한국초등수학교육학회지 15(3) 641-654.
2011. 12. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15(3) 641-654.
December 31. 2011.

귀납 추론을 통한 수학적 원리·법칙 지도 방안에 관한 고찰[1]

남승인[2]

수학교육의 목표 중의 하나인 합리적이고 창의적인 문제해결력을 기르기 위해서는 그 기저가 되는 수학적 개념 및 원리·법칙에 대한 올바른 이해가 뒷받침되어야 할 것이다. 수학과 교육과정에서 수학적 개념 및 원리·법칙의 교수 · 학습 방법으로는 주변의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이를 정당화하도록 권고하고 있다. 본고에서는 수학적 원리·법칙의 의미와 귀납적 추론 절차를 살펴보고, 교육과정에서 권고하는 원리·법칙지도를 위한 방안으로써 발견을 통한 지도와 발견전략으로써 귀납에 의한 지도 방법 및 지도상의 유의점을 살펴보았다.

[주제어] 원리, 법칙, 귀납추론, 발견학습

Ⅰ. 서 론

세련되고 설득력 있는 문장 표현이나 언어 구사력이 유창하려면 낱말의 의미와 쓰임을 올바르게 이해하고, 그 연결이 합리적으로 이루어져야 하듯이 수학적 문제 상황에서 합리적이고 창의적인 문제 해결력을 기르기 위해서는 개념 및 원리·법칙 등 수학적 지식에 대한 올바른 이해가 뒷받침되어야 할 것이다. 수학적 지식은 크게 개념적 지식과 절차적 지식의 두 가지의 형태로 나눌 수 있는데(Hiebert and Leferre, 1986), 절차적 지식은 다시 개념을 나타내는 표기에 대한 지식 및 수학의 형식적 언어나 기호체계로 이루어진 부분과 수학적 과제를 해결할 때 사용되는 원리·법칙이나 알고리즘으로 이루어진 부분으로 나눌 수 있다. 전자는 수학의 원리·법칙을 구성하는 형식화 과정이라면, 후자는 형식화된 틀(원리·법칙)을 적용하여 주어진 전제나 조건으로부터 모순 없는 결론을 이끌어내는 과정이라고 볼 수 있다. 특히 후자와 관련된 알고리즘적 절차는 수학적 과제를 신속·정확하게 수행할 수 있도록 해 주며, 학생들에게 더 중요한 과제에 집중할 수 있도록 해주기 때문(van de Walle, 2001)에 수학교육에서 매우 중요시하고 있다.

원리·법칙 등 절차적 지식은 수학적 과제를 순서에 따라 처리할 수 있는 능력이다. 이 때 각 순서 사이의 관계를 형성하면서(이해하면서) 절차를 수행하면 의미 있는 학습이 되는 것이고, 암기에 의하여 절차의 순서를 수행하면 기계적 학습이 되는 것이다. 결국, 절차적 지식의 학습은 교수방법에 따라 의미 있는 학습일 수도 있고 기계적인 학습이 될 수도

---

1) 본 논문은 2010년 대구교육대학교 학술지원연구비에 의하여 연구되었음.
2) 대구교육대학교 수학교육과

있다. 따라서 지식의 전이나 생성력 차원에서 볼 때, 절차적 지식을 지도할 경우 의미 있는 학습이 되도록 주의를 기울여야 할 것이다. NCTM(2000)에서도 수학적 원리·법칙의 학습은 이해[3)]가 반드시 필요하며, 모든 학생들이 이해를 통한 수학을 배울 것을 권고하고 있다. 또한 2009 개정교육과정의 수학학습 지도상의 유의할 사항으로 수학의 개념 및 원리·법칙의 교수・학습지도는 주변의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이를 정당화하도록 권고하고 있다. 그러나 교실 현장에서는 학생보다는 교사 중심의 설명식, 주입식 교육 방식, 암기 및 문제 풀이식 학습 등의 문제가 여전히 존재하고 있으며, 학생들 또한 선행학습 등을 통해 관계적 이해가 아닌 도구적 이해를 바탕으로 학습한 원리·법칙을 이용하여 문제의 답을 구하는 데 익숙해져 있는 것 같다. 이로 인해 학년을 진급할수록 학생들이 수학학습에 자신감을 가지기보다는 학습 불안과 기피현상 및 학력 부진이 증가하고 있는 실정이다. 개념과 절차가 관계적으로 학습될 때 정보의 소멸 가능성은 훨씬 줄어들며, 또 관계적으로 학습된 지식은 생성력과 활용력이 있다. 본고에서는 이해를 바탕으로 한 수학적 원리·법칙 지도 방안을 모색해 보기 위해 수학적 원리·법칙의 의미와 귀납적인 추론 절차에 대해서 살펴본다. 그리고 교수·학습 방법으로써 발견을 통한 지도와 발견 전략으로써 귀납을 통한 지도 및 지도상의 유의점을 살펴본다.

Ⅱ. 수학적 원리와 수학적 법칙

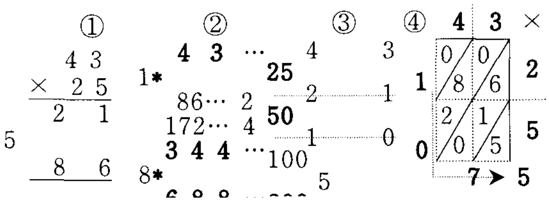
원리와 법칙은 비슷한 뜻으로 쓰이기도 하지만 사전적 의미로 원리란 '사물의 근본이 되는 이치', 또는 '기초가 되는 근거 또는 보편적인 진리'로, 그리고 법칙이란 '사실과 사실, 개념과 개념을 연결하는 규칙적인 관계', 또는 '모든 사물과 현상의 원인과 결과 사이에 내재하는 보편적·필연적인 불변의 관계'으로 서술하고 있다(국립국어연구원, 1999). 한편 수학적 원리(mathematical principle)란 '수학적 개념들 사이의 관계를 명제의 형태로 표현한 관념, 또는 문제를 해결하는 모순이 없는 이치(남승인 외, 2009)'를 말한다. 수학적 원리는 '삼각형의 내각의 합은 180°이다.'처럼 수학적 개념 사이의 관계를 명제의 형태로 표현한 것이 있는가 하면, '자릿수가 같은 수의 크기를 비교할 경우 자릿값이 높은 자리부터 낮은 자리의 차례로 비교한다.'처럼 문제를 해결하는 과정에서 논리적 모순이 없는 이치를 나타내는 원리도 있다. 한편 수학적 법칙(mathematical low)이란 '수학적 개념이나 사실 사이를 연결하는 보편적·필연적으로 불변인 관계를 명제의 형태로 표현한 관념이다. 수학학습에서 법칙은 교환법칙이나 결합법칙 등 경험적 관찰을 토대로 한 기술적(記述的) 법칙과 사인법칙이나 상호법칙(low of reciprocity)등 과학적 사고를 토대로 형성된 이론적(理論的)법칙이 있다. 초·중학교 학습에서 주로 취급하는 기술적 법칙은 수학적 원리와 마찬가지로 과학적인 탐구과정과 발견학습, 그리고 넓은 의미의 문제해결[4)]을 통하여 학습

