

다공성 입자 매질에서 고주파 영역 음향 측정 자료와 Kramers–Krönig 관계식의 비교

Comparison of Kramers–Krönig Relation and High–Frequency Acoustic Measurements in Water–Saturated Glass Beads

양해상, 이근화, 성우제
(Haesang Yang, Keunhwa Lee, Woojae Seong)

서울대학교 공과대학 조선해양공학과
(접수일자: 2011년 5월 24일; 수정일자: 2011년 7월 20일; 채택일자: 2011년 9월 27일)

물리현상의 인과성에 대한 필요충분조건은 Kramers–Krönig (K–K) 관계식으로 표현된다. 음파에 대한 Kramers–Krönig 관계식은 음파의 위상속도 분산식과 감쇠계수 분산식 사이의 힐버트 변환 쌍으로 나타난다. 본 연구에서는 400 kHz–1.1 MHz의 고주파 영역에서 물이 찬 다공성 유리구슬 매질에서 측정된 p파 음속 및 감쇠계수를 Waters 등에 의해 얻어진 미분 형태의 Kramers–Krönig 관계식과 정량적으로 비교했다. 감쇠계수는 주파수의 거듭제곱형태를 따르며, 이때 실험값은 Kramers–Krönig 관계식과 비교적 정확히 일치한다.

핵심용어: Kramers–Krönig 관계식, 다공성 매질, p파 음속 및 감쇠계수, 유리 구슬 매질

투고분야: 수중음향 분야 (5.3)

The necessary and sufficient condition for causality of a physical system can be expressed as Kramers–Krönig (K–K) relation. K–K relation for acoustic wave is a Hilbert transforms pair between dispersion equations of phase speed and attenuation. In this study, we quantitatively compare the acoustic measurements in water–saturated glass beads for the frequency ranges from 400 kHz to 1.1 MHz with the predictions of differential form of K–K relation obtained by Waters *et al.* For media with attenuation obeying an arbitrary frequency power law, acoustic measurements show good agreements with the predictions of Kramers–Krönig relation.

Keywords: Kramers–Krönig relation, porous medium, p–wave sound speed and attenuation, water–saturated glass beads

ASK subject classification: Underwater Acoustics (5.3)

I. 서론

선형파동 (linear wave)이 만족하여야 할 선형적인 법칙으로서 인과성 (causality)이 있다 [1]. 파동이 전달되는 매질이 감쇠매질 (attenuating medium)일 때 인과성에 따라 파동은 항상 분산특성 (wave dispersion)을 보인다. 인과성을 만족시키기 위해 특정 주파수 영역에서의 감쇠 현상은 모든 주파수 영역의 파동의 위상속도에 영향을 주게 되며, 반대로 모든 주파수 영역에서의 위상속도는 특정 주파수 영역의 감쇠현상에 영향을 미치게 된다.

1920년대 Krönig와 Kramers는 이러한 인과성을 바탕

으로 전자기파 굴절률의 실수부와 허수부가 서로 Hilbert 변환식의 쌍을 이룬다는 것을 보였다 [2–3]. 이후 Kramers–Krönig 관계식은 파동의 전달을 다루는 전기공학이나 핵물리학, 양자역학 (Toll, 1956; Nussenneig, 1972) 등에 대부분 적용되었다 [1, 4]. 음파에 대한 Kramers–Krönig 관계식은 1950년대에 발표되었고, 감쇠현상과 분산현상에 대한 정확도 높은 실험이 가능해진 시기인 1960년대 이후에 실험적으로 증명되었다.

음향학적 Kramers–Krönig 관계식은 음향 매질의 복소 파수 (complex wave number)의 실수부와 허수부의 관계를 나타내는 것으로 물리적으로는 음파의 위상속도와 감쇠계수 사이의 관계를 표현한다. 이 때문에 Kramers–Krönig 관계식은 음파의 분산특성 및 실험결과의 인과성을 검증할 수 있는 근거로 사용할 수 있다. 그래서 많은

연구자들이 새로운 음향 실험결과의 합리성을 검증하기 위해 종종 Kramers-Krönig 관계식을 이용한다.

