

# 최소 위상계와 비최소 위상계의 특성

신기홍  
(안동대학교)

## 1. 머리말

소음 및 진동을 제어하고자 하는 경우에 제어 대상 또는 플랜트가 어떠한 특성을 가지고 있는지 정확히 이해하는 것은 제어 효과를 예측하고 성능을 보장하는 측면에서 매우 중요하다. 우선, 이 글에서는 플랜트가 선형 시불변 시스템(linear time-invariant system)인 경우만 고려하기로 한다. 시스템의 특성을 이해하기 위하여 여러 가지 방법 또는 기준들이 사용되고 있는데, 그 중 한 기준으로서 시스템을 최소 위상계(minimum phase system)와 비최소 위상계(non-minimum phase system)로 구분할 수 있다. 특히, 능동제어에서는 플랜트가 최소 위상계와 비최소 위상계 중 어디에 속하는지 파악하고 그 특성을 정확히 이해하는 것이 효과적이고 안정적인 제어 필터를 설계함에 있어서 매우 중요하다고 할 수 있다.

따라서 이 글에서는 최소 위상과 비최소 위상의 물리적인 의미를 명확하게 이해하고 그에 따른 시스템의 특성을 파악하는 데 도움이 되고자 한다.

## 2. 전역 통과 필터

전역 통과 필터(all-pass filter)는 언뜻 보면 최소 위상계 및 비최소 위상계와는 아무 상관없이

보이지만 다음 절에서 언급될 비최소 위상계를 분해(decomposition)할 때 매우 유용하게 사용된다. 따라서 전역 통과 필터란 무엇인지 그리고 그 특성은 어떠한 것인지 이 절에서 다루고자 한다.

먼저 다소 특별한 형태의 필터(또는 시스템)의 위상 특성을 살펴보기로 한다. 어떠한 필터의 전달함수가 식 (1)과 같이 나타내어진다고 가정해보자.

$$H(s) = \frac{s-a}{s+a} \quad (1)$$

이 시스템의 pole과 zero를 s-plane에 나타내면 그림 1과 같다.

식 (1)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$H(s) = 1 - \frac{2a}{s+a} \quad (2)$$

이를 다시 라플라스 역변환을 하면 식 (3)과 같은 필터의 임펄스 응답 함수(impulse response function)를 구할 수 있으며, 그림 2의 형태로 나타낼 수 있다.