3) 스켐프는 수학학습에서 이해를 관계적 이해와 도구적 이해로 나누고, 관계적 이해를 지적 학습에, 도구적 이해를 습관적 학습에 대응되는 용어로 규정하고 있다. 그가 말하는 도구적 이해란 어떤 규칙(공식 등)이 어떻게 만들어지고, 어디에 어떻게 작용하는지 모르면서 암기한 규칙을 문제해결에 적용하여 답을 구하는 상태를 말한다. 따라서 도구적 이해는 '어떻게 해야할 지'를 알고 있지만 '왜 그렇게 되는지'를 알지는 못하는 경우이다. 그리고 관계적 이해는 보다 일반적인 관계로부터 특별한 규칙 또는 절차를 이끌어내는 능력, 즉 어떤 규칙(공식 등)이 어떻게 만들어지고, 어디에 어떻게 작용하는지 알고, 이를 문제해결에 적용하여 답을 구하는 상태를 말한다(van de Walle. 2001)

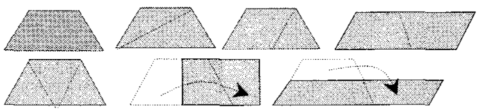
되어진다. 반면 이론적 법칙은 논리·연역적인 사고과정을 통하여 형성되며, 다른 명제나 법칙들과 상호 연관을 맺고 있어서 현상에 대해 보다 심도(深度)있고 수준 높은 설명력을 갖는다(서울대학교 교육연구소, 1998).

수학적 원리와 법칙의 공통점은 수학의 학문적 특성인 형식성의 산물로써, 어떤 대상에 대해 공통적인 요소를 추출하여 추상화의 방법을 통해 일정한 규칙성을 갖고 있으며, 보편성과 일반성을 지니면서도 문제를 신속·정확하게 해결할 수 있는 역할을 한다. 형식성의 산물인 수학적 원리·법칙은 형식에 얽매임으로 해서 융통성이나 실질성이 없으며, 기계적·공식적이라는 말을 듣기도 하지만 패턴의 과학(National Research Council. 1990)이라 불리는 수학 학습에서 원리, 법칙을 찾고 만드는 것은 수학적 활동의 본질이며 수학 교육의 핵심적인 목표이다. 즉 지금까지 형식화되어 있지 않은 수학의 여러 분야 및 기타 여러 학문 분야에서 활용할 수 있는 일반화된 틀(원리·법칙 등)을 만드는 것은 수학적 구조를 형식화시키는 것이다(남승인 외, 2009).

한편 수학적 원리와 법칙을 구별한다면 명제의 불변성의 여부와 관련이 깊다. 원리는 방법적·과정적인 측면에 초점을 둔 것으로, 절차상의 모순이 없다면 [그림 1]의 곱셈 원리나 [그림 2]처럼 사다리꼴 넓이를 두 삼각형 넓이의 합으로 구하거나 평행사변형과 삼각형 넓이의 합 등으로 구하는 것처럼 여러 가지가 있을 수 있다. 그러나 법칙은 결과적인 측면에 초점을 둔 합의된 명제로써 유일성과 불변성을 가진다.



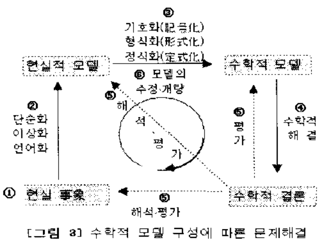
[그림 1] 곱셈의 원리



[그림 2] 사다리꼴의 넓이 구하기

일반적으로 원리·법칙을 이해한다는 것은 실제 경험하지 못한 여러 상황에서 적용하는 능력과 관계된다. 그러므로 학습자가 원리·법칙을 제대로 학습하였는지의 여부는 단순한 질의와 응답을 통해서 이루어지는 것이 아니라 관계적 이해의 관점에서 학습자가 원리·법칙이 형성되는 과정을 이치에 맞게 설명하고, 유사한 상황이나 적용 가능한 문제

4) 넓의 의미의 문제해결이란 어떤 현실적 상태에서의 문제를 수학적으로 해결하는 것으로, Kerr & Maki는 오른쪽 [그림 3]처럼 수학적 모델 구성에 따른 문제해결 과정을 다음 6단계를 제시하고 있다. ① 현실 문제를 파악하는 단계, ② 현실적 모델을 만드는 단계, ③ 수학적 모델을 만드는 단계, ④ 결과를 얻는 단계, ⑤ 얻어진 결과를 현실 세계에 비추어 검토하는 단계, ⑥ 모델을 수정하고 개량하는 단계(石田淳一 外. 1986에서 재인용)



[그림 3] 수학적 모델 구성에 따른 문제해결

상황에서 자유롭게 활용할 수 있는지를 보고 판단할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 수학학습에서 귀납적 추론