대표적으로 Wintle [5]은 Polymer의 음향 데이터의 인과성을 Kramers-Krönig 관계식으로 검증하였고, Alvarez 등 [6]은 온도와 습도를 고려한 공기의 분산특성의 변화를 Kramers-Krönig 관계식으로 정리하였다. Lee 등 [7]과 Szabo [8]는 비교적 넓은 주파수 대역에서 정확도 높은 실험을 통하여 Kramers-Krönig 관계식의 타당성을 검증하였고, 최근에는 Fellah 등 [9]이 다공성 물질에서의 Kramers-Krönig 관계식을 검증하는 연구를 발표했다.

음향학적 Kramers-Krönig 관계식은 표현 방식에 따라 크게 적분 관계식과 미분 관계식으로 구분할 수 있다 [10-12]. 적분 관계식은 Kramers-Krönig 식의 기본식으로서 특정 주파수에서 위상속도 (또는 감쇠계수)는 모든 영역의 주파수에 대한 감쇠계수 (또는 위상속도)의 적분식으로 표현된다. 하지만 전 영역에 대한 복소 파수의 분산식을 측정하는 것은 사실상 불가능한 일이기 때문에 기본 적분식을 사용하는 경우는 없으며 일반적으로 유한한 영역 (finite bandwidth)에 대한 Kramers-Krönig 식의 근사식이 사용된다 [10-11].

한편, 음파의 감쇠계수가 주파수의 거듭제곱 형태를 가지는 경우에는 Kramers-Krönig의 적분 식은 미분 식 형태로 표현할 수 있으며 해석적으로 계산 가능하다 [12]. 본 논문에서는 Waters 등 [12]에 의해 얻어진 미분 식 형태의 Kramers-Krönig 관계식을 이용해 이 등 [13]의 고주파 영역의 음향 측정 실험 결과를 검증했다. 2장에서는 Kramers-Krönig 관계식에 대해 기술을 하였고 3장은 음향 측정 실험 결과 소개 및 Kramers-Krönig 관계식과의 비교에 대한 내용을 담고 있다. 4장은 결론이다.

II. 음향학적 Kramers-Krönig 관계식의 리뷰

본 장에서는 음향학적 Kramers-Krönig 관계식의 두 가지 형태, 즉 적분형 및 미분형 관계식에 대해 간략하게 소개한다 [1].

2.1. 적분 관계식

음파의 복소 파수를 아래와 같이 정의한다.

$$\gamma(\omega) = \omega / c(\omega) + j\alpha(\omega) \tag{1}$$

여기서, $\alpha(\omega)$ 는 감쇠계수, $c(\omega)$ 는 음속, ω 는 각 주파수를 나타낸다.

이때, 음파에 대한 Kramers-Krönig 기본 관계식은 다음과 같이 적분식 쌍으로 표현된다.

$$\text{Re}[\gamma(\omega)] = \frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[\gamma(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{2}$$

$$\text{Im}[\gamma(\omega)] = \alpha(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[\gamma(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{3}$$

식 (2)-(3)에서 적분은 Cauchy 주치 (Cauchy principal value) 적분이다.

위의 적분식은 $\gamma(\omega) \sim \omega$ 이하로 발산하는 경우에 수학적으로 제곱적분가능 조건 (square integrable)을 만족한다. 그러나, $\gamma(\omega)$ 의 거동이 주파수의 1승을 초과하여 발산하는 경우에는 Titchmarsh 정리에 의해 위의 식은 성립하지 않으므로, 감산법 (subtraction method)를 이용하여 식 (2)-(3)이 제곱적분가능 조건을 만족하도록 재정의해야 한다 [1].

