IE Interfaces
Vol. 24, No. 4, pp. 295-303, December 2011.

예산 제약과 대출을 고려한 자산 매입 문제

손재동†

숭실대학교 산업정보시스템공학과 조교수

Asset Buying Problem with Consideration of the Budget Constraints and Loan

Son Jae-Dong

Assistant Professor Department of Industrial and Information Systems Engineering Soongsil University

This paper presents a discrete time optimal asset buying problem with a predetermined final deadline where an available budget is limited. A cost is paid to search for assets, called the search cost. A seller who shows up offers a price for the asset, and then the buyer decides whether or not to buy the asset by comparing the offered price to his optimal selection threshold. When the budget becomes less than the search cost or the price of the asset, the buyer can get a necessary loan with some interests. We clarify the properties of the buyer's optimal selection threshold in order to maximize the expected value of budget which is left after paying all the search costs and the price of the asset at that point in time.

Keyword: asset buying problem, optimal stopping problem, limited budget, loan, search cost

1. 서 론

어느 특정 시점까지 자동차, 토지, 건물과 같은 자산을 매입해야만 하는 의사결정 문제를 고려해 보자. 의사결정자는 지금 발견한 자산을 가능한 한 낮은 가격에 매입하고자 할 것이다. 그런데 만약 현재의 물건이 적정 가격임에도 불구하고 최종시점(deadline)까지 남은 기간 동안 보다 더 나은 물건을 발견할 수 있을 것이라는 기대로 매입하기를 거절했다고 하자. 그리고 이와 같은 거절을 계속 되풀이 하여 최종시점에 이르렀다면, 그 시점에서 발견한 물건의 가격이 너무 높다고 할지라도 매입하지 않으면 안 되는 심각한 상황에 처하게 될 것이다. 그렇다고 이러한 상황을 두려워한 나머지 가격이 그다지 낮지 않음에도 불구하고 이른 시점에 자산을 매입해 버린다면, 보다 낮은 가격의 좋은 물건을 발견할 모든 기회를 상실하게 될 것이다. 그렇다면 이러한 두 가지 극단적인 상황을 피하기 위해서는 언제 그리고 어떻게 의사결정을 하는 것이 좋을까?

위 의사결정 문제의 핵심요소는 다음의 세 가지로 구성된다. 첫째, 최종시점까지 매입해야 할 자산을 탐색(search)하는 일이다. 둘째, 매입하고자 하는 자산은 하나씩 순차적으로 나타나며 그 가치는 알려져 있지 않거나 추정할 수 없다. 셋째, 자산의 매입여부, 즉 물건 탐색 활동을 멈출 것인가 계속할 것인가에 대한 의사결정이 매 시점마다 이루어진다. 이러한 세 가지 요소를 가진 의사결정 문제를 최적정지문제(optimal stopping problem)라고 부른다(Yanai, 1966; Kohn and Shavell, 1974; Breiman, 1964). 최적정지 문제 모델들에 있어서 일단 거절한 물건들이 미래 시점에서 리콜(recall) 가능한지 그렇지 않은지는 모델의 최적 의사결정에 매우 중요한 영향을 끼친다. 발견되어 한번 거절된 물건은 미래 시점에 있어서 리콜이 불가능한 경우가 있다(Weitzman, 1979; Morgan, 1985; Ikuta, 1995). 이때 가장 최근 시점에 발견된 물건만이 의사결정에 있어서 고려대상이 된다. 이와 달리 한번 거절한 물건이 미래 시점에 있어서 일정 확률로 사라지거나(Ikuta, 1988; Karni, 1977; Lippman and McCardle, 1991; Nakai, 1982) 혹은 언제나 리콜이 가능한 경우가 있다(McCall, 1965; Morgan and Manning, 1985; Ross, 1969). 그리고 비

†연락저자 : 손재동 교수, 156-743 서울시 동작구 상도동 511번지, 숭실대학교 산업정보시스템공학과,
Tel : 02-820-0689, E-mail : son88@ssu.ac.kr
투고일(2011년 8월 29일), 심사일(1차 : 2011년 9월 23일, 2차 : 2011년 10월 10일), 게재확정일(2011년 10월 11일).

용을 지불하여 과거 거절했던 물건을 리콜하기도 한다(Saito, 1999; Kang, 1999). 따라서 최근 시점의 물건을 포함해 과거의 물건들이 선택의 의사결정에 있어서 고려 대상이 된다.

이러한 최적 정지 문제는 그 의사결정 과정에 있어서 공통적으로 다음의 두 가지 비용을 수반한다. 먼저, 의사결정 과정을 진행하기 위해서는 탐색이라는 경제적 활동이 필요하며 이 활동은 일정 비용을 지출하게 되는데, 이 비용을 탐색비용(search cost)이라고 한다. 이 비용은 비즈니스 활동 전반에 걸쳐 발생하는 비용으로서 광고, 전단지 제작, 판촉을 위한 모형제작, 영업소 관리 유지 등의 비용을 말한다. 둘째로, 의사결정과정을 종료하기 위해서는 매입이라는 의사결정을 내리는데 이 때 비용이 발생한다.

위에서 분류한 모델들은 이 두 가지 비용을 고려하고 있지만 예산(budget)을 고려하지 않음으로써 충분히 많은 예산을 가지고 의사결정과정에 참여하고 있다는 암묵적인 가정을 하고 있다. 그러나 예산의 제약이 있다면 탐색과정에 있어서의 의사결정에 중요한 영향을 미치게 될 것이다. 실제로 자산 매매 문제에 있어서 보유 예산이 많으면 많을수록 선택기준을 높이는 것이 유리하다고 알려져 있다(Ikuta, 1992). 그러나 이 결과는 예산이 항상 탐색비용보다 크다는 가정 하에서 얻어진 제한적인 것으로, 탐색을 통해 발견된 자산의 가격이 예산을 초과할 경우나 적은 예산을 가지고 자산을 매입해야 할 경우, 그리고 거절을 되풀이하여 계속되는 탐색비용의 지출로 초기의 예산보다 줄어든 금액으로 자산을 매입해야 할 경우는 고려되지 않았다.

본 논문은 예산 제약을 고려한 자산 매입 문제를 리콜 불가능한 최적정지 문제로 모델을 수립하고 보유 예산의 변화에 따른 최적 선별규칙의 구조와 특성을 분석한다. 특히 매입해야 할 자산의 가격이 현 시점의 보유 예산을 초과할 경우나 현 시점의 잔여 예산이 탐색비용보다 적지만 탐색을 계속해야 할 경우 필요한 금액을 일정 이자를 지불하고 금융기관으로부터 대출을 받을 수 있다고 가정한다.