폴리아에 의하면, '엄밀하게 제시된 수학은 체계적인 연역과학이지만 만드는 과정의 수학은 실험적인 귀납과학'이다(Polya. 1994). 수학 학습에서의 귀납은 '만드는 것으로서의 수학'으로 수학적 원리·법칙 그 자체는 특수한 예를 생각해 봄으로써 귀납적으로 발견되는 것이다. Gattegno(平林一榮, 1990에서 재인용)는 '수학자가 수학을 연구하는 태도나 생각 그 자체는 어느 시대에도 변하지 않으며, 수학자만이 갖는 고유한 것이 아니라 모든 사람이 실행 가능한 것이다.'라고 전제하고, 수학교육에서 추구하는 목표를 달성하려면 학생들에게 이러한 태도와 생각을 육성할 필요성을 권고하고 있다. 학습자에게 있어서 귀납적 접근은 주어진 특수한 많은 대상들을 생각해 봄으로써 그들 사이에서 유사성을 찾아내고 그들 속에 내재되어 있는 특성이나 일반적인 정리들을 생각해 볼 수 있고, 이러한 특성들의 존재나 정리들의 참에 대한 확신을 찾으려는 시도에 도달하기 위하여 또 다른 새로운 대상에 대해서 검증 과정을 거치는 것은 발견의 위대한 원동력이 되는 것이다. 만드는 것으로서의 수학은 원리·법칙 자체가 학습의 대상이며, 그 과정은 구성적이기 때문에 특수한 예를 생각해 봄으로써 귀납적으로 발견되는 것이다. 귀납적 추론의 단계는 다음과 같은 절차로 나타낼 수 있다(남승인, 1995, 2000).

제 1단계(관찰, 조작, 실험); 귀납의 가장 원초적인 기술은 주어진 대상에 대한 관찰과 조작 등 감각적 작용으로부터 시작된다. 여기서 말하는 관찰이란 '인식의 기초로서 적극적인 의도를 가지고 사물의 실태를 객관적으로 파악하기 위하여 주의 깊게 살펴보는 것'을 의미한다. 그리고 조작이란 '구체적 대상이 갖고 있는 속성을 찾아내기 위한 유목적적인 신체적 작용을 행하는 것'으로 눈에 보이는 행동으로 해석할 수 있다. 구체물의 집합에서 관찰, 실험, 조작 등을 통하여 각 구체물이 가지고 있는 여러 속성 중 이질적인 것을 제거해 나아가면 결국은 동질적인 속성만 남게 되는데 각 구체물이 가지고 있는 동질성을 이끌어 내는 추상화의 과정은 수학의 본질과 연결되는 것이다.

제 2단계(추측); 유사성을 바탕으로 추측을 구성하는 것이다. 귀납은 추리(推理)의 과정이라기보다는 추정(推定)의 과정이다. 귀납은 주어진 전제들로부터 결론을 뽑아냄으로써 귀납적 결론으로 비약한다(Rescher. 1980)고 볼 때, 관찰·조작과정에서 발생한 유사성에 근거하여 보다 확장된 대상에 대해서도 동일한 성질을 보장받기 위한 활동이다. 예컨대, '3, 5, 7, 11, ……은 홀수인 동시에 소수이며, 그들의 합은 항상 짝수이다.'라는 유사성에서 관찰자는 '다른 소수의 합도 짝수가 되겠는가?'하는 의문을 갖게 될 것이다. 그러면 홀수인 2개의 소수의 합이 짝수인 3+3=6임을 생각해 볼 것이고, 6이상의 수에 대해서도 생각해 볼 것이다. 즉, '3+5=8, 3+7=5+5=10, 5+7=12, 3+11=7+7=14, ……'과 같은 몇 개의 예를 통해 그는 '4보다 큰 임의의 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.'라는 일반적인 명제를 암시할 것이다. 이처럼 귀납적 방법에 의해서 추측이 구성되며, 발견된 추측은 귀납적 절차에서 매우 중요한 역할을 수행한다.

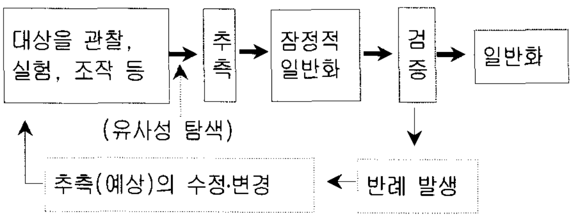
3단계(잠정적 일반화); 잠정적 일반화의 단계는 제 2단계에서 이루어진 추측을 근거로 하여 보다 확장된 일반적인 대상에 대해서 동일한 성질이 존재할 것이라는 신뢰성에 기초하고 있다. 예컨대 3, 5, 7, 11은 모두 소수이며, 8, 10, 12, 14는 모두 짝수이다. 따라서 '소

수+소수=짝수'라는 일반적 명제를 추론하는 것이다. 이와 같이 몇 개의 제한된 사례를 통해서 발견된 사실에 대해서 '모든 짝수는 2개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다.'는 명제를 이끈다는 확신을 갖기에는 그 신뢰성이 빈약하다. 다만 하나의 단순한 추측이며 잠정적인 것에 불과하다. 왜냐하면 이 명제는 증명이 되지 않았기 때문에 '항상 참'이라고 주장할 근거가 없는 '참'에 근접한 하나의 시도에 불과하다. 이와 같이 제한된 몇 개의 대상에 대해 관찰한 결과를 통해 참인 명제임을 암시하는 단계이다.

제 4단계(잠정적 일반화에 대한 검증); 귀납은 증명되지 않은 추측이기 때문에 검증이 이루어지기 전에는 너무 신뢰해서는 안 된다. 잠정적인 명제를 검증하기 위해서 또 다른 새로운 대상에 대하여 관찰하고 조사해 보아야 할 것이다. 위 단계에서 추측한 잠정적인 명제가 항상 참인지 검증해 보자. 예컨대, 짝수 60에 대해서도 '60=소수+소수'가 성립하는지 검증해본다. $60=3+x$에서 $x=57$인데 57은 소수가 아니므로 위 단계에서 추측한 잠정적인 명제인 '짝수=소수+소수'는 참이 아니다. 또 다른 소수를 이용하여 검증해 보면, $60=5+x$에서 $x=55$는 소수가 아니므로 역시 참이 아니지만, $60=7+x$에서 $x=53$는 소수이므로 이 경우는 참이다.