$\gamma(\omega) \sim \omega^n$ 의 거동으로 발산한다고 할 때, Kramers-Krönig 관계식의 핵함수 (kernel function)는 아래와 같이 감산법에 의해 재정의된 $\Lambda_n(\omega, \omega_0)$ 로 표현할 수 있다 [1, 6, 11].

$$\Lambda_n(\omega, \omega_0) = \frac{\gamma(\omega) - \gamma(\omega_0) - \frac{d}{d\omega}(\gamma(\omega))_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0) - \dots - \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}}(\gamma(\omega))_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0)^{n-1}}{(\omega - \omega_0)^n} \tag{4}$$

식 (4)의 $\Lambda_n(\omega, \omega_0)$ 는 수학적으로 복소 파수 함수를 McLaurin 전개를 했을 때의 잉여 (remainder)를 의미한다. $\gamma(\omega)$ 대신에 위의 함수를 이용하여 식 (2)-(3)과 동일하게 Kramers-Krönig 기본 관계식을 구하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\text{Re}[\Lambda_n(\omega, \omega_0)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[\Lambda_n(\omega', \omega_0)] - \text{Im}[\Lambda_n(\omega, \omega_0)]}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{5}$$

$$\text{Im}[\Lambda_n(\omega, \omega_0)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[\Lambda_n(\omega', \omega_0)] - \text{Re}[\Lambda_n(\omega, \omega_0)]}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{6}$$

위의 식에서 적분 식 분자의 2번째 항은 $\omega' = \omega$ 에서 핵함수가 일정한 크기를 갖도록 만들기 위해 임의로 더해준 상수 값이다 ($\because \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = 0$).

일반적으로 위의 식 (5)-(6)을 n차 감산의 Kramers-Krönig 관계식이라 칭한다 [1, 11].

위의 적분식을 실제 실험 결과에 적용하기 위해서는 한가지 난점을 해결해야 한다. 식 (5)-(6)에서 특정 주파

수의 위상속도나 감쇠계수를 계산하기 위해서는 전 영역에 걸친 해당 쌍의 값을 알아야 한다. 실제 모든 음향 실험이 유한한 주파수 영역의 펄스로 수행된다는 것을 고려하면 사실상 식 (5)-(6)을 측정결과에 적용하는 것은 불가능하다. 이 때문에 여러 연구자들은 유한한 주파수 영역에 관한 근사식을 제안했으며, 실제 측정 값과 비교를 할 때는 유한한 영역에 대한 적분 근사식을 이용한다 [10-11].

2.2. 미분 관계식

앞 절에서 기술 했듯이 Kramers-Krönig의 기본관계식은 핵함수가 제공적분가능 조건을 만족해야 한다. 하지만 핵함수가 균일한 수렴 조건을 만족하는 경우 식 (2)-(3)의 식의 제한 조건은 더 완화될 수 있다 [14]. 감쇠계수가 주파수의 거듭제곱으로 표현되는 경우도 이에 해당하며, 이때 인과성의 필요충분조건은 식 (2)-(3)의 제한조건보다 더 완화되어 아래와 같은 일반화 된 Hilbert 변환 (generalized Hilbert transform) 쌍으로 표현할 수 있다 [12].

$$\frac{\text{Re}[\gamma(\omega)]}{(j\omega)^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \text{Im}[\gamma(\omega')]}{(j\omega')^n} \frac{d\omega'}{\omega^2 - \omega'^2} \quad (7)$$

$$\frac{\text{Im}[\gamma(\omega)]}{(j\omega)^n} = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[\gamma(\omega')]}{(j\omega')^n} \frac{d\omega'}{\omega^2 - \omega'^2} \quad (8)$$

여기서 n은 짝수이며 일반화 된 Hilbert 변환이 수렴하도록 선택하면 된다.

위 식에서 (jω)ⁿ로 나뉜 γ(ω)의 실수 및 허수부 쌍이 ω → ω'에서 균일하게 수렴하는 (uniformly convergent) Taylor 전개로 표현 가능하다고 할 때, 식 (7)-(8)의 적분식은 해석적으로 계산가능하며 식 (7)-(8)은 아래와 같은 미분 형태로 정리할 수 있다 [12].

$$\text{Re}[\gamma(\omega)] = \omega^{n-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln \omega}\right) \frac{\text{Im}[\gamma(\omega)]}{\omega^{n-1}} \quad (9)$$

$$\text{Im}[\gamma(\omega)] = -\omega^n \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln \omega}\right) \frac{\text{Re}[\gamma(\omega)]}{\omega^n} \quad (10)$$

여기서 tan()는 탄젠트 미분 연산자이며, 위의 식 (9)-(10)을 Kramers-Krönig 관계식의 미분 형태라고 부른다.

