韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2011. 11. 제 50권, 제 4호, 441-466.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2011, Vol. 50, No. 4, 441-466.

초등 영재 교수·학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구
- 기하적인 방법을 중심으로 -

최 근 배 (제주대학교)

I. 서 론

수학 영재들을 위한 교수·학습 방법은 어떤 것인가? 일반적인 학교에서의 방법과 차이점이 있는가? 수학영재성에 대한 개념이 모호하듯이 이러한 문제에 대한 답 또한 모호하고 따라서 다양할 수밖에 없지만, 우리의 관점을 수학이라는 분야에 집중한다면 어느 정도 수긍할 수 있는 답을 찾을 수 있다. 이를 테면, 수학자가 수학을 어떻게 탐구하는가? 아마도 '수학화(mathematisation)[1)]'를 위해서 탐구활동을 할 것이다. 결국, 수학화의 경험을 줄 수 있는 교수·학습 방법이 어느 정도 수긍할 수 있는 답이 될 수 있다.

Polya(1973)는 "증명하는 것을 배워야 하지만 추측하는 것도 배워야 한다." 는 입장에서 연역주의를 통해 비롯된 수학 교육의 문제를 해결하고자 문제해결 교육을 주장하였다. 이는 문제해결을 통한 수업(teaching via problem solving) 즉, 문제 해결을 위해서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 통해, 결과에 초점을 맞추는 것이 아니라 문제를 해결하는 과정에 초점을 맞춘 교육을 강조한 것이다.

Lakatos는 Polya의 뒤를 이어 추측을 증명하고 개선해 나가는 발견의 논리를 제시하여 수학 교육의 문제점을 해결하고자 하였다. 그는 연역체계를 유클리드(Euclid)적인 이론과 준경험적(quasi-empirical)인 이론으로 분류하였다. 유클리드적인 이론은 참인 공리에 의해 좌우되는 참인 지식 체계이며, 준경험적 이론은 잠정적으로 참인 가설로부터 연역되는 지식 체계인 것이다. 그러므로 준경험적 이론은 참임을 보장받지 못하는 잠정적인 추측이며, 거짓인 기초명제가 나타나지 않는 한 참인 것으로 인정되게 된다. 거짓인 기초 명제가 나타나면 가설은 거짓이 되고 따라서 이론 체계는 수정을 피할 수 없다. 이와 같이 수정되며 이론이 발전하면서 준경험적 이론은 점차 유클리드적 이론을 지향하게 된다(우정호, 강문봉, 1993; 강문봉, 2004).

이러한 Lakatos의 관점(비형식적 수학)은 발명되고 있는 과정에 있는 그대로의 수학(발생 상태로서의 수학)을 학생에게 제시해야 한다는 Polya의 주장(Polya, 1957)과 재발명에 의한 활동으로서의 수학(실행 수학)을 강조한 Freudenthal의 주장(Freudenthal, 1973)에 그 맥을 같이하고 있다고 볼 수 있다.

유클리드적인 이론에서는 합리주의에 근거하여 수학의 논리화, 형식화를 지향하기 때문에 수학적 언어로 간결하게 표현하면서 많은 것을 함축할 수 있는 장점이 있는 반면, 언제나 참인 명제로 인해 비판적 사고를 잃게 하는 문제를 야기한다. 문제해결에 있어 아무 의심 없이 받아들인 참인 명제를 암기하고 반복적으로 연습하여 해결하므로 수학적 사고를 기르기가 쉽지 않다.