연구의 목적은 자산을 매입하기 위한 탐색과정을 통해 의사결정 종료시점에 남은 예산을 최대화하기 위한 최적 선별규칙의 구조적 특성을 규명하는 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 본 논문에서 제안한 모델을 소개하고 최적 방정식을 수립한다. 제 3장은 제 2장에서 수립한 최적 방정식을 취급하기 편리한 형태로 변형하고 모델의 최적 선별규칙을 기술한다. 제 4장은 수립된 모델의 이론적 분석을 통해 얻어진 결과와 그 의미를 고찰한다. 제 5장에서는 수치실험을 통해 이론적 결과를 검증하고 최적 선별규칙의 구조와 특성을 밝힌다. 마지막으로 제 6장은 본 연구에서 얻어진 결론을 기술한다.

2. 모델 수립

이 절에서는 어느 특정시점까지 어떤 자산을 매입하고자하는 순차적 이산시간 의사결정 문제를 정의하고 최적 방정식을 기술한다.

먼저 의사결정이 이루어지는 각 시점들은 반드시 자산을 구매해야 만하는 최종시점(deadline)으로부터 역으로(backward) 거슬러 올라가며 균등한 시간 간격으로 번호가 붙여진다. 즉, 최종시점을 0으로 하여, $0, 1, \cdots,$ 과 같이 표기한다. 따라서 현재 시점을 t라고 한다면 두 개의 인접한 점 $t+1$과 $t-1$은 각각 이전 시점과 다음 시점을 나타내게 된다. 이때 시점 t와 $t-1$의 시간 간격을 기간(period)이라고 하자. 매 시점마다 자산을 탐색하기 위해서 일정 탐색비용 $c(\geq 0)$을 지불하게 된다. 이때 탐색 비용 c는 단위 기간 동안에 발생하는 평균비용을 말한다. 매 시점 축차적으로 하나씩 나타나는 자산의 가격, $\xi_1, \xi_2, \cdots,$ 은 평균이 μ인 확률분포 $F(\xi)$의 i.i.d 확률변수들이다. 이때 확률밀도 함수를 $f(\xi)$로 표기하고 다음과 같이 정의 한다.

$$f(\xi) > 0, \text{ if } \quad a \leq \xi \leq b, \;\; f(\xi) = 0, \;\; \text{otherwise}.$$

이때, a와 b는 $0 \leq a < b < \infty$인 실수(real number)이다.

의사결정자는 각 시점에서 나타난 자산에 대하여 매입할 것인지 아니면 다음 시점에 더 나은 물건이 나타나기를 기대하여 거절할 것인지 결정해야 한다. 만약 매입하기로 결정하였으나 매입비가 예산을 초과할 경우와 탐색을 지속하려는 시점에서의 보유 예산이 탐색비용보다 적을 경우 이자를 지불하고 필요한 금액을 대출받을 수 있다. 이때 이자의 계산 기간이 다를 수 있으므로 각각의 이자계수를 $\gamma(1 \leq \gamma \leq 2)$과 $\nu(1 \leq \nu \leq 2)$으로 표기한다. 또한 다음 시점에서 얻게 될 금전적 가치에 대한 현 시점에서의 가치를 타나내는 할인율(discount rate)을 $\beta(0 < \beta \leq 1)$로 나타낸다. 이때 이자율을 r 이라고 하면 단위 기간에 대한 이자계수와 할인율은 각각$(1+r)$과 $1/(1+r)$이 된다.

시점 t에서 나타난 물건을 거절하고 남아 있는 예산이 $\rho(\geq 0)$일 때 최종시점까지의 기간 동안 남은 최대 예산을 $U_t(\rho)$라고 표기한다. 그리고 다음 시점 $t-1$에서 매입 여부를 결정해야 할 자산의 가격이 ξ라고 한다면 $t \geq 1$에 대하여 모델의 최적 방정식을 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$U_t(\rho) = \begin{cases} \beta \displaystyle\int_0^\infty \max\Big\{ \Big(\frac{\rho-c}{\beta} - \xi\Big) I_{(\xi \leq (\rho-c)/\beta)} \\ \qquad + \gamma\Big(\frac{\rho-c}{\beta} - \xi\Big) I_{(\xi > (\rho-c)/\beta)}, \\ \qquad U_{t-1}\Big(\frac{\rho-c}{\beta}\Big) \Big\} dF(\xi), \qquad c \leq \rho, \\ \beta \displaystyle\int_0^\infty \max\Big\{ \gamma\Big(\nu\Big(\frac{\rho-c}{\beta}\Big) - \xi\Big), \\ \qquad U_{t-1}\Big(\nu\Big(\frac{\rho-c}{\beta}\Big)\Big) \Big\} dF(\xi), \;\; c > \rho. \end{cases} \tag{2.1}$$

이때 $I_{(\cdot)}$는 조건을 만족할 때 1의 값을 그렇지 않을 때 0의 값을 가지는 지시함수(indicator function)이다.

식 (2.1)에서 $c \le \rho$의 경우, 시점 t에서 보유한 예산 ρ로부터 탐색비용 c를 지불하고 남은 잔여 예산에 대한 시점 $t-1$에서 가치는 $(\rho-c)/\beta$이며 그 때 나타난 자산의 가격을 ξ라고 가정하자. 이 물건을 거절하면 $U_{t-1}((\rho-c)/\beta)$의 예산을 기대할 수 있고, 이 물건을 매입한다면 예산이 자산의 가격보다 적고 많음에 따라 최종적으로 $\gamma((\rho-c)/\beta-\xi)$ 혹은 $(\rho-c)/\beta-\xi$의 예산이 남게 된다. $c>\rho$의 경우, 예산이 탐색비용보다 적으므로 필요금액$(\rho-c)$을 대출을 받고 이자를 지불하게 되므로 시점 $t-1$에서의 잔여 예산은 $\nu(\rho-c)/\beta$이 되고, 이때 나타난 자산에 대해 필요 금액을 대출 받아 매입할 것인지 아니면 거절하고 $U_{t-1}(\nu(\rho-c)/\beta)$의 예산이 남는 것을 기대하며 탐색을 계속할 것인지 결정하게 된다.

한편, 시점 $t=1$에서는 다음시점이 최종시점 $t=0$이므로 어떠한 크기의 자산이 나타날지라도 반드시 매입해야 하기 때문에 이때의 최대 잔여 예산은 다음과 같이 간단히 얻어진다.

$$U_1(\rho)=\begin{cases}(\rho-c-\beta\mu)I_{(\beta\mu+c\le\rho)} & \\ \quad+\gamma(\rho-c-\beta\mu)I_{(\beta\mu+c>\rho)}, & c\le\rho,\\ \gamma(\nu(\rho-c)-\beta\mu), & c>\rho.\end{cases} \tag{2.2}$$

본 연구의 목적은 한정된 예산 하에서 대출을 고려한 자산 매입이라는 탐색과정을 통해 의사결정 종료 시점에 남은 예산을 최대화하기 위한 최적 선별규칙의 구조를 분석하는 것이다.