n이 홀수인 경우에는 짝수인 경우와 똑같은 유도 과정을 거쳐서 최종적으로 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\text{Re}[\gamma(\omega)] = \omega^n \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln \omega}\right) \frac{\text{Im}[\gamma(\omega)]}{\omega^n} \quad (11)$$

$$\text{Im}[\gamma(\omega)] = -\omega^{n-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln \omega}\right) \frac{\text{Re}[\gamma(\omega)]}{\omega^{n-1}} \quad (12)$$

한편, Waters등 [12]은 감쇠계수가 주파수에 대해 α(ω) = α₀|ω^y + α₁로 표현된다고 가정할 때, n-1 < y < n+1이며 임의의 정수 n이 짝수인 경우에 미분형 관계식을 고려했다. 이 때, 식 (10)으로부터 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c(\omega_0)} = \alpha_0 \tan\left(\frac{\pi}{2} y\right) (\omega^{y-1} - \omega_0^{y-1}), \quad (n-1 < y < n+1, n \text{ even}) \quad (13)$$

여기서 ω₀는 식의 정리과정에 얻어지는 임의의 상수를 의미하며 물리적으로는 유한한 주파수대역을 갖는 음파의 하한 (lower) 주파수 경계 값으로 볼 수 있다.

식 (13)은 y가 홀수인 영역을 제외한 모든 영역에서 사용 가능하다. y가 홀수인 경우의 K-K식은 식 (11)과 (12)로부터 계산이 가능하다. 하지만, y ≈ n (여기서 n은 홀수)인 경우에는 해석적으로 K-K 관계식의 미분 형태를 계산하기 힘들기 때문에 Waters 등은 식 (11)로부터 근사적으로 아래와 같은 식을 얻었다.

$$\frac{1}{\omega^{n-1}c(\omega)} - \frac{1}{\omega_0^{n-1}c(\omega_0)} \approx -\frac{2}{\pi} \alpha_0 \ln \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|, \quad (y \approx n, n \text{ odd}) \quad (14)$$

식 (14)에서는 식 (11)의 tangent 미분 연산자의 1차항만을 고려했다는 점에 유의해야 한다.

이 등 [13]의 실험에서 계측된 감쇠계수의 분산 특성은 주파수의 거듭제곱 형태의 거동을 보인다. 그렇기 때문에 본 연구에서는 식 (13)과 (14)를 이용하는 것이 가능하다. 식 (13)-(14)의 미분 형태의 해석적인 식은 식 (5)-(6)의 적분 관계식을 직접 계산하는 것에 비해 수치계산 상의 이점이 있다. 그러나, 식 (13)-(14)는 감쇠계수가 α(ω) = α₀|ω^y + α₁ 형태일 때 유도된 식으로 공명 손실 (resonance loss)와 같은 특이한 거동의 감쇠 특성을 보이는 경우에는 사용할 수 없다.

III. 다공성 매질의 고주파 측정결과에 적용

이 절에서는 위 절까지 Waters 등 [12]에 의해 유도된 Kramers-Krönig관계식 (13)과 (14)에 의한 추정 값과 이 등 [13]의 실험에 의해 얻어진 실험값을 비교했다. 이 등

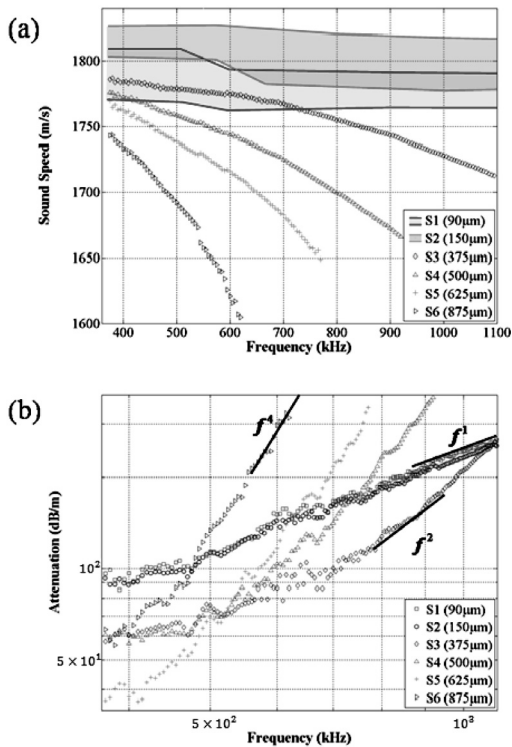


그림 1. 6가지 평균입자크기에 대한 측정 결과 [13]
 (a) p파 음속, (b) p파 감쇠계수
 Fig. 1. Acoustic measurements in six kinds of water-saturated glass beads (Ref. 13).
 (a) p-wave sound speed, (b) p-wave attenuation