이와 같이 새로운 대상에 대해 관찰하고 조사한 내용이 '항상 참'이 아닐 경우 예상한 추측은 그 신뢰성이 급격히 감소하거나 진술 자체가 파기될 것이다. 이와 같이 잠정적인 명제에 대해서 그 명제를 논박하기 위해 어떤 특수한 대상의 집합이나 무작위로 어떤 특수한 대상에 대해 검증해 보는 것은 그 명제가 참일 수 있다는 인식과 어떤 방향에서 증명할 것인가를 찾기 위한 암시를 받을 수 있다. 제한된 대상에 대한 추측이 참임이 판명되었다고 해서 그 명제에 대한 결정적 결론에 도달한 것은 아니다. 다만, '짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.'는 진술에 대해 신뢰성을 높여 주거나 진술이 참이라는 결론에 대해 유망한 징후로 해석할 뿐이다. 여기서 어느 정도의 신뢰성을 가질 것이냐는 관찰자의 주관적 판단에 의존할 수 밖에 없다.

귀납의 제 5단계(일반화 단계); 앞 단계에서의 특수한 대상에 대한 점검에서 지지된 명제에 대해 보다 확장된 특수한 경우나 또는 극단적인 경우에서도 그 명제가 성립될 수 있는지를 확인해 봄으로써 그 명제에 대한 신뢰성을 한층 높일 수 있는 단계이다. 예컨대, $60=13+x \rightarrow x=47$. $60=17+x \rightarrow x=43$. $60=19+x \rightarrow x=41$. $60=23+x \rightarrow x=37$. $60=29+x \rightarrow x=31$, ……이다. 지금까지와 같은 방법으로 $6=3+3$. $8=3+5$. $10=3+7=5+5$. $12=5+7$. $14=3+11=7+7$. $16=3+13=5+11$. $18=5+13=7+11$. $20=3+17=7+13$. ……과 같이 다른 짝수에 대해서도 계통적으로 조사한 모든 경우가 참임이 확인되었다. 이와 같은 관찰과 조사의 대상이 많을수록 추측은 강화되고, 그의 신뢰성 및 진실성은 증가할 것이다. 그러나 그 대상이 아무리 많다 하여도 그 추측(귀납의 결과)에 대한 증명은 이루어지지 않는다. 앞에서 진술한 귀납적 추론 절차를 논리적 진술로 바꾸면 다음 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 귀납추론 절차

먼저 주어진 대상에 대하여 몇 가지 사례를 선택하여 관찰과 실험을 거쳐 조사한 내용을 바탕으로 대상들 사이의 유사성을 찾는다. 만일 이 과정에서 유사성이 발견되지 않으면 대상을 수정, 변경하든가 관찰 자체를 파기한다. 유사성이 발견되면 그를 근거로 하여 예언적 가설(추측)을 설정하고, 그것에 대한 또 다른 증거를 찾기 위해 관찰할 대상의 폭을 확장하여 또 다른 대상에 대해서 조사하고 관찰한다. 여기서 참이 성립되면, 그 사실을 '잠정적인 명제'로 설정하고 그것의 신뢰성을 점검하기 위해 좀 더 폭을 넓혀 또 다른 대상에 대해서 조사한다. 이 과정에서는 반례가 발생하면 그 명제는 파기되거나 수정되어야 하며, 참이 판명되는 경우 그 명제는 높은 신뢰성을 갖고 미래의 사실에 관한 새로운 지식의 원천으로 발전할 것이다.

Ⅳ. 원리·법칙 지도 방안

학생들이 진급할수록 수학을 어려워하거나 학습 불안을 느끼는 주된 원인 중의 하나는 수학 교수·학습 방법에 기인하는 것으로 알려져 있다(Baroody & Coslick. 1998). 즉 수학을 가르치고 배우는 방법에 큰 영향을 받는다. 성공적인 수학학습이 이루어지려면 공급자의 입장인 교사의 교수관과 수요자의 입장인 학생의 학습관이 동일해야 한다. 그러나 일반적으로 수학에 대한 인식에서 종종 교사와 학생들은 커다란 차이가 있다. 즉 교사의 입장(가르치는 쪽)에서 수학은 계통적인 연역과학(일반→특수, 설득의 논리)으로 인식하고 있는 반면, 학생의 입장(배우는 쪽)에서 수학은 실험적인 귀납과학(특수→일반, 발견의 논리)으로 인식하고 있다. 따라서 교사는 만들어진 수학을 주입식으로 가르치려고 할 것이 아니라 만들어진 수학을 학생들이 스스로 만들어 가면서 깨우치도록 해야 한다. 즉 학생 스스로 수학을 만들어가도록 귀납적인 탐구를 통하여 원리와 법칙을 발견할 수 있는 기회와 환경과 자료를 제공해야 한다. 강옥기(2003)는 수학적 원리와 법칙을 통틀어 수학적 일반성(generalization)이라 일컫고, 수학적 일반성 지도 방법으로 교사의 설명(exposition)에 의한 방법과 발견술(heuristics)에 의한 방법으로 나누고 있다. 본고에서는 교사의 활동보다 학생의 체험적 활동에 초점을 둔 발견을 통한 지도와 발견 전략[5]으로써 귀납에 의한 원리·법칙을 지도하는 방법에 대하여 살펴본다.

1. 발견을 통한 원리·법칙 학습

학습에서 '발견'이란 용어는 1951년 UICSM의 Beberman에 의해 처음 사용된 말로써, 그는 대수적 법칙과 가설·연역적 절차와 관계된 원리들의 이해시키는 교수법으로 발견적 방법을 활용할 것을 주장하였다(Pellerey, 1991). 발견학습은 학생에게 있어서는 알지 못하는 개념이나 원리·법칙 등을 학생 스스로의 활동을 통하여 발견하도록 하는 학습방법으로 수학교육 현대화 운동과 더불어 Bruner에 의해 그 중요성이 강조되었다. 그가 주장하는 발견학습법은 먼저 학생에게 학습 과제를 제시하고 이 과제에 대해서 가설을 설정한 다음 이 가설을 실제로 검증하는 과정을 취하며, 검증한 사실을 토대로 해서 새로운 개념

5) 발견 전략은 크게 귀납과 연역으로 나눌 수 있다. 귀납적 발견은 주어진 대상들이 갖고 있는 공통적인 속성으로부터 일반화를 꾀하는 방법이며, 연역적 발견은 이미 알고 있는 지식으로부터 논리적인 추론을 통하여 새로운 수학적 지식의 일반화를 꾀하는 방법이다.