3. 최적 방정식의 변형과 최적 의사 결정

이 절에서는 최적 방정식 (2.1)을 모델의 구조 분석에 용이한 형태로 변형하고 최적 선별규칙에 관하여 기술한다. 먼저, 모델 분석의 편이성을 위해 다음을 정의한다.

$$\alpha=\beta\mu+c,\quad \delta=(\nu-1)(c-\rho). \tag{3.1}$$

$$V_t^+(\rho)=\begin{cases}\rho-U_t(\rho), & \beta\xi+c\le\rho,\\ \rho-U_t(\rho)/\gamma, & c\le\rho<\beta\xi+c,\end{cases}\quad c\le\rho, \tag{3.2}$$
$$V_t^-(\rho)=\rho-U_t(\rho)/\gamma,\ \ \rho<c,\quad t\ge 1.$$

식 (2.1)으로부터 아래와 같은 비교적 간결한 형태의 방정식을 유도할 수 있다.

[보조정리 3.1] $t\ge 1$에 대하여,

(a) $c\le\rho$이면,

$$V_t^+(\rho)=\beta\int_0^\infty \min\{\xi,\, V_{t-1}^+((\rho-c)/\beta)\}dF(\xi)+c, \tag{3.3}$$

(b) $\rho<c$이면,

$$V_t^-(\rho)=\beta\int_0^\infty \min\{\xi,\, V_{t-1}^-(\nu(\rho-c)/\beta)\}dF(\xi) \tag{3.4}$$
$$+c+\delta.$$

Proof. (a) 식 (2.1)의 $c\le\rho$에 대하여 $\beta\xi+c\le\rho$인 경우와 $c\le\rho<\beta\xi+c$인 경우로 나누어서 전개할 수 있다. 먼저, $\beta\xi+c\le\rho$인 경우 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}U_t(\rho)&=\beta\int_0^\infty \max\{(\rho-c)/\beta-\xi,\, U_{t-1}((\rho-c)/\beta)\}dF(\xi)\\ &=\beta\int_0^\infty \max\{-\xi,\, U_{t-1}((\rho-c)/\beta)-(\rho-c)/\beta\}dF(\xi)\\ &\quad+\rho-c.\end{aligned}$$

위 방정식의 max를 min으로 변형한 후 양변에 -1을 곱하고 좌변으로 ρ를 이동하여 정리하면

$$\rho-U_t(\rho)=\beta\int_0^\infty \min\{\xi,(\rho-c)/\beta-U_{t-1}((\rho-c)/\beta)\}$$
$$dF(\xi)+c$$

가 얻어지고, 다시 식 (3.2)의 관계식으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$V_t^+(\rho)=\beta\int_0^\infty \min\{\xi, V_{t-1}^+((\rho-c)/\beta)\}dF(\xi)+c. \tag{3.5}$$

다음, $c\le\rho<\beta\xi+c$이면 식 (2.1)은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}U_t(\rho)&=\beta\int_0^\infty \max\{\gamma((\rho-c)/\beta-\xi),\, U_{t-1}((\rho-c)/\beta)\}\\ &\quad dF(\xi)\\ &=\gamma\beta\int_0^\infty \max\{-\xi,\, U_{t-1}((\rho-c)/\beta)/\gamma-(\rho-c)/\beta\}\\ &\quad dF(\xi)+\gamma(\rho-c)\end{aligned}$$

양변에 $-1/\gamma$로 곱하고 max를 min으로 변형하고 좌변으로 ρ를 이동하여 정리하면

$$\rho-U_t(\rho)/\gamma=\beta\int_0^\infty \min\{\xi,(\rho-c)/\beta-U_{t-1}((\rho-c)/\beta)/\gamma\}$$
$$dF(\xi)+c$$

가 얻어지고, 다시 식 (3.2)의 관계식으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$V_t^+(\rho)=\beta\int_0^\infty \min\{\xi, V_{t-1}^+((\rho-c)/\beta)\}dF(\xi)+c. \tag{3.6}$$

(b) $\rho < c$ 이면 식 (2.1)로부터

$$U_t(\rho)/\gamma = \beta\int_0^\infty \max\{\nu(\rho-c)/\beta-\xi,\ U_{t-1}(\nu(\rho-c)/\beta)/\gamma\}\,dF(\xi)$$
$$= \beta\int_0^\infty \max\{-\xi,\ U_{t-1}(\nu(\rho-c)/\beta)/\gamma-\nu(\rho-c)/\beta\}\,dF(\xi)+\nu(\rho-c).$$

위 방정식의 양변에 -1로 곱하고 ρ를 더한 후 max를 min으로 변형하여 정리하면

$$\rho - U_t(\rho)/\gamma = \beta\int_0^\infty \min\{\xi,\ \nu(\rho-c)/\beta - U_{t-1}(\nu(\rho-c)/\beta)/\gamma\}\,dF(\xi) - \nu(\rho-c)+\rho$$

가 얻어지고 식 (3.2)의 관계식으로부터 다음이 얻어진다.

$$V_t^-(\rho) = \beta\int_0^\infty \min\{\xi,\ V_{t-1}^-(\nu(\rho-c)/\beta)\}\,dF(\xi)+c+(\nu-1)(c-\rho). \ ■ \tag{3.7}$$

[보조정리 3.1]은 모델의 최적 방정식 (2.1)을 변형하여 얻어진 결과이다. 따라서 본 연구에서 제안한 모델의 최적 선별 규칙은 [보조정리 3.1]을 바탕으로 다음과 같이 기술할 수 있다.

【최적선별규칙】 임의의 시점 t에서 나타난 자산의 가격이 ξ라면,

1. $c \le \rho$의 경우, $\xi \le V_t^+(\rho)$이면 그 자산을 매입하는 것이 최적이고, $\xi > V_t^+(\rho)$이면 현재의 물건을 매입하지 않고 다음 시점에 보다 낮은 가격의 물건이 나타날 것을 기대하고 탐색비용을 지불하여 탐색을 계속하는 것이 최적이다.
2. $\rho < c$의 경우, $\xi \le V_t^-(\rho)$이면 그 자산을 매입하는 것이 최적이고, $\xi > V_t^-(\rho)$이면 현재의 물건을 매입하지 않고 다음 시점에 보다 낮은 가격의 물건이 나타날 것을 기대하고 탐색비용을 지불하여 탐색을 계속하는 것이 최적이다.