의 실험은 물이 찬 여섯 종류의 유리 구슬 매질에서 매질의 p파 음속 및 감쇠계수를 측정하기 위해 계획되었다. 여섯 종류의 유리구슬의 평균입자크기는 최소 90 μm부터 최대 875 μm의 크기를 가지며 측정된 주파수 대역은 400 kHz와 1.1 MHz 사이이다.

여섯 종류의 유리 구슬의 평균입자크기에 따른 주파수 별 음속 및 감쇠계수의 측정 결과는 그림 1 [13]과 같다. 그림 1 (a)의 평균입자크기에 따른 주파수 별 음속 변화를 보면 미세한 유리 구슬로 이루어져 있는 S1, S2 매질에서는 분산현상이 거의 나타나지 않으며 매 실험 때마다 음속의 변동이 크게 나타났다. 이러한 음속 변동 현상은 다른 실험적 연구에서 일찍이 보고된 바 있다 [15]. 이러한 현상은 grain-packing 효과에서 오는 불확실성에 의한 오차라고 생각된다. 그러나, 비교적 굵은 알갱이로 이루어져 있는 S3, S4, S5, S6의 매질의 경우에는 확연히 음분산 (negative dispersion) 경향이 나타나는 것을 볼 수 있다. 또한 평균입자크기가 큰 매질일수록 음분산 경향이 강하게 나타나는 것을 알 수 있다. 그림 1 (b)는 평균입자크기에 따른 주파수 별 감쇠계수의 변화를 관찰할 수 있다. S1과 S2 매질의 경우에는 모든 실험 주파수 범위

표 1. 감쇠계수 실험 결과의 거듭제곱함수 형태 추세값
 Table 1. Regression analysis of attenuation measurements.

$$\alpha(f) = \alpha_0 |f|^y + \alpha_1$$

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
α_0	1.26×10^{-5}	1.31×10^{-5}	3.31×10^{-15}	6.45×10^{-26}	1.18×10^{-25}	2.28×10^{-25}
y	1.058	1.052	2.621	4.486	4.495	4.517
α_1	0	0	5.25	5.89	2.7	2.62

표 2. 감쇠계수가 거듭제곱함수의 형태를 가질 때 K-K 관계식 및 상수 값
 Table 2. Kramers-Krönig dispersion relation and constants for arbitrary frequency power law.

$$\frac{1}{c(f)} - \frac{1}{c(f_0)} = \alpha_0 \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right) (f^{y-1} - f_0^{y-1}), \quad (n-1 < y < n+1, n \text{ even})$$

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
f_0	8.70×10^5	8.95×10^5	5.45×10^5	4.60×10^5	4.45×10^5	5.20×10^5
$c(f_0)$	1.79×10^3	1.82×10^3	1.78×10^3	1.76×10^3	1.75×10^3	1.68×10^3

내에서 f^1 에 비례하는 경향을 보이는 것을 관찰할 수 있고, S3 매질의 경우에는 500 kHz 부근에서 f^1 에 비례하다가 800 kHz 부근에서는 f^2 에 비례하는 경향을 보이는 것을 확인할 수 있다. 그리고 S4, S5, S6 매질의 경우에는 f^4 에 비례하여 감쇠계수가 변화하는 것을 관찰할 수 있다. 따라서 그림 1 (b)에서 관찰한 바와 같이 이 등 [13]의 실험에서 나타난 고주파 감쇠계수는 주파수의 거듭제곱함수의 형태로 표현될 수 있음을 확인할 수 있다.