이나 원리·법칙을 확립해 간다고 보는 입장이다. 발견적 방법은 이후 국부적으로 활용되기는 했지만 수학교육 현대화 운동이 실패하면서 의도적인 학습 지도에 활용되지 못함으로 해서 별다른 성과를 거두지 못했다. 이후 1970년대에 접어들어 프로이덴탈이 수학화 과정에서 전통적인 연역적 형태의 수학 수업에 대한 대안으로 제시한 '안내된 재발명'에 의한 방법을 주장하면서 수학교육자들의 관심을 끌기 시작하였다. 물론 발견학습은 학생들 스스로가 상당한 수준까지 교과 내용에서 요구하는 것을 학습하는 형태라면, 안내된 발견학습은 새로운 원리·법칙의 발견을 위해서 교사가 어느 정도의 지시와 학습의 방향을 제공하는 학습 형태로써 교사의 역할에서 다소 차이가 있다.

그리고 1980년 후반에 AERA(1986) 회의에서 Bropht와 Canfrey에 의해 처음으로 공식적으로 제기된 '학습은 인식 주체에 의해 능동적으로 구성되는 것이지 환경으로부터 수동적으로 받아 드려지는 것이 아니다(남승인, 1995).'는 학습의 능동성과 개별성을 강조하는 수학교육에서 구성주의의 기본 가정에 영향을 미쳤다고 할 수 있다. 물론 '수학적 지식은 발견되는 것이 아니라 학습자 스스로가 수학적 지식을 구성 또는 발명한다(高さわ茂樹,1991).'는 Kamii와 Glasersfeld 등 급진적 구성주의자들은 발견학습을 비판적으로 시각으로 보기도 하지만 발견학습(Discovery method)의 뜻을 분석해 보면 긍정적으로 생각할 여지가 충분하다. 발견(Dis-covery)이란 단어의 어원을 살펴보면, 주어진 문제의 답을 교사는 Cover(숨기고)하고 교사는 이 문제를 해결하는 단계에서 적절한 자료와 힌트를 제시해 주면 학생들이 숨겨진 답을 찾아 한 겹, 두 겹의 차례로 dis(벗겨가는)하는 학습지도 방법이라 생각할 수 있다(산수과 교재재교육편찬 위원회, 1974). 또 최근 수학교육에서 강조하는 창의성 신장과 자기주도적 학습은 종래와 같이 교과서 내용을 해설해 가는 교사중심의 설명식 수업이나 반복연습을 통한 기억중심의 기계적 학습의 대안으로써 수학학습에서 다시 관심을 기울일 필요가 있을 것이다. 그러나 초등학생들의 지적 배경과 발달 수준을 고려해 볼 때 학습할 내용의 발견을 전적으로 맡기는 발견학습보다는 교사가 질문, 설명, 제안 등으로 학생들을 도와주는 안내된 발견학습이 적절할 것이다. 이렇게 볼 때, 발견학습은 교수·학습 모델이라기보다는 오히려 일련의 교수-학습전략 또는 방법이라 할 수 있다(Bell, 1980). 수학적 원리·법칙의 발견을 위한 교수·학습 모형(남승인 외, 2009)은 학습 소재에 따라 활동 내용은 다양하게 진술될 수 있으나 일반적인 모형은 다음과 같다.

〈표 1〉 발견 학습 모형

단계	학 습 활 동
동기/ 선수학습 확인	• 동기유발 • 관련 개념 및 하위 원리·법칙의 이해도 확인
문제 발견	• 공부할 문제 확인하기 • 교과서 문제, 교사 자작 문제제시하기 • 학습 장면의 설정하기 • 학습 문제의 명확화
가설 설정	• 자기 나름대로 해결 방법을 구상하기 • 해결 방법에 따른 결과를 예상해 보기 • 결과의 예상에 대한 문제 해결 방향과 순서정하기(직관적 사고에 의함)
가설 검증	• 수립된 해결 계획에 따라 문제해결하기 • 예상된 결과와 비교하여 검토하기 • 해결 과정을 다시 살펴보기 • 원리·법칙을 이끌어 내기(귀납 및 논리적 추론)

일반화 및 적용	• 원리·법칙의 타당성 검토 • 발견한 원리·법칙 등을 말, 문자, 기호로 나타내기 • 원리·법칙을 다른 문제에 적용하기 • 원리·법칙을 기존 원리·법칙과 통합시키기 • 정착·숙련을 위한 연습 문제를 해결하기 • 발견된 결론을 유사 사태에 적용하고, 기지의 학습 내용에 포함하기
정리 및 평가	• 발견한 원리·법칙 및 사실을 정리하기 • 원리·법칙의 유용성 인식하기 • 형성평가 및 차시 예고

2. 발견학습 원리에 따른 지도에서 유의할 사항

발견학습이란 무엇을 학습하려고 할 때, 교사가 주도하지 않고 학생 스스로가 발견해 내도록 유도하는 학습의 형태이다. 발견학습은 먼저 학생에게 학습 과제를 제시하고 이 과제에 대해서 가설을 설정한 다음 이 가설을 실제로 검증하는 과정을 취하며, 검증한 사실을 토대로 해서 새로운 원리나 법칙을 확립해 간다고 보는 입장이다. 진정한 발견이란 아무렇게나 일어나는 것이 아니라 주어진 상황에 대한 규칙성과 관계를 찾으려고 하는 가운데 일어나며, 규칙성과 관계를 찾기 위해서 학생들은 전략을 고안해야 한다. 그러나 학생 스스로 전략을 고안하여 원리·법칙을 발견하는 것은 한계가 있다. 따라서 발견의 과정에서 교사의 의도된 발문과 질문, 시범이나 권고, 힌트 등 안내된 발견 전략이 필요하다. 성공적인 발견학습을 위해서는 다음 몇 가지 사항을 유의해야 할 것이다.