위에서 기술한 최적 선별규칙에서는 $V_t^+(\rho)$ 혹은 $V_t^-(\rho)$을 가지고 탐색활동의 결과로 나타난 자산의 매입 여부에 대한 의사결정을 하므로 이 값을 이하 최적 "선별기준"이라 부르기로 한다.

4. 모델 분석

이 절에서는 문제의 최적 선별규칙의 구조와 그 특성을 분석한다. 분석의 편이성을 위해 다음과 같은 함수를 정의하기로 한다.

$$\widetilde{T}(x) = \int_0^\infty \min\{\xi-x,\ 0\}dF(\xi) = \int_0^x(\xi-x)dF(\xi), \tag{4.1}$$

$$L(x) = \beta\int_0^\infty \min\{\xi,\ x\}dF(\xi)-x+c = \beta\widetilde{T}(x)-(1-\beta)x+c, \tag{4.2}$$

$$M(x) = \beta\int_0^\infty \min\{\xi,\ x\}dF(\xi)-x-(v-1)\rho+\nu c = \beta\widetilde{T}(x)-(1-\beta)x+c+\delta = L(x)+\delta. \tag{4.3}$$

이때 $L(x)$-함수와 $M(x)$-함수에 관하여 다음과 같은 해를 정의하자.

$$\eta^* = \max\{x|L(x)=0|\},\ m^* = \max\{x|M(x)=0|\} \tag{4.4}$$

위에서 정의한 함수를 이용하면 식 (3.3)과 식 (3.4)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$V_t^+(\rho) = L(V_{t-1}^+((\rho-c)/\beta)+V_{t-1}^+((\rho-c)/\beta),\ t\ge 1, \tag{4.5}$$

$$V_t^-(\rho) = M(V_{t-1}^-(\nu(\rho-c)/\beta)+V_{t-1}^-(\nu(\rho-c)/\beta),\ t\ge 1. \tag{4.6}$$

[보조정리 4.1]

(a) $\widetilde{T}(x)$는 아래로 오목(concave)한 감소함수이며 구간 $(a,\ \infty)$에서 단조 감소한다.

(b) 구간 $(-\infty,\ a]$에서 $\widetilde{T}(x)=0$, 구간 $(a,\ b)$에서 $\widetilde{T}(x)<0$, 구간 $[b,\ \infty)$에서 $\widetilde{T}(x)=\mu-x$이다.

(c) $\widetilde{T}(x)+x$는 증가함수이며 구간 $(-\infty,\ b)$에서 단조 증가한다.

Proof. Ikuta(2004)의 Lemma 6.6과 6.7 참조. ■

[보조정리 4.2]

(a) $L(x)$와 $M(x)$는 아래로 오목한 감소함수이며 구간$[a,\ \infty)$에서 단조 감소한다.

(b) $L(x)+x$와 $M(x)+x$는 증가함수이며 구간 $(-\infty,\ b)$에서 단조 증가한다.

(c) η^*와 m^*는 유일해(unique solution)이다.

Proof. 식 (4.3)으로부터 $M(x)=L(x)+\delta$이므로 함수-$L(x)$의 단조성에 관한 성질은 함수-$M(x)$에 그대로 승계된다. 아래는 함수-$L(x)$의 성질에 관한 증명이다.

(a) 식 (4.2)과 [보조정리 4.1] (a)로부터 자명하다.

(b) 식 (4.2)로부터 $L(x)+x=\beta(\widetilde{T}(x)+x)+c$가 얻어진다. 따라서 [보조정리 4.1] (c)으로부터 함수의 단조 성질은 자명하다.

(c) [보조정리 4.1] (b)로부터 충분히 큰 임의의 $x(>b)$에 대하여 $L(x)=-x+\alpha<0$이고, 충분히 작은 $x(\leq a)$에 대하여 $L(x)=-(1-\beta)x+c$ 이 얻어져 $\beta<1$이거나 $c>0$이면 $L(x)>0$이다. 따라서 (a)의 $L(x)$의 단조감소 성질에 의해 η^*는 유일해임을 알 수 있다. 만약 $\beta=1$이고 $c=0$이면 $x\leq a$에 대하여 $L(x)=0$이므로 η^*의 정의에 따라 $\eta^*=a$로 유일하다. ■

식 (3.3)과 식 (3.4)로부터 $V_t^+(\rho)$와 $V_t^-(\rho)$는 이자 γ와 독립임을 알 수 있다. 따라서 이하의 분석에서는 γ와 관계되는 분석은 생략하기로 한다.

[정리 4.1] $t\geq 1$일 때, $V_t^+(\rho)$와 $V_t^-(\rho)$에 대하여,

(a) $V_t^+(\rho)$는 ρ와 독립이다. 즉, $V_t^+=V_t^+(\rho)$이다.

(b) V_t^+와 $V_t^-(\rho)$는 모두 시간 t의 위로오목(convex)인 감소함수이다.

(c) V_t^+는 β와 c의 증가함수이고, $V_t^-(\rho)$는 ρ의 감소함수이며 ν와 β, c의 증가함수이다.

(d) V_t^+와 $V_t^-(\rho)$는 $t\to\infty$일 때 각각 $V^+=\eta^*$과 $V^-(\rho)=m^*$에 수렴한다.

(e) $c\leq V_t^+\leq\alpha$, $c+\delta\leq V_t^-(\rho)\leq\alpha+\delta$이고, $(1-\beta)a\leq c$이면 $a<V_t^+\leq\alpha$, $a+\delta<V_t^-(\rho)\leq\alpha+\delta$이다.

(f) $\alpha<b$이면 $\eta^*\leq V_t^+<\alpha$이고, $\alpha\geq b$이면 $b\leq V_t^+\leq\alpha$이다. 그리고 $\alpha+\delta<b$이면 $m^*\leq V_t^-(\rho)<\alpha+\delta$이고, $\alpha+\delta\geq b$이면 $b\leq V_t^-(\rho)\leq\alpha+\delta$이다.

Proof. (a) 먼저 $t=1$일 경우, 식 (2.2)과 식 (3.2)로부터 각각 $V_1^+(\rho)=\beta\mu+c=\alpha$이다. 따라서 $V_1^+(\rho)$는 ρ와 독립이다. 다음으로 $t-1$일 때 $V_{t-1}^+(\rho)$가 ρ와 독립이라고 가정하면 식 (4.5)로부터 $V_t^+(\rho)$ 또한 ρ와 독립이므로 귀납적 방법에 의해 증명완료.