그림 1 (b)의 감쇠계수의 거동을 $\alpha(f) = \alpha_0 |f|^y + \alpha_1$ 형태로 회귀분석을 하면 표 1과 같은 결과를 얻는다. 표 1의 수치들로 나타낸 각 매질의 추세선과 감쇠계수 실험 결과의 비교는 그림 2와 같다. 감쇠계수 실험 결과와 거듭제곱함수 형태로 표현된 추세선이 일치하는 것을 확인할 수 있다.

표 1에서 얻어진 α_0 와 α_1 , y 의 값은 식 (13)-(14)의 Kramers-Krönig 관계식에 의해 음속을 추정하는데 사용했다. 여기서 감쇠계수 값의 단위는 Neper/m 이고 또한 y 의 값이 정수가 아니기 때문에 실제적으로는 식 (13)을 사용하게 되며 이때 얻어진 임의의 상수 f_0 , $c(f_0)$ 의 값은 표 2와 같이 정리하였다.

그림 3에서는 Kramers-Krönig 관계식에 의한 추정 값과 실험을 통해 측정한 음속 결과를 비교했다. 비교 결과를 보면 실험을 통해 얻은 음속 결과와 Kramers-Krönig 관계식으로부터 예측한 음속 결과가 전체적으로 일치한다는 것을 확인할 수 있다. 다만 평균입자크기가 다른 매질에 비해 미세한 S1과 S2 매질에 대해서는 실험오차가

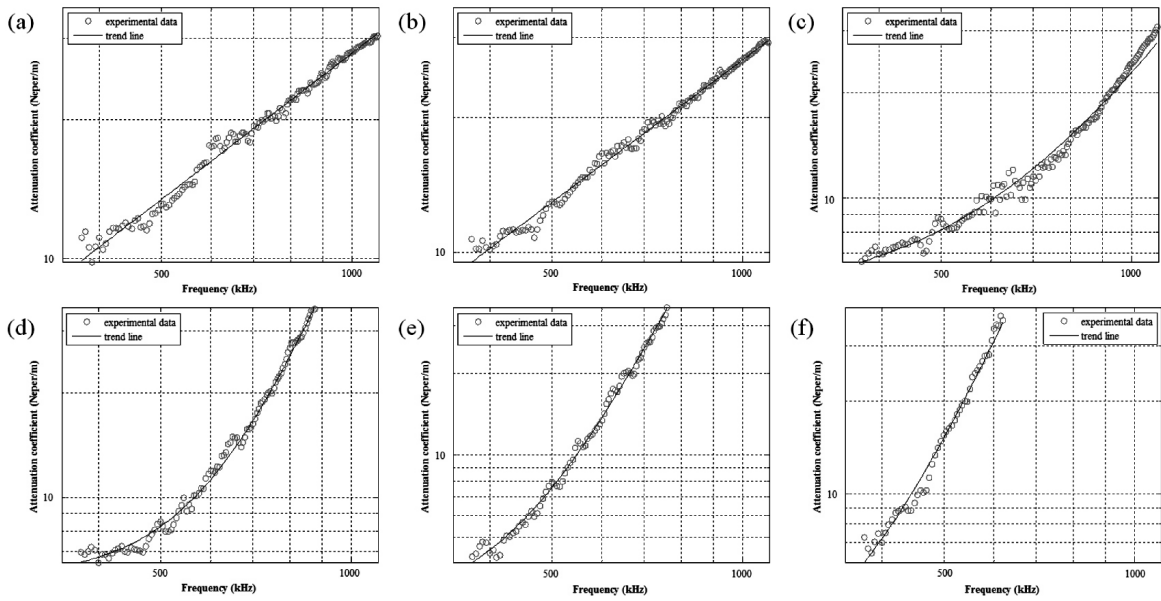


그림 2. 감쇠계수 실험 결과와 거듭제곱함수 추세선 비교
 (a) S1, (b) S2, (c) S3, (d) S4, (e) S5, (f) S6
 Fig. 2. Comparison of attenuation measurements and regression analysis.
 (a) S1, (b) S2, (c) S3, (d) S4, (e) S5, (f) S6