첫째, 발견은 잘 준비된 정신이 있어야 일어난다. 주어진 문제를 해결하기 위해서 학습자는 어떤 변인들이 서로 관련되어 있는지, 이들 변인에 대해 어떤 정보를 찾아야 하는지, 이들 정보를 사용해서 어떻게 해야 하는지 등을 결정해야만 한다. 이 일은 학습자의 사전 지식에 좌우되는데, 이러한 사전 지식을 갖추지 못한 학습자는 발견 학습 과정에서 좌절하거나 실패하기 쉽다.

둘째, 학습자가 발견을 할 수 있도록 도와주는 적절한 모델이 제공되어야 한다(平林一營, 石田忠男, 1981). 브루너에 따르면 발견은 우연히 일어나는 것이 아니라 체계적으로 문제나 과제에 접근할 때 일어날 가능성이 높다고 했다. 특히, 발견에 의한 수업은 어디에 이미 존재하는 것을 학생들이 발견하도록 이끄는 것이 아니라 학생들의 머릿속에 존재하는 것을 발견하도록 이끄는 것이라고 했다.

셋째, 학생들이 수업 활동에 적극적으로 참여할 수 있도록 교사는 수업을 조직화해야 한다. 학생들이 교과 내용에서 요구하는 것을 상당한 수준까지 스스로 학습하는 형태를 '발견 학습'이라고 하며, 이와는 달리 그 내용의 발견을 위해서 교사가 어느 정도의 지시와 학습의 방향을 제공하는 학습 형태를 '안내된 발견 학습'이라고 한다. 대부분의 교수-학습 상황을 고려하면 안내된 발견 학습이 더 실효성이 있다. 안내된 발견 학습을 위해서 교사는 학생들에게 흥미를 자극하는 문제와 약간의 당혹감과 좌절감을 주는 상황을 제공한다. 그런 다음 그 문제의 풀이 방법은 설명하지 않은 채 교사는 적절한 자료를 제공해서 학생들이 관찰, 가설 설정, 그리고 해결책이나 해답의 검증을 할 수 있도록 유도한다.

3. 귀납을 통한 원리·법칙지도

귀납이란 실험, 측정, 관찰, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 수학적 성질이 성립함을 보인 다음, 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 수학적인 성

질이 참임을 주장하는 추론 방식이다. 즉, 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실이나 일반적인 법칙을 이끌어내는 방법이다. 수학적 개념 형성을 비롯하여 원리·법칙의 형성과정에 귀납적 추론이 개재되어 있다. 그러므로 대부분의 수학내용을 지도할 때 귀납 추론에 따른 수업 모형(남승인 외, 2009)을 적용할 수 있다. 그러나 이 모형과 효과적으로 통합될 수 있는 내용은 알고리즘의 발견이나 수학적 명제의 발견과 같은 '발견'이 요구되는 내용이 효과적이다. 또 원리나 법칙 등을 학습할 경우에는 발견학습의 과정을 거치는 것이 바람직하다. 귀납 추론에 따른 수업의 일반적 절차는 다음과 같다(남승인 외, 2009).

〈표 2〉 귀납 추론에 따른 수업 모형

절차	교수학습활동
도 입	• 동기유발(문제 의식 갖기) • 기본 개념에 대한 이해도 확인 • 학습문제 인식 및 학습목표 확인 ※ 문제의 인지활동이 핵심이다.
사례 수집 및 관찰·실험	• 추론 대상 선정 및 사례 수집하기 • 수집한 사례를 관찰, 실험 및 조작적으로 다루기 ※ 직관력과 통찰력이 작용하는 단계로써, 이질성을 제거하고 동질성을 찾는다.
추측하기	• 사례의 공통적인 규칙과 성질을 추측하기. • 추측한 공통 규칙과 성질을 간결한 용어나 수학적 식으로 표현하기. ※ 유사성을 바탕으로 추정(推定)과 추리(推理)를 통해 잠정적 일반화를 이끈다.
추측한 사실에 대한 검증	• 추측이 맞는지를 다른 사례로 확인하고 검증하기 • 추측에 맞지 않을 것 같은 반례를 찾아보기 • 반례가 나타나면 추측을 수정하거나 새로운 사례를 더 수집하여 관찰, 실험단계부터 다시 시작하기 ※ 추정(推定)보다 추리(推理)를 통해 잠정적 일반화에 대한 신뢰성을 확인한다.
일반화 및 정당화	• 반례가 없으면 검증된 추측을 일반화하여 수학적 원리·법칙 등 공식으로 형식화하기 • 반례가 없으면 추측이 옳음을 연역적으로 정당화(증명)하기 ※ 비형식적·조작적 증명을 하되, 초등학교 수준에서는 연역적 증명할 수 있는 소지만 길러도 된다.
정리 및 평가	• 발견한 원리·법칙 및 사실의 정리하고, 이를 이용하여 처음 문제 해결하기 • 추측을 발견한 과정을 다시 정리하여 귀납적 추론 과정을 이해하고, 귀납 추론의 가치를 확인하기 • 원리·법칙의 유용성 인식하기 • 발견한 원리·법칙을 적용하기 및 형성평가

4. 원리·법칙의 귀납이나 적용에서 유의할 점

초등학교 수준에서 지도되는 수학적 원리·법칙은 여러 구체적인 문제를 해결할 수 있는 기본적이고 일반적인 사실의 지침을 나타내는 것이므로 연역적으로 유도되기보다는 귀납적으로 발견 또는 유도되는 것이 많다. 수학적 원리·법칙은 귀납이나 적용에 대한 지도상의 유의점을 몇 가지 요약하면 다음과 같다.