(b) 식 (3.3)으로부터
$$V_2^+=\beta\int_0^\infty\min\{\xi,V_1^+\}dF(\xi)+c$$
$$\leq\beta\int_0^\infty\xi dF(\xi)+c=\beta\mu+c=\alpha=V_1^+$$

즉 $V_1^+\geq V_2^+$이 얻어진다. 이제 $V_{t-1}^+\geq V_t^+$라고 가정하면, [보조정리 4.2] (b)와 식 (4.5)로부터 $V_t^+=L(V_{t-1}^+)+V_{t-1}^+\geq L(V_t^+)+V_t^+=V_{t+1}^+$이 성립한다. 따라서 V_t^+는 시간 t의 감소함수이다. V_t^+의 오목(convex)성은 다음과 같은 사실로부터 증명된다. 식 (4.5)로부터 $V_t^+-V_{t-1}^+=L(V_{t-1}^+)$가 얻어지고, 이때 우변 $L(V_{t-1}^+)$가 V_{t-1}^+의 감소함수라는 [보조정리 4.2] (a)의 결과로부터 좌변의 차분(difference) 또한 감소하게 된다.

(c) 식 (2.2)와 식 (3.2)로부터 얻어진 $V_1^+=\alpha=\beta\mu+c$와 $V_1^-(\rho)=\alpha+\delta=\beta\mu+c+(\nu-1)(c-\rho)$는 매개변수 β, c, 그리고 ν의 증가함수이다. V_{t-1}^+와 $V_{t-1}^-(\rho)$가 β, c, 그리고 ν의 증가함수라고 가정하면, 식 (4.5)와 식 (4.6), 그리고 [보조정리 4.2] (b)로부터 V_t^+와 $V_t^-(\rho)$가 β, c, ν의 증가함수임을 쉽게 알 수 있다. $V_t^-(\rho)$가 ρ의 감소함수라는 주장 또한 $V_1^-(\rho)$가 ρ의 감소함수인 사실과 위와 같은 귀납적 방법에 의해 증명된다.

(d) V_t^+과 $V_t^-(\rho)$가 수렴한다는 사실은 (b)로부터 자명하다. 그 수렴 값을 V^+과 $V^-(\rho)$라고 하면 식 (4.5)와 식 (4.6)으로부터 각각 $V^+=L(V^+)+V^+$과 $V^-(\rho)=M(V^-(\rho))+V^-(\rho)$를 얻을 수 있다. 즉 $L(V^+)=0$과 $M(V^-(\rho))=0$이 얻어지고, 이때 V^+과 $V^-(\rho)$은 [보조정리 4.2] (c)로부터 $L(x)$함수와 $M(x)$함수의 유일해 η^*과 m^*가 된다.

(e) 먼저, (a)의 증명과정에서 $V_1^+=\alpha=\beta\mu+c\geq c$임을 알 수 있다. 이제 $V_{t-1}^+\geq c$라 가정하고 $V_t^+\geq c$가 성립함을 보이기로 하자. 식 (4.2)와 [보조정리 4.1] (b)로부터 $x\leq a$일 때 $L(x)=-(1-\beta)x+c$이고 $L(x)+x=\beta x+c$로 정리된다. 이때 $c\leq a$이면 $L(c)+c=\beta c+c\geq c$이고, $L(x)+x$는 [보조정리 4.2] (b)로부터 $c\leq V_{t-1}^+$에 대하여 $c\leq\beta c+c\leq L(V_{t-1}^+)+V_{t-1}^+=V_t^+$임을 알 수 있다. $a<c$이면 $c\leq\beta a+c=L(a)+a<L(c)+c$이므로 $c\leq V_{t-1}^+$에 대해서 $c<L(c)+c\leq L(V_{t-1}^+)+V_{t-1}^+=V_t^+$임을 알 수 있다. 따라서 $V_1^+=\alpha$과 (b)로부터 $c\leq V_t^+\leq\alpha$이 증명되었다. 다음으로, $c\geq(1-\beta)a$라고 하자. 이때 $V_1^+=\beta\mu+c>\beta a+c\geq a$가 성립한다. 이제 $V_{t-1}^+>a$의 가정 하에 $V_t^+>a$임을 증명하기로 한다. 위에서 보인 것처럼 $x\leq a$일 때 $L(x)+x=\beta x+c$이므로 $L(a)+a=\beta a+c\geq a$이고 $a<V_{t-1}^+$에 대하여 $a\leq L(a)+a<L(V_{t-1}^+)+V_{t-1}^+=V_t^+$임을 알 수 있다. 따라서 $V_1^+=\alpha$과 (b)로부터 $c<V_t^+\leq\alpha$가 증명되었다. $V_t^-(\rho)$에 대해서도 같은 방법으로 증명할 수 있다.

(f) $\alpha<b$의 경우, $V_1^+=\alpha$인 사실과 (b)와 (d)로부터 자명하다. $\alpha\geq b$이면 $V_1^+=\alpha\geq b$이고, $V_{t-1}^+\geq b$라 가정하면 식(4.5)로부터 $V_t^+=L(V_{t-1}^+)+V_{t-1}^+\geq L(b)+b$이다. 이때 식(4.2)와 [보조정리 4.2] (b)로부터 $L(b)=-b+\alpha$이므로 $V_t^+\geq\alpha\geq b$가 성립한다. $V_t^-(\rho)$에 대해서도 같은 방법으로 증명할 수 있다. ■

위의 [정리 4.1]은 제 3장의 [최적선별규칙]에서 기술한 유한계획 기간에 있어서의 선별기준 V_t^+과 $V_t^-(\rho)$의 성질을 나타내며 그 의미는 다음과 같다.

(a)는 현재 보유 예산이 $c\leq\rho$를 만족할 정도로 많을 경우, 현재 보유 예산의 많고 적음과 상관없이 자산매입 여부에 대한 의사결정이 이루어져야 한다는 것을 의미한다. 다시 말해,

현재 보유 예산이 많다고 해서 낮은 자산을 매입하려고 선별기준을 낮추거나 반대로 보유 예산이 적다고 해서 선별기준을 높여 빠른 시일 내에 자산을 매입하려 할 필요가 없다는 것을 시사한다.

(b)는 최적 선별기준이 시간이 증가함에 따라 완만한 기울기를 가지고 감소한다는 것으로, 자산을 매입하지 않으면 안 되는 종료시점까지 시간이 많이 남아 있을수록 선별기준을 낮게 설정하는 것이 최적임을 보여준다. 이는 시간적 여유가 많으면 많을수록 낮은 가격의 자산을 구매하되 종료시점에 임박하여 시간적 여유가 없을 경우 이전 보다 높은 가격의 자산을 매입 하도록 의사결정이 이루어져야 한다는 것을 의미한다.