$$h(t) = \delta(t) - 2ae^{-at} \quad (3)$$

또한, 이 필터의 주파수 응답 함수(frequency

\* E-mail : kshin@andong.ac.kr / (054) 820-5885

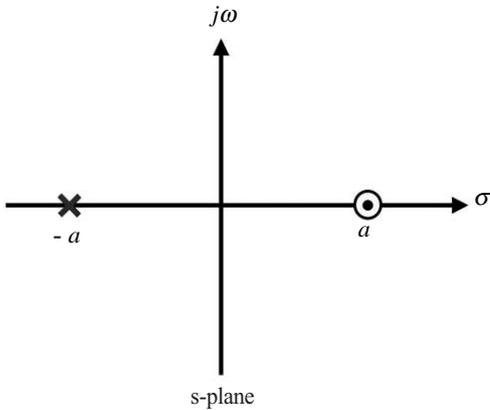


그림 1 식 (1)의 pole-zero 맵

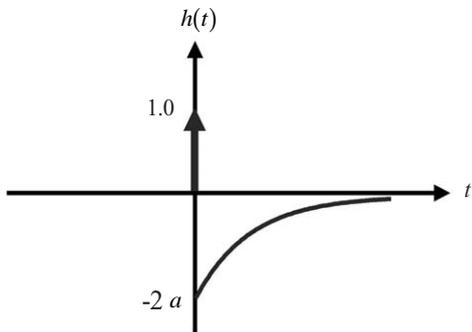


그림 2 전역 통과 필터의 임펄스 응답 함수

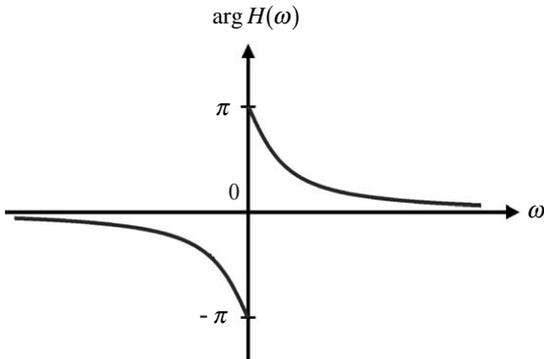


그림 3 전역 통과 필터의 위상 특성

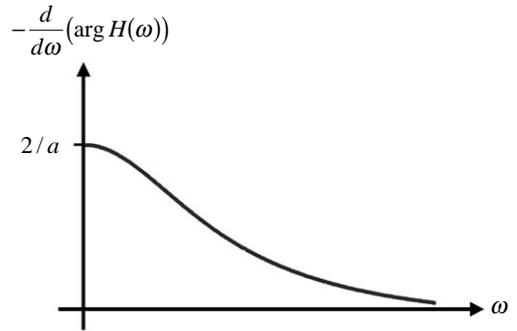


그림 4 전역 통과 필터의 그룹 지연(ω ≥ 0만 나타냄)

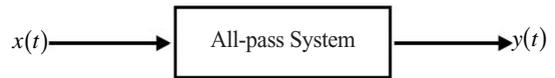


그림 5 단일 입력력 전역 통과 시스템

기(modulus)는 식 (5)와 같다.

$$H(\omega) = \frac{j\omega - a}{j\omega + a} \quad (4)$$

$$|H(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = 1 \quad (5)$$

식 (5)의 의미는 이 필터를 통과한 신호의 크기(amplitude)는 변함이 없다는 것이다. 따라서 이를 '전역 통과 필터'라고 한다. 그러나 이 필터의 위상 특성은 식 (6)과 그림 3에 나타낸 것과 같이 '비선형' 특성을 나타내고 있다. 즉 위와 전역 통과 필터는 입력신호의 '모양'을 변형시킨다.

$$\begin{aligned} \arg H(\omega) &= \arg(j\omega - a) - \arg(j\omega + a) \\ &= \pi - 2 \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\omega \geq 0) \end{aligned} \quad (6)$$

response function)는 식 (4)와 같으며  $H(\omega)$ 의 크

식 (4)에서 전역 통과 필터의 그룹 지연(group

delay)은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$-\frac{d}{d\omega}(\arg H(\omega)) = \frac{2}{a(1+\omega^2/a^2)} \quad (7)$$

여기서 한가지 주목할 점은 그림 4에 나타낸 바와 같이 그룹 지연은 항상 양의 값을 갖는다는 것이다. 즉, 비록 주파수 응답 함수의 크기는 변함이 없다 하더라도 주파수에 따라서 다른 그룹 지연을 가지게 되며 신호의 모양은 그룹 지연의 주파수 특성에 따라서 다르게 나타나게 된다.

이제 그림 5와 같이 나타낸 단일 입출력 전역 통과 시스템의 입력  $x(t)$ 와 응답  $y(t)$  사이의 특징을 간단히 살펴보자.

이 경우 입력  $x(t)$ 와 응답  $y(t)$  사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} |x(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \quad (9)$$

식 (8)은 Parseval의 에너지 정리에서 바로 알 수 있으며 입력 신호의 전체 에너지는 응답 신호의 전체 에너지와 같다는 의미이다. 그러나 특정 시간까지의 부분 에너지(partial energy)를 살펴보면 식 (9)와 같이 입력에서의 에너지가 출력 보다 더 빨리 축적된다는 것을 알 수 있다.

### 3. 최소 위상계와 비최소 위상계

안정적인 인과시스템(causal system)의 모든 pole들은 s-plane의 왼쪽 절반에 위치하고 있다. 이러한 시스템은 'BIBO(bounded input / bounded output) 안정'하다고 말하며, 모든 유한한 입력에 대하여 유한한 출력을 가짐을 나타낸다. BIBO 안정성을 위한 시간 영역에서의 필요충분 조건

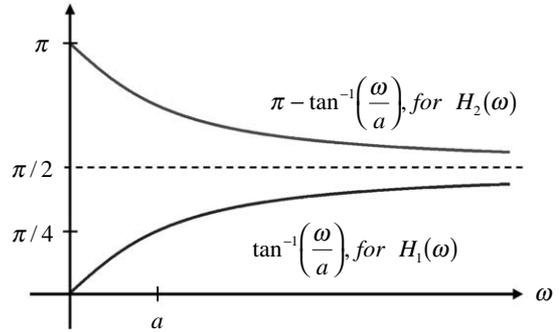


그림 6  $H_1(\omega)$ 와  $H_2(\omega)$ 의 위상 특성

은  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ 이기도 하다. 이 글에서 다루는 시스템은 인과시스템임과 동시에 BIBO 안정성 조건을 만족한다고 가정한다. 이 경우에는 시스템의 zero들이 어떻게 구성되어 있는가에 따라 다음 세 가지로 구분될 수 있다.