① 원리·법칙은 귀납적 추론과정을 거쳐 형성되며, 그것은 보다 넓은 범위의 대상에 적용되는 기본적·일반적인 명제이다. 따라서 귀납하는 데 사용되는 제한된 사례나 대상은 동일한 속성을 지닌 넓은 범위의 대상을 대표하고 있다는 사실을 의식하는 것이 중요하다. 이러한 의식은 조사 대상을 선택하는 데 주의를 기울이게 되고, 또 귀납된 원리·법칙이

잠정적이라는 사실도 알게 된다(유병림, 고동욱, 오병승, 1991).

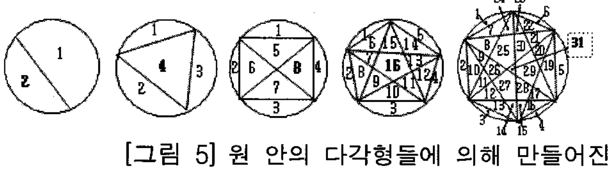
② 잠정적으로 얻은 원리·법칙을 유사한 다른 대상에 적용해 보고, 잘못된 것을 수정·보완하여 일반성을 확인하는 것이 중요하다. 즉 귀납에 의해 얻어진 결과는 항상 '참'이라고 할 수 없으므로 새로운 대상에 대해 확인해 보는 태도를 갖게 해야 한다(남승인, 1995).

③ 확인된 원리·법칙은 유사한 수학적 원리·법칙과 비교하여 같은 점과 다른 점을 분명히 함과 동시에 적용 범위를 확장하기 위해서는 어떤 관점에서 다른 것을 같게 되도록 수정하여 보다 일반적인 원리·법칙으로 확장해 가는 것이 바람직하다. 예컨대, 받아올림이 있는 덧셈 원리 중의 하나인, '낮은 자리의 합이 10이상이면 이를 윗자리로 1을 받아올림하여 준다.'는 사실은 시간 계산이나 분수 계산에도 적용할 수 있다. 이처럼 발견한 하나의 원리·법칙을 다른 새로운 원리·법칙으로 전이시키는 과정은 단순한 형식적 절차가 아닌 발전적·창의적 사고를 기대할 수 있을 것이다(유병림, 고동욱, 오병승, 1991).

④ 원리·법칙의 적용은 경우에 따라 한계가 있음을 명확히 인식하도록 한다. 한 번 형성된 원리·법칙에 대해 사고가 고착화될 경우, 새로운 원리·법칙 학습이나 문제 해결에 장애요인으로 작용할 가능성을 배제할 수 없다. 예컨대, 사칙연산에서 교환법칙이나 결합법칙은 덧셈과 곱셈에서는 성립하지만 뺄셈과 나눗셈에서는 성립하지 않는다. 또, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{4\times 5}=\frac{6}{20}$이라는 분수의 곱셈 원리를 분수의 덧셈에 적용할 경우 $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{4+5}=\frac{5}{9}$라는 오류를 일으킬 가능성을 배제할 수 없다.

⑤ 지나치게 한정된 대상에 대한 귀납이나 조기(早期)일반화는 잘못된 결론을 이끌 수 있음을 경험하게 할 필요가 있다. 예컨대, 다음 [그림 5]와 같은 사례에서 규칙성을 찾아 조기에 일반화하면 (나누어진 부분의 수)=2^{n-1}(개)을 얻을 수 있다. 이 원리를 이용하여 원주에 점이 6개일 경우는 2^5=32(개)부분으로 나누어지는 것으로 속단할 수 있다. 그러나 원주 위의 점이 6개일 경우 실제 나누어진 부분의 수는 31(개)로 나누어진다. 이처럼 원리·법칙에 대에 조기에 일반화하거나 속단하는 것은 잘못된 결론을 도출할 수 있음을 경험하게 됨으로써 추론과정에서 보다 신중을 기할 수 있는 습성을 가지게 한다.

다음 그림처럼 원주에 점을 2개, 3개,…찍고, 각 점을 연 결하면 원이 몇 부분으로 나누어지는지를 알아보고, 점의 수가 6개, 7개일 경우 몇 부분으로 나누어지는가?



점의 수	나누어진 부분
2	2
3	4=2×2
4	8=2×2×2
5	16=2×2×2×2
…	
n	2^{n-1}

[그림 5] 원 안의 다각형들에 의해 만들어진 부분들

⑥ 원리·법칙 지도에 앞서 원리·법칙에 포함되어 있는 개념들을 올바르게 이해하고 있는지를 확인해야 한다. 예컨대, 직사각형의 넓이 구하는 원리인 (직사각형의 넓이)=(가로)×(세로)를 학습할 경우, '직사각형', '넓이', '가로', '세로' 등 원리를 구성하는 개념을 이해하고 있어야 한다. 물론 경우에 따라서는 원리·법칙을 구성하는 개념의 일부만 알고서도 학습은 일어나겠지만 완전학습이나 관계적 이해는 이루어지지 않을 것이다.

⑦ 상·하위 및 유사한 원리·법칙 사이의 연결성이 이루어져야 한다. 예컨대, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴 등 다각형의 넓이를 구하는 원리를 이해하려면 직사각형의 넓이를 구하는 원리를 이해하고 있어야 하며, 각 도형의 정의 및 성질에서 같은 점과 다른 점을

분별할 수 있어야 하듯이 각 도형의 넓이를 구하는 원리 사이에도 같은 점과 다른 점을 분별할 수 있어야 한다. 만일 이들 사이에 의미 있는 연결성이 이루어지지 않는다면 각각의 학습된 원리들은 서로 분리된 개별적인 지식으로 활용력 및 전이력, 그리고 새로운 지식의 생성력이나 창의적 문제해결력을 기대하기 어려울 것이다.