(c)는 탐색비용 c와 할인율 β 그리고 이자계수 ν가 증가하면 할수록 선별기준을 높게 설정함으로써 낮은 가격의 자산이 아닐 지라고 비교적 빠른 시간 내에 자산을 매입하는 것이 최적임을 나타낸다. 여기서 탐색비용과 현금 할인율 그리고 이자는 모두 비용에 관한 것으로 시간이 경과할수록 그 비용은 증가하게 되므로 가능한 한 빠른 시간 내에 자산을 매입하여 의사결정 과정을 종료하는 것이 비용지출에 의한 손실을 줄일 수 있기 때문으로 해석할 수 있다. 그리고 $\rho < c$인 경우, 최적 선별기준 $V_t^-(\rho)$가 보유예산 ρ의 감소함수이므로 보유예산이 많을수록 선별기준 낮게 설정하는 것이 최적임을 의미한다. 이는 $c \le \rho$일 때 선별기준이 보유예산에 영향을 받지 않았던 (a)의 결과와 다른 것으로 그 이유는 다음과 같이 해석할 수 있다. $c \le \rho$의 경우는 물건 탐색과정에서 탐색비용외에 다른 추가 비용의 발생이 없었지만, 이와 달리 $\rho < c$의 경우는 보유예산이 탐색비용보다 적기 때문에 탐색활동에 필요한 금액에 대한 이자비용이 발생하게 되어 보유예산의 정도가 최적 선별기준에 영향을 미치게 된다. 즉, 보유예산이 적을수록 이자 비용에 대한 부담이 커지므로 선별기준을 보다 높게 설정하여 빠른 시간에 자산을 매입하여 탐색과정을 종료하는 것이 최적이라고 할 수 있다.

(d)는 자산 매입에 대한 의사결정을 내려야만 하는 시점까지 충분한 시간적 여유가 있는 무한계획 기간 문제에서는 최적 선별기준 V_t^+과 $V_t^-(\rho)$이 각각 함수-$L(x)$와 함수-$M(x)$의 해를 구함으로써 얻어지며, 그 값은 [보조정리 4.2] (c)로부터 유일한 값으로 주어진다는 것을 알 수 있다.

(e)는 어떠한 조건하에서도 $c \le V_t^+$, $c \le V_t^-(\rho)$이므로 자산을 매입할 경우 선별 기준을 항상 탐색비용 c보다 높게 설정하여 선별기준보다 낮은 자산을 매입하는 것이 최적임을 보여준다.

마지막으로 (f)는 $\alpha \ge b$이거나 $\alpha + \delta \ge b$일 때 선별기준을 자산 가격 분포의 상한 b보다 높게 설정하는 것이 최적임을 나타낸다. 따라서 탐색활동을 통해 나타난 그 어떤 자산일지라도 선택기준보다 낮을 것이므로 위의 조건하에서는 아무리 가격이 높은 자산일지라도 곧바로 매입하여 탐색과정을 빨리 종료하는 하는 것이 최적임을 알 수 있다.

[정리 4.2] V^+에 대하여,

(a) $c = 0, \beta = 1$이면 $V^+ = a$이다

(b) $c = 0, \beta < 1$이면 $V^+ = 0$이다.

(c) $c > 0$, $\beta = 1$일 경우, $\alpha < b$이면 $a < V^+ < \alpha < b$이고, $\alpha \ge b$이면 $b \le V^+ \le \alpha$이다.

(d) $c > 0$, $\beta < 1$일 경우, $c < (1-\beta)a$이면 $0 < V^+ \le a$이고, $(1-\beta)a \le c < b - \beta\mu$이면 $a < V^+ < \alpha < b$이고, $c \ge b - \beta\mu$이면 $b \le V^+ \le \alpha$이다.

Proof. 먼저, [정리 4.1] (d)의 $V^+ = \lim_{t\to\infty} V_t^+ = \eta^*$에 주목하자.

(a) $c = 0$, $\beta = 1$이면 식 (4.5)으로부터 $L(x) = \widetilde{T}(x)$가 얻어지므로 [보조정리 4.1] (b)과 η^*의 정의로부터 $\eta^* = V^+ = a$이다.

(b) $c = 0$, $\beta < 1$이면, 식 (4.5)에서 $x \le a$일때 [보조정리 4.1] (b)로부터 $L(x) = -(1-\beta)x$이므로 $\eta^* = V^+ = 0$이다.

(c) $c > 0$, $\beta = 1$라고 하자. 식 (4.5)와 [보조정리 4.1] (b)로부터 $L(a) = \beta\widetilde{T}(a) - (1-\beta)a + c = c > 0$과 $L(b) = \beta\widetilde{T}(b) - (1-\beta)b + c = \beta\mu + c - b = \alpha - b$을 얻는다. 따라서 [보조정리 4.2] (a)로부터 $\eta^* = V^+ > a$, $\alpha < b$일 때 $\eta^* = V^+ < b$, 그리고 $\alpha \ge b$일 때 $b \le V^+ = \eta^*$가 얻어진다. 그러므로 $V_1^+ = \alpha$인 사실과 [정리 4.1] (b)로부터 $a < V^+ < \alpha < b$와 $b \le V^+ \le \alpha$임을 알 수 있다.

(d) $c > 0$, $\beta < 1$라고 하자. 이때 $(1-\beta)a - b + \beta\mu < (1-\beta)a - b + \beta b = (1-\beta)(a-b) < 0$이므로 $(1-\beta)a < b - \beta\mu$이다. 먼저 $c \le (1-\beta)a$의 경우, 식 (4.5)와 [보조정리 4.1] (b)로부터 $L(a) = -(1-\beta)a + c \le 0$, $L(0) = c > 0$, 그리고 [보조정리 4.2] (a)로부터 $0 < \eta^* = V^+ \le a$임을 알 수 있다. 다음 $(1-\beta)a < c < b - \beta\mu$의 경우, $L(a) = -(1-\beta)a + c > 0$과 $L(b) = \beta\mu + c - b < 0$이므로 [보조정리 4.2] (a)로부터 $a < \eta^* = V^+ < b$이다. 마지막으로 $c \ge b - \beta\mu$이면, $\alpha \ge b$이고 $L(b) \ge 0$이므로 $V_1^+ = \alpha$인 사실과 [정리 4.1] (b)로부터 $b \le V^+ \le \alpha$임을 알 수 있다. ■

위 [정리 4.2]는 무한 계획기간에 있어서 $c \le \rho$일 경우에 대한 선별기준의 극한 값 V^+의 성질을 나타내며 그 의미는 다음과 같다.