- (1) 최소 위상계 : 모든 zero들이 s-plane의 왼쪽 절반에 위치
- (2) 최대 위상계 : 모든 zero들이 s-plane의 오른쪽 절반에 위치
- (3) 비최소 위상계 : 일부의 zero들은 s-plane의 왼쪽, 나머지 zero들은 오른쪽에 위치

여기서 '최소 위상'의 의미를 두 개의 시스템을 비교하여 살펴보기로 하자. 첫 번째 시스템의 전달함수는  $H_1(s) = \frac{s+a}{D(s)}$  이고, 두 번째 시스템의

전달함수는  $H_2(s) = \frac{s-a}{D(s)}$  라고 가정하자. 즉 두

시스템 모두 pole들의 위치는 같으나 zero는 각각 '-a'와 'a'에 위치하고 있다. 따라서 이 두 시스템의 위상은 각각 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\arg H_1(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arg D(\omega) \quad (10)$$

$$\arg H_2(\omega) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arg D(\omega) \quad (11)$$

위 두 식에서  $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 와  $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 를 비

교하면 두 번째 시스템의 위상이 더 큰 것을 알 수 있다. 즉  $\arg H_1(\omega) < \arg H_2(\omega)$ 이 되고 그림 6과 같이 두 시스템의 위상 특성을 나타낼 수 있다 (여기서 두 주파수 응답함수의 크기(modulus)는 같음을 유의하자. 즉,  $|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)|$ ).

이러한 위상 특성은 주파수 영역이 아니라 s-plane에서도 쉽게 관찰할 수 있다. 즉  $H_1(s)$ 과  $H_2(s)$ 의 zero의 각도를 각각  $\alpha$ 와  $\beta$ 라고 하면 그림 7에서 나타낸 것과 같이  $\alpha$ 가  $\beta$ 보다 더 작음을 알 수 있는데, 이는  $H_1(s)$ 의 위상이  $H_2(s)$ 의 위상보다 더 작으며 최소 위상을 가진다는 것을 의미한다.

최소 위상은 다음의 특성을 가지고 있다.  $H(s)$ 는 zero들이 임의의 위치에 있는 전달함수이고,  $H_{\min}(s)$ 는  $|H(\omega)| = |H_{\min}(\omega)|$ 를 만족하는 최소 위상계라고 하면,  $H(s)$ 의 군 지연(group delay),  $-\frac{d}{d\omega}(\arg H(\omega))$ 는  $H_{\min}(s)$ 의 군 지연,  $-\frac{d}{d\omega}(\arg H_{\min}(\omega))$ 보다 더 크다. 또한  $y(t)$ 와  $y_{\min}(t)$ 을 각각 입력  $x(t)$ 에 대한  $H(s)$ 와  $H_{\min}(s)$ 의 응답이라고 하면 특정한 시간  $t_0$ 동안의 부분 에너지 관계식은 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |y_{\min}(t)|^2 dt \quad (12)$$

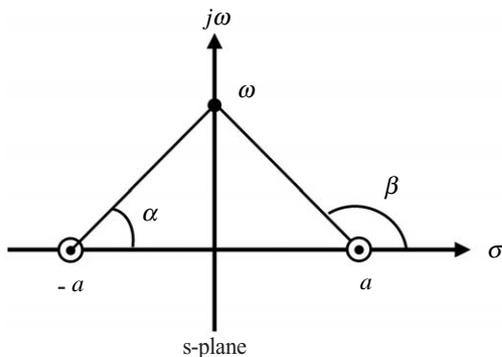


그림 7  $H_1(s)$ 와  $H_2(s)$ 의 위상 특성

이는 최소 위상계는 시간의 초기 부분에 에너지를 집중시키고 있음을 의미한다.

이러한 최소 위상계의 중요한 특성들로 인하여 최소 위상계는 다양한 신호처리 분야에서 사용되고 있는데, 능동제어와 관련해서는 역 필터(inverse filter)를 구성하는데 종종 사용되며 특히 filtered reference 신호를 사용하는 경우에 매우 유용하다. 최소 위상계를 활용한 역 필터의 구성을 다음의 예를 통하여 살펴 보기로 하자.