V. 결 론

수학교육의 궁극적인 목표인 '합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력'을 갖게 하려면 그 전제 조건이라고 할 수 있는 수학적 원리·법칙에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다. 이해에 바탕을 둔 학습은 지식을 일방적으로 전달하는 것이 아니라 학생이 자신의 학습 활동에 적극적으로 참여함으로써 구성되는 것이다. 새로운 수학적 지식을 구성하는 방법으로써 활동주의 교육학자들은 수학을 이미 완성된 학문체계로서가 아니라, 인간이 스스로 창조해 나가는 사고 활동으로 보고 그것을 학생 내부에서 재창조하는 형태로 학습시킬 것을 권고하고 있다. 수학을 재창조하기 위해서는 수학의 발생적 측면을 살펴보면, 귀납적인 탐구과정을 통한 발견적 방법을 생각할 수 있다. 발견학습은 학생에게 있어서는 알지 못하는 원리·법칙이나 개념 등을 학생 스스로의 활동을 통하여 발견하도록 하는 학습방법이다. 원리·법칙은 과학적인 탐구나 발견학습, 집단 토의, 문제 해결 전략의 이용과 증명 등을 통해서 학습될 수 있다.

수학은 논증과학으로 분류되지만 Polya(1958)는 '수학자의 창조적인 산물인 논증적 추론과 증명은 개연적 추론에 의해 발견되어진 것'이라고 보고 있으며, Glasersfeld(1985)도 '논리와 수학 모두에서의 연역적 능력의 생성은 반드시 귀납적 사고의 경험에 근거해야 한다.'고 주장하고 있다(남승인, 1995에서 재인용). 또한 Piaget도 구체적 조작기에 있는 학생들의 사고의 한 가지 특징은 경험적·귀납적 이론을 전개하고 구체적 실체에 대한 상징적 표상을 하며, 여러 상황에서 그 타당성을 검증할 수 있는 능력이 있기 때문에 귀납적인 방법에 의하여 학습하는 것이 필요하다고 보고 있다. 귀납은 유한 개의 사례를 대상으로 그들이 가지고 있는 공통적인 속성에서 일반화를 도출하기 위한 발견술의 한 방법이다. 따라서 구체적 조작기에 있는 학생들은 형식적 논리와 증명은 그 추상적 수준에서 작업하기 위한 준비가 되어 있지 않기 때문에 그들은 물리적인 세계의 대상들에 대해 귀납적인 탐구와 발견을 통하여 학습이 이루어져야 한다. 또 학생들이 원리·법칙에 포함된 개념들을 인식하고, 그 개념들 사이의 관계를 제시하고 학습한 원리·법칙을 문제 해결 상황에서 자유롭게 활용할 수 있을 때 학습되었다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

강옥기 (2003). **수학과 학습지도와 평가론**. 서울: 경문사.

高さわ茂樹(1991). 數學的 知識の 社會的 構成と主體的 構成の 關連, *數學教育 學硏究紀要.* **西日本數學教育學會**. 51-58.

구광조, 이초식 (1969). **집합과 논리**. 서울: 지학사.

국립국어연구원 (1999). **표준국어대사전.** 두산동아.

남승인 (1995). **GET(Geometry Experimental Tool)를 利用한 平面圖形의 性質 學習에 關한 硏究**. 한국교원대학교 박사학위논문.

남승인 (2000). 초등수학교육에 있어서의 추론 방법. **수학교육논문집, 8**, 45-63.

남승인 외 (2009). **초등수학교육론 1**. 서울: 경문사.

산수과 교재재교육편찬 위원회 (1974). **산수과 재교육교재**. 대구교육대학교.

서울대학교 교육연구소 (1998). **교육학 대백과사전**. 서울: 하우동설.

石田淳一 外 (1986). 樂しく學べる算數の問題解決ストラテジー. 東京: 東洋館出版社.

유병림, 고동욱, 오병승 (1991). **산수과교육의 이론과 실제**, 서울: 동명사.

中原忠男 (2000). 算數·數學科 重要用語 300の 基礎知識. 日本, 明治圖書.

平林一營 (1990). 活動としての 數學の授業の 實踐を目.指 して. 數學學習の 聖文社.

平林一營, 石田忠男 (1981). 算數·數學科 重要用語 300の 基礎知識. 日本, 明治圖書.

Baroody, A. J., & R. T. Coslick (1998). Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction. 권성룡 외 11인 공역 (2005). **수학의 힘을 길러주자!**. 서울: 경문사.

Bell, F. H. (1980). *Teaching elementary school mathematics: Methods and content for grades K-8.* Iowa: W. C. Brown Publishers.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*(pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

http://100.naver.com/100.nhn?docid=18358

National Research Council (1990). Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum. 구광조, 강완 역 (1996). **학교수학의 재구성: 교육과정의 철학과 골격**. 서울: 한국수학교육학회.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author.

Pellerey. M. (1991). Mathematics instruction. In A. Lewy (Ed.), *The international encyclopedia of curriculum*(pp. 870-881). Oxford: Pergamon Press.

Polya, G. (1994). How to solve it? 우정호 역 (1999). **문제를 어떻게 풀 것인가?** 서울:

천재교육.

Rescher, N. (1980). Induction: An essay on the justification of inductive reasoning. 우정규 역 (1992). **귀납 과학 방법론에 대한 정당화**. 서울: 서광사.

van de Walle, J. A. (2001). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. 남승인 외 6인 역 (2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가?** 서울: 경문사.

<Abstract>

A Study on the Teaching Strategies of Mathematical Principles and Rules by the Inductive Reasoning

Nam, Seung-In[6)]

In order to grow students' rational and creative problem-solving ability which is one of the primary goals in mathematics education, students' proper understanding of mathematical concepts, principles, and rules must be backed up as its foundational basis. For the relevant teaching strategies, National Mathematics Curriculum advises that students should be allowed to discover and justify the concepts, principles, and rules by themselves not only through the concrete hands-on activities but also through inquiry-based activities based on the learning topics experienced from the diverse phenomena in their surroundings. Hereby, this paper, firstly, looks into both the meaning and the inductive reasoning process of mathematical principles and rules, secondly, suggest "learning through discovery teaching method" for the proper teaching of the mathematical principles and rules recommended by the National Curriculum, and, thirdly, examines the possible discovery-led teaching strategies using inductive methods with the related matters to be attended to.

Keywords : Mathematical Principles and Rules, Inductive reasoning, Learning by discovery

논문접수: 2011. 11. 06
논문심사: 2011. 11. 30
게재확정: 2011. 12. 14

6) sinam@dnue.ac.kr