(a)와 (b)로부터 $c = 0$, 즉 탐색비용에 대한 지출이 없을 경우, 시간적 여유가 많은 상태에서는 가장 낮은 가격의 자산 즉 분포의 하한 a값의 자산이 나타날 경우에 한하여 자산을 매입하고 그 외의 어떠한 자산도 매입하지 않고 거절하는 것이 최적임을 알 수 있다. 그러나 [정리 4.1] (b)에서 보인 바와 같이 V_t^+는 시간이 경과함에 따라 점점 증가(시간 t의 감소함수)하므로 $t^* = \max\{t \mid V_t^+ > a\}$를 만족하는 t^*가 존재하게 된다. 따라서 $t < t^*$시점부터는 선별기준 V_t^+가 자산분포의 하한 값보다 높게 설정되기 때문에 선별기준으로서의 본래의 역할을 하게 되어 [정리 4.1]의 성질들을 적용하여 의사결정을 할 수 있게 된

다. 그리고 $\alpha \le a$일 경우, 식 (3.2)로부터 $V_1^+ = \alpha$인 사실과 [정리 4.1] (b)로부터 모든 $t \ge 1$에 대하여 $V_t^+ \le a$인 사실로부터 최적 선별 기준은 어떤 시점에 있어서도 자산 분포의 하한 값 a이하로 설정되어야 한다. 결국, 분포 하한 값보다 낮은 가격의 자산은 나타날 수 없기 때문에 처음부터 자산 매입을 위한 탐색과정에 들어가지 않는 것이 최적이라고 할 수 있다.

(c)와 (d)로부터 $c > 0$일 경우, $\alpha < b$이면 최적 선별기준은 a와 α값 사이에 존재하며, $b \le \alpha$(즉, $b - \beta\mu \le c$)이면 $V^+ \ge b$이므로 자산 가격 분포의 상한 b보다 높게 설정해야 한다. 후자의 경우 아무리 높은 가격의 자산일 지라도 분포 상한 보다 낮을 수밖에 없으므로 최초에 나타난 자산을 매입하여 탐색과정을 바로 종료하는 것이 최적이다.

[정리 4.3] $V^-(\rho)$에 대하여,

(a) $\beta = 1$일 경우, $\alpha + \delta < b$ 이면 $a < V^-(\rho) < \alpha + \delta < b$이고, $\alpha + \delta \ge b$이면 $b \le V^-(\rho) \le \alpha + \delta$이다.

(b) $\beta < 1$일 경우, $c + \delta \le (1-\beta)a$이면 $0 < V^- \le a$이고, $(1-\beta)a < c + \delta < b - \beta\mu$이면 $a < V^-(\rho) < b$이고, $c + \delta \ge b - \beta\mu$이면 $b \le V^-(\rho) \le \alpha + \delta$이다.

Proof. $M(x) = L(x) + \delta$임에 유의하면서 [정리 4.2](c, d)와 같은 방법으로 증명할 수 있다. ■

위 [정리 4.3]은 무한 계획기간에 있어서 $\rho < c$일 경우에 대한 선택 임계값 $V^-(\rho)$의 성질을 나타내며, 이 결과는 가정에 의해 $\rho \ge 0$이므로 항상 $c > 0$인 조건에서 얻어졌다. 결과의 의미는 [정리 4.2](c, d)와 유사하여 $\alpha + \delta < b$이면 선택 임계값은 a와 $\alpha + \delta$값 사이에 존재하며, $b \le \alpha + \delta$ (즉, $b - \beta\mu \le c + \delta$)이면 $V^-(\rho) \ge b$이므로 아무리 높은 가격의 자산이 나타나더라도 그 자산을 바로 매입하여 탐색과정을 종료하는 것이 최적임을 보여준다.

[보조정리 4.3] $U(\rho)$를 최대 잔여 예산 $U_t(\rho)$의 극한 값이라고 할 때 다음과 같이 주어진다.

$$U(\rho) = \begin{cases} \rho - \eta^*, & \alpha \le \rho, \\ \gamma(\rho - \eta^*), & \rho < \alpha, \\ \rho - m^*, & \rho < c. \end{cases} \tag{4.7}$$

Proof. [정리 4.1] (d)과 식 (3.2)로부터 간단히 얻어진다. ■

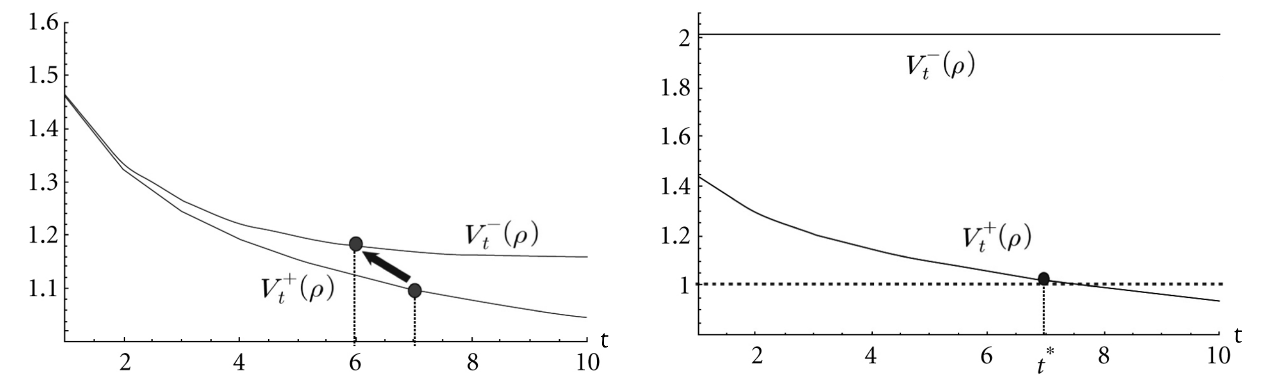
5. 수치실험 분석

이 절에서는 수치실험을 통해 최적 선별기준의 구조와 특성을 살펴보고 그 결과를 고찰한다.

수치실험의 결과는 $\beta = 0.96$, $\gamma = 1.1$, $\nu = 1.1$, 그리고 확률밀도 함수 $f(\xi)$는 [1, 2]인 일양분포(uniform distribution) ($a = 1$, $b = 2$)로 설정하여 얻어졌다. 따라서 최적 선별기준의 구조 분석에 있어서 중요한 $\widetilde{T}(x)$-함수는 식 (4.1)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\widetilde{T}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ -0.5(x-1)^2, & 1 \le x \le 2, \\ 1.5 - x, & 2 < x. \end{cases}$$

<그림 1>은 최적 선별기준인 $V_t^+(\rho = 0.06)$와 $V_t^-(\rho = 0.03)$의 그래프를 나타낸다. (a)는 $0.04 = (1-\beta)a \le c = 0.05$인 경우로 $V_t^+(\rho)$는 a(= 1)와 α(=1.49)와 사이, $V_t^-(\rho)$는 a(= 1)와 $\alpha + \delta$(=1.494) 사이에 존재하며 시간 $t(\ge 1)$가 감소함에 따라 그 값이 증가함을 알 수 있다([정리 4.1] (b)). 이는 최종시점까지 시간적인 여유가 많으면 많을수록 선택기준을 낮추어 적극적으로 낮은 가격의 물건을 찾는 것이 최적임을 의미한다. 한편 탐색활동 초기의 보유예산($\rho = 0.06$)이 탐색비용보다 많았으나 시점 $t = 6$에서 보유예산($\rho = 0.01$)이 탐색비용보다 적어졌다고 한다면, 시점 $t = 6$부터는 선별 기준 $V_t^-(\rho)$을 가지



(a) $(1-\beta)a \le c$인 경우 $(c = 0.05)$

(b) $(1-\beta)a > c$인 경우의 $V_t^+(\rho)$와 $\alpha + \delta \ge b$인 경우의 $V_t^-(\rho)$의 그래프 (각각 $c = 0.03$, 0.55).