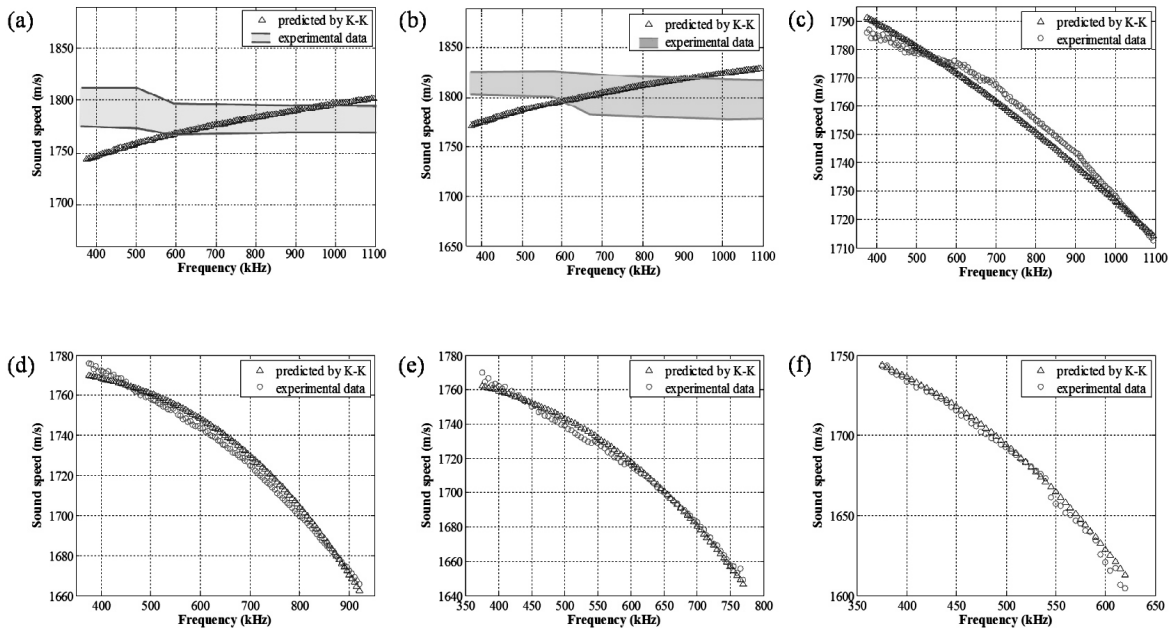


그림 3. 음속 실험 결과와 K-K 관계식으로부터 예측된 음속 결과 사이의 비교
 (a) S1, (b) S2, (c) S3, (d) S4, (e) S5, (f) S6
 Fig. 3. Comparison of sound speed measurements and predictions of K-K relation.
 (a) S1, (b) S2, (c) S3, (d) S4, (e) S5, (f) S6

크기 때문에 정량적인 비교를 하는데 어려움이 있다. 하지만 S3, S4, S5, S6매질에서는 감쇠계수 결과로부터 추정된 음속과 예측된 실험결과의 매우 유사한 경향을 보이는 것을 관찰할 수 있다. 각 매질마다 거의 모든 주파수 대역에서 최대 ± 8 m/s 차이를 가지는 안정적인 결과를

보였으며 다만 S6의 경우 높은 주파수에서 비교적 낮은 SNR로 인해 실험결과가 Kramers-Krönig 관계식에 의해 예측된 값보다 최대 오차범위보다 조금 크게 떨어지는 것을 알 수 있다. 이러한 비교 결과는 이 등 [13]의 실험결과가 선험적인 인과성을 만족하고 있음을 입증한다.

IV. 결론

본 논문에서는 음향학적 Kramers-Krönig 관계식에 대하여 리뷰하고 여섯 종류의 물이 찬 유리 구슬 매질에서 측정된 고주파 측정결과와 Kramers-Krönig 관계식의 추정 값을 비교했다.

측정된 다공성 매질에서의 음속 및 감쇠계수가 전반적으로 분산 특성을 보이고 또한 감쇠계수 데이터가 거듭제곱함수의 형태를 가진다는 사실에 착안하여 Waters 등에 의해 유도된 미분 형태의 Kramers-Krönig 관계식을 이용하여 해석적으로 음속 결과를 예측했다. 추정 값과 실험값이 비교적 정확히 일치하며, 이것은 Waters 등의 Kramers-Krönig 관계식의 타당성을 검증함과 동시에 이 등 [13]이 다공성 매질 실험을 통해 계측한 음속과 감쇠계수 측정결과는 물리적 인과성을 만족한다고 결론지을 수 있다.

