching pursuit (MP), unweighted L1-최소화, OMP, LIMAGIC 알고리즘간의 성능을 비교하였다. 성능 척도로는 최소 제곱 오차를 사용하였으며, 성긴 정도 (sparsity)의 변화에 따라 성능을 확인해 보았다. 복원하려는 원 신호 x 의 크기는 256이고 K -스파스 벡터를 사용하였으며 K 개의 위치는 랜덤하게 선택하였다. $M=100$ 이고 독립 가우시안 분포인 $M \times N$ 측정 행렬 Φ 를 사용하였다. 제안된 알고리즘에 사용된 식 (6)의 ϵ 은 0.1, 식 (11)의 τ 를 구하기 위한 α 는 0.7을 사용하였다.

그림 2는 제안된 알고리즘의 성긴 정도에 따른 신호 복원 성능을 나타낸다. 제안된 알고리즘은 모의실험한 모든 구간에서 가장 우수한 MSE 성능을 보여주고 있

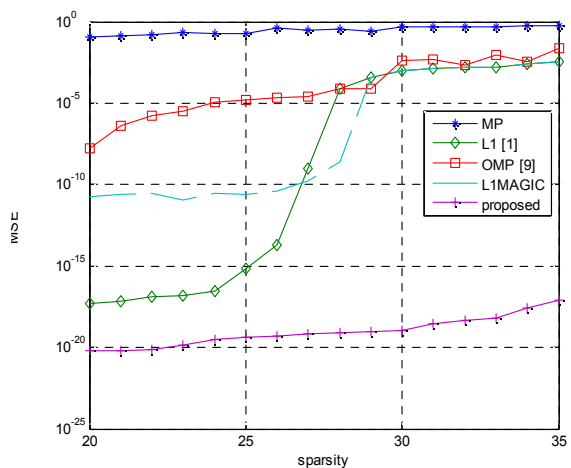


그림 2. MP, L1, OMP, LIMAGIC 그리고 제안하는 알고리즘의 스파스 정도에 따른 복원된 신호의 MSE

Fig. 2. Sparse signal recovery from M=100 random measurements of a length N=256 signal.

다. 특히 성간 정도가 증가할수록 성능 개선이 더욱 커지는 것을 파악할 수 있다.

IV. 결 론

압축 센싱 기술은 기존의 Nyquist-Shannon 이론을 기반으로 하는 샘플링 방법과 비교하여 더 적은 개수의 측정값으로 신호를 샘플, 저장 및 복원 할 수 있는 방식이다.

본 논문에서는 압축 센싱 기술을 통해 스파스 신호를 복원하는 reweighted L_1 -최소화 알고리즘을 제안하였다. 벡터의 L_0 -norm과 L_1 -norm은 원소의 절대값이 커질수록 차이가 커지며, 이 사실로부터 support에 해당하는 인덱스에 작은 가중치를 주는 방식인 reweighted L_1 -norm 통하여 L_0 -norm과의 차이를 줄일 수 있었다. 그리고 support 검출을 위해서 변형된 OMP를 제안하였는데 여기서는 상관도가 높은 열들을 최소 제곱 (least squares) 문제에서 사전에 이용함으로써 해당 열의 기여도를 정확하게 추정할 수 있었다.

모의실험을 통해서 matching pursuit (MP), unweighted L_1 -최소화, OMP, LIMAGIC 알고리즘과 성능 비교를 한 결과 실험한 대부분의 구간에서 우수한 MSE 성능을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] B. K. Natarajan, "Sparse approximate solutions to linear systems," *SIAM J. Comput.*, 24(2), pp. 227-234, 1995.
- [2] E. Candes and T. Tao, "Decoding by linear programming," *IEEE Trans. on Information Theory*, 51(12), pp. 4203-4215, Dec. 2005.
- [3] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(2), pp. 489-509, Feb. 2006.
- [4] E. Candes and T. Tao, "Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies," *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(12), pp. 5406-5425, Dec. 2006.
- [5] K. Lange, "Optimization," Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] E. Candes and J. Romberg, "Sparsity and incoherence in compressive sampling," *Inverse Problems*, 23(3), pp. 969-985, 2007.
- [7] D. L. Donoho and P. B. Stark, "Uncertainty principles and signal recovery," *SIAM J. Appl. Math.* 49, no. 3, pp. 906-931, 1989.
- [8] D. L. Donoho and B. F. Logan, "Signal recovery and the large sieve," *SIAM J. Appl. Math.* 52, no. 2, pp. 557-591, 1992.
- [9] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 58, no. 1, pp. 267-288, 1996.
- [10] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM J. Sci. Comput.* 1, pp. 33-61, 1998.
- [11] M. S. O'Brien, A. N. Sinclair, and S. M. Kramer, "Recovery of sparse spike time series by l_1 norm deconvolution," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 3353-3365, 1994.
- [12] E. J. Candes, M. B. Wakin, and S. Boyd, "Enhancing Sparsity by Reweighted L_1 -minimization," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14(5), pp. 877-905, Dec. 2008.
- [13] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, "A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices," 2008.
- [14] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," 2006.
- [15] D. Needell and R. Vershynin, "Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit," 2007.
- [16] D. L. Donoho, Y. Tsaig, and Jean-Luc Starck, "Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit," 2006.
- [17] W. Dai and O. Milenkovic, "Subspace Pursuit for Compressive Sensing: Closing the Gap Between Performance and Complexity," 2008.
- [18] W. Xu, M. A. Khajehnejad, A. S. Avestimehr, and B. Hassibi, "Breaking through the Thresholds: an Analysis for Iterative Reweighted l_1 -minimization via the Grassmann Angle Framework," ICASSP 2010.
- [19] A. K. Fletcher, S. Rangan, and V. K. Goyal, "Necessary and Sufficient conditions on Sparsity Pattern recovery," arXiv:0804.1839v1[cs.IT], Jan. 2009.
- [20] D. Malioutov, M. Cetin, and A. Willsky, "A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays," *IEEE Trans. Signal Process.*, 53(8), pp. 3010-3022, Aug.

2005.
 [21] D. Model and M. Zibulevsky, "Signal reconstruction in sensor arrays using sparse representations," *IEEE Trans. Signal Process.*, 86(3), pp. 624-638, Mar. 2006.
 [22] D. Baron, M. B. Wakin, M. F. Duarte, S. Sarvotham, and R. G. Baraniuk, "Distributed compressed sensing," 2005.
 [23] E. Candes, M. Rudelson, and T. Tao, "Error correction via linear programming," *IEEE Computer Society*, 2005.

— 저 자 소 개 —



이 혁(학생회원)
 2009년 고려대학교 전파통신 공학과 학사.
 2009년~현재 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 석사과정.
 <주관심분야 : Signal processing, Wireless communication>



심 병 효(정회원)
 1995년 서울대학교 제어계측 공학과 학사.
 1997년 서울대학교 제어계측 공학과 석사.
 2004년 University of Illinois at Urbana-Champaign Mathematics 석사.



권 석 범(학생회원)
 2007년 고려대학교 컴퓨터학과 학사.
 2010년 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 석사.
 2010년~현재 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 박사과정.
 <주관심분야 : Signal processing, Wireless communication>

2005년 University of Illinois at Urbana-Champaign Electrical and Computer Engineering 박사.
 2007년~현재 고려대학교 컴퓨터·전파통신공학과 조교수
 <주관심분야 : Information theory, Signal processing, Wireless communication>