그림 1. $V_t^+(\rho)$와 $V_t^-(\rho)$의 그래프; $V_t^+(\rho)$와 $V_t^-(\rho)$는 시간 $t(\ge 1)$의 감소함수이다.

고 의사결정을 해야 한다. 이때 $V_t^-(\rho)$는 $V_t^+(\rho)$보다 높아진 값을 가지므로 예산이 줄어들수록 선별기준을 보다 완화해야 한다는 것을 알 수 있다.

(b)는 $0.04=(1-\beta)a>c=0.03$인 경우, $V_t^+(\rho=0.3)$가 시간 t가 증가하면 점점 감소하여 결국 확률분포 하한 $a(=1)$보다 작아짐을 보여주고 있다([정리 4.2](d)). 이 때 $t^*=\max\{t\,|\,V_t^+(\rho)>a\}$인 $t^*(=7)$가 존재하여 $t^*<t$일 경우 선별기준이 자산 분포 하한 a보다 낮아진다. 분포 하한 보다 낮은 자산은 존재하지 않기 때문에 탐색비용을 지불하여 탐색과정에 들어가는 것은 손실만을 초래할 뿐이므로 탐색활동 자체를 하지 않는 것이 최적이다. 그리고 $2.02\simeq\alpha+\delta\geq b=2$인 경우, $V_t^-(\rho=0.3)>b$이므로 아무리 높은 가격의 자산이 나타나더라도 그 자산을 바로 매입하여 탐색과정을 종료하는 것이 최적임을 보여주고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 제한된 예산 하에서 대출을 고려한 자산 매입 문제를 리콜 불가능한 최적 정지문제로서 모델을 수립하고 최적의사결정 정책의 구조적 성질을 규명하였다. 그 주된 결과는 다음과 같다.

1) 최적 선택 기준은 시간적으로 여유가 있을수록 그 기준은 낮추어 매입 자산을 선별하는 것이 최적이다. 2) 탐색비용보다 예산이 많을 경우 선택 기준은 남은 예산의 많고 적음과 독립적으로 설정해야 한다. 이는 예산이 많을수록 선택기준을 높이는 것이 최적이라는 기존 Ikuta(1992)의 연구 결과와 상이한 점으로 매입 문제와 매출 문제의 가정의 차이에서 생겨난 결과라고 할 수 있다. 한편, Ikuta(1992)에서 고려하지 않은 잔여 예산이 탐색비용보다 적을 경우에 대하여 선택 임계값이 보유 예산의 감소함수임을 밝혀 예산비용이 적을수록 선택기준을 높여 자산을 빠른 시점에 매입하는 것이 최적임을 보였다. 3) 이 외에서 최적 선택 임계값의 특성과 모델에서 고려하고 있는 매개변수에 대한 최적 선택 기준의 단조적 특성([정리 4.1])과 무한 계획기간에 있어서의 최적 선택 임계값의 구조적 성질 등에 대하여 분석하고 그 결과를 고찰하였다([정리 4.2]와 [정리 4.3]).

이 문제를 보다 현실적인 모델로 확장하기 위해서는 리콜가능성 고려, 탐색 스킵(skipping)에 대한 의사결정(Ee, 2009), 한 시점에서 두 개 이상의 자산이 나타날 경우(Morgan, 1985), 매입해야 할 자산이 두 개 이상인 경우 등을 고려할 수 있다.

참고문헌

Chun, Y. H. (1996), Selecting the best choice in the weighted secretary problem, *European Journal of Operational Research*, **92**, 135-147.

Ee, M. S. (2009), Asset-selling problem with an uncertain deadline, quitting offers, and search skipping, *European Journal of Operations Research*, **198**, 215-222.

Ikuta, S. (1988), Optimal stopping problem with uncertain recall, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **38**(1), 89-106.

Ikuta, S. (2004), An integration of the optimal stopping problem and the optimal pricing problem. *Discussion paper*, *No.1084*, *University of Tsukuba*, *Institute of Policy and Planning Sciences*.

Ikuta, S. (1992), The optimal stopping problem in which the sum of the accepted offer's value and the remaining search budget is an objective function, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35**(2), 172-193.

Kang, B. K. (1999), Optimal stopping problem with recall cost, *European Journal of Operations Research*, **117**(2), 222-238.

Karni, E. and Schwartz, A. (1977), Search theory: the case of search with uncertain recall, *Journal of Economic Theory*, **16**, 38-52.

Kohn, M. G. and Shavell, S. (1974), The theory of search, *Journal of Economic Theory*, **9**, 93-123.

Lippman, S. A. and McCardle, K. F. (1991), Uncertain search: A model of search among technologies of uncertain values, *Management Science*, **37**, 1474-1490.

Morgan, P. and Manning, R. (1985), Optimal search, *Econometrica*, **53**(4), 923-944.

McCall, J. J. (1965), The economics of information and optimal stopping rules, *Journal of Business*, 300-317.

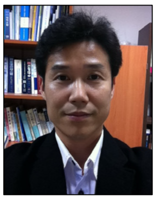
Nakai, T. (1982), Optimal search for an object with a random lifetime, *Journal of Operations Research Society of Japan,* **25**, 175-191.

Saito, T. (1999), Optimal stopping problem with finite-period reservation, *European Journal of Operations Research*, **118**, 605-619.

Ross, S. M. (1969), A problem in optimal search and stop, *Operations Research*, **17**, 984-992.

Weitzman, M. L. (1979), Optimal search for the best alternative, *Econometrica*, **47**(3), 641-654.

Yanai, H. (1966), On a class of optimal stopping rule problems, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **8**(2), 66-90.



손 재 동
한양대학교 산업공학과 학사
츠쿠바(Tsukuba)대학 사회공학연구과 석사
츠쿠바(Tsukuba)대학 시스템정보공학연구과 박사
현재 : 숭실대학교 산업정보시스템공학과 교수
관심분야 : stochastic decision process, optimal stopping problem, dynamic programming