참고 문헌

1. H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations*, Academic Press, New York, 1972.
2. R. de. L. Krönig, "On the theory of dispersion of x-rays," *J. Opt. Soc. Amer. Rev. Sci. Instrum.*, vol. 12, pp. 547-556, 1926.
3. H. A. Kramers, "Diffusion of light by atoms," *Atti Congr. Int. Fis. Como.*, vol. 2, pp. 547, 1927.
4. J. S. Toll, "Causality and the dispersion relation: Logical foundations," *Phys. Rev.*, vol. 104, pp. 1760-1770, 1956.
5. H. J. Wintle, "Kramers-Kronig analysis of polymer acoustic data," *J. Appl. Phys.*, vol. 85, no. 1, pp. 44-48, 1999.
6. F. J. Alvarez and R. Kuc, "Dispersion relation for air via Kramers-Kronig analysis," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 124, no. 2, pp. EL57-EL61, 2008.
7. C. C. Lee, M. Lahham, and B. G. Martin, "Experimental verification of the Kramers-Kronig relationship for acoustic waves," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.*, vol. 37, no. 4, pp. 286-294, 1990.
8. T. L. Szabo, "Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 97, no. 1, pp. 14-24, 1995.
9. Z. E. A. Fella, S. Berger, W. Lauriks, and C. Depollier, "Verification of Kramers-Kronig relationship in porous materials having a rigid frame," *J. Sound Vib.*, vol. 270, no. 4-5, pp. 865-885,

- 2004.
10. M. O'Donnell, E. T. Jaynes, and J. G. Miller, "General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 63, no. 3, pp. 696-701, 1981.
11. J. Mobley, K. R. Waters, M. S. Hughes, C. S. Hall, J. N. Marsh, G. H. Brandenburger, and J. G. Miller, "Kramers-Kronig relations applied to finite bandwidth data from suspensions of encapsulated microbubbles," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 108, no. 5, pp. 2091-2106, 2000.
12. K. R. Waters, M. S. Hughes, J. Mobley, and J. G. Miller, "Differential forms of the Kramers-Krönig dispersion relations," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.*, vol. 50, no. 1, pp. 68-76, 2003.
13. K. Lee, E. Park and W. Seong, "High frequency measurements of sound speed and attenuation in water-saturated glass-beads of varying size," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 126, no. 1, pp. EL28-EL33, 2009.
14. E. Pfaffelhuber, "Generalized impulse response and causality," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-18, no. 2, pp. 218-223, 1971.
15. R. D. Costley and A. Bedford, "An experimental study of acoustic waves in saturated glass beads," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, no. 6, pp. 2165-2174, 1988.

저자 약력

•양 해 상 (Haesang Yang)

2010년: 서울대학교 조선해양공학과 (학사)
 2010년 ~ 현재: 서울대학교 산업조선공학부 (석·박사 통합과정)
 ※ 주관심 분야: Sediment acoustics, Underwater acoustics

•이 근 화 (Keunhwa Lee)

2000년: 서울대학교 조선해양공학과 (학사)
 2005년: 서울대학교 조선해양공학과 (박사)
 2005년 ~ 2010년: 서울대학교 공과대학 연구원 및 연구교수
 2011년 ~ 현재: Marine Physical Laboratory, Scripps Institute Of Oceanography, University of California, San Diego, Visiting Assistant Researcher
 ※ 주관심 분야: Sediment acoustics, Target and diffuse scattering modeling, Ocean wave propagation modeling

•성 우 제 (Woojae Seong)

1982년: 서울대학교 조선공학과 (학사)
 1990년: M.I.T. 해양공학과 (박사)
 1991년: M.I.T. Post-doctoral Associate
 1992년 ~ 1996년: 인하대학교 선박해양공학과 조교수
 1996년 ~ 현재: 서울대학교 조선해양공학과 교수
 ※ 주관심 분야: Wave propagation modeling, MFI/MFP, UUV