식 (13)은 BIBO 안정한 비최소(또는 최대) 위상계의 간단한 예이며, 이에 해당하는 pole과 zero를 그림 8에 나타내었다.

$$H(s) = \frac{s-a}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (13)$$

식 (13)은 비록 BIBO 안정하지만, 이의 역 필터를 구성하기 위하여 직접적인 역 변환을 하면  $H^{-1}(s)$ 의 pole의 위치가 s-plane의 오른쪽에 위치하게 되어 불안정한 시스템이 된다. 이러한 현상을 피하기 위한 한 방법으로서 식 (13)을 식 (14)와 같이 두 개의 부분으로 재 구성할 수 있다. 즉, 첫 번째 부분은  $|H(\omega)| = |H_{\min}(\omega)|$ 를 만족하는 최소 위상계이고 두 번째 부분은 식 (1)과 같은 전역 통과 시스템이다.

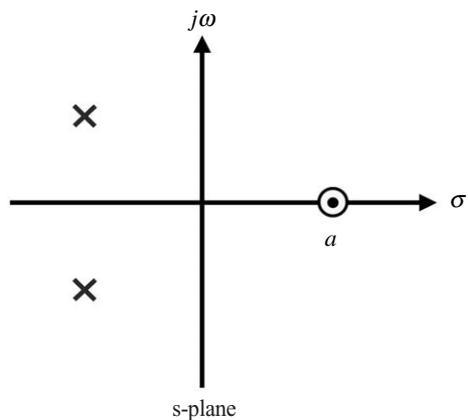


그림 8 식 (13)의 pole-zero 맵

$$H(s) = \left( \frac{s+a}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \left( \frac{s-a}{s+a} \right) \quad (14)$$

즉, 비최소 위상계를 식 (15)와 같이 최소 위상계와 전역 통과 시스템의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$H(s) = H_{\min}(s)H_{\text{ap}}(s) \quad (15)$$

이제 필요한 ‘안정한’ 역 필터는 최소 위상계 부분만 역 변환하여  $H_{\min}^{-1}(s)$ 의 형태로 구성하여 사용할 수 있다. 여기서 한 가지 주의할 점은  $H(s)H_{\min}^{-1}(s) = H_{\text{ap}}(s) \neq 1$ 이 된다는 것이다. 이러한 방법의 역 변환 결과는 직접적인 역 변환 결과와 비교하여 주파수 특성 중 ‘크기(amplitude)’ 측면에서는 완벽한 역 필터 역할을 하지만 전역 통과 필터에 의한 위상의 왜곡(distortion)이 발생한다는 점이다. 이러한 위상 왜곡의 영향은 오디오 시스템과 같은 경우에는 그리 크지 않지만, 능동 소음제어와 같은 응용에 있어서는 제어 알고리즘에 시간 지연을 이용한 preconditioning 방법을 포함하거나 all-pass filtered reference 신호를 사용하여 해결하기도 하지만 자세한 내용은 생략하기로 한다.

#### 4. 맺음말

이 글에서는 최소 위상과 비최소 위상의 특성을 수식 및 도식적으로 나타내어 물리적인 의미를 이해하는데 도움이 되고자 하였으며 최소 위상계의 중요성을 강조하였다.

앞에서 언급하였지만 능동제어에서는 직·간접적으로 역 필터가 사용되기 때문에 제어대상 시스템이 비최소 위상계인 경우 많은 주의가 필요하다. 이 경우 역필터의 안정성을 확보하기 위한 한 가지 방법으로서 비최소 위상계를 전역 통과 필터와 최소 위상계의 조합으로 나타낸 다음 역 필터를 설계하는 원리를 예를 들어 나타내었다.

능동제어에 있어서 최소 위상계와 비최소 위상계의 특성은 센서-액추에이터 쌍의 위치에 따른 FRF에서도 볼 수 있는데, 이와 관련해서는 다음 글(능동제어를 위한 센서-액추에이터 쌍의 위치에 따른 FRF 이해)에서 자세히 다루고 있으며 그 중요성을 다시 한번 더 알 수 있다.

이 글과 함께 연속되는 글들이 보다 효과적이고 안정적인 능동제어 시스템을 구축하고 관련된 신호처리 원리를 이해하는데 도움이 될 수 있기를 희망한다. **KSNVE**

#### 소음·진동 용어해설

(출처 : “소음·진동 용어해설집”, (사)한국소음진동공학회 발행)

##### Minimum Phase System 최소 위상계

최소 위상계는 Z영역에서 계의 모든 극점(pole)과 영점(zero)이 단위원(unit circle) 안에 존재하는 계로서 안정된 인과계(stable, causal system)에 해당한다.  $H(z)$ 가 최소 위상계이면 이의 역계(inverse system)  $1/H(z)$ 도 안정된 인과계를 갖는다.