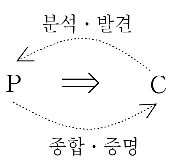
수학을 발견·발명할 때에는 분명 추측을 하고 많은 구체적인 예들을 살펴봄으로써 자신의 추측을 검사하고 오류를 수정해가는 과정이 주를 이루지만, 오랜 기간 동

* 접수일(2011년 7월 25일), 수정일(2011년 11월 3일), 게재확정일(2011년 11월 18일)
* ZDM분류 : D43, D53
* MSC2000분류 : 97D40, 97D50
* 주제어 : 등주문제, 수학화, 분석-종합

1) 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적 그리고 정신적 세계의 여러 '현상' 을 조직하는 수단으로 발명되고 발전되어 온 것이다. 이런 수학화의 과정은 원초적 현실에서 출발해서 현상과 본질의 교대 작용에 의해 계속적으로 본질을 추구해 나가는 조직화의 과정이다. 즉, 수학은 현상을 조직하기 위한 수단으로 발생된 것으로 수학화의 과정은 한 수준에서의 정리 수단인 본질이 그 다음 수준에서는 현상, 곧 연구의 대상이 되는 과정을 통해서 수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정이다(Freudenthal, 1973; 강문봉 외(2005)에서 재인용).

안 이루어진 수학을 발견하는 과정을 무시한 채 결과만 가지고 학습을 한 결과, 발견 및 비판 능력을 잃게 되는 문제점이 생겼다.

학교수학은 교사의 주도에 의한 직접교수법을 주로 택하고 있으며, 간접교수법보다 선호하는 경향이 있다. 주된 이유 중 하나는 교사 자신의 수학과 관련된 과거 학습경험이 원인이다. 실제로, 교사의 수학에 대한 학습 경험 중에는 수학은 논리적인 연역체계로 '잘 정제된 교과서의 내용 구조를 그대로 따라가면 원하는 결과를 얻을 수 있다.'라는 이미지가 있다. 다시 말해서, 학교수학에서는 결과에 대한 충분조건을 결과의 분석(analysis)을 통해서 얻는 것이 아니라 단지 잘 구조화된 '사고실험'이 없는 누군가(교과서 저자 등)가 만들어 놓은 연역적인 증명의 맥락(종합; synthesis)에서 접한다는 것이다(<그림 I-1> 참조). 따라서 교사 주도의 직접교수법에서는 학생들에게 발견적 탐구경험을 줄 수 있는 학습이 종합의 맥락에서는 사장될 가능성이 많다.



<그림 I-1> 분석-종합

따라서 수학적으로 문제를 분석과 종합을 통해서 스스로 조직화(국소적 조직화)하는 능력을 기를 수 있는 교수・학습방법이 필요하다.

이 논문에서는 등주문제의 답을 찾는 방법 중에서 기하적인 내용을 중심으로 먼저 역사적 사실을 살펴보고, 이를 바탕으로 초등영재 수학학습 프로그램을 디자인하고자 한다. 여기서 말하는 디자인이란 학습내용을 어떻게 구성할 것인가를 의미한다. 내용구성은 주로 등주문제의 역사적 사실이, 학습방법은 국소적 조직화의 능력을 함양하기위한 분석법이 그 바탕이 된다. 또한 역사적 증명법을 그대로 따라하는 것보다는 역사적 증명법의 아이디어를 기본으로 하되 현대수학을 기준으로, 초등학생의 수준을 고려하여 어느 정도의 수정과 추측을 위한 학습도구(the Geometer's Sketchpad; GSP)를 필요로 한다.

이 논문에서의 실제 수업장면은 분석-종합법을 바탕으로, ○○대학교 영재교육원 초등수학반, 2회 6시간 영재수업 비디오 촬영을 근거로 작성되었고, 가상의 수업예시는 여건상 영재교육원에서 다루지 못한 내용으로, 가능한 분석-종합법을 바탕으로 한 수업상황을, 학생과 교사와의 발문을 통해서 구성하였다.

II. 등주문제

등주문제는 일반적으로 다음과 같이 진술된다.

> 같은 길이의 둘레를 가지는 평면도형 중에서 가장 큰 넓이를 가지는 도형은 무엇인가?

이 논문에서 등주문제와 관련된 역사적 사실의 기술은 Demjanenko(2008), Hildebrandt & Tromba (1996), Siegel(preprint), Tapia(2009)와 Blasjo(2005)을 참고하였다.

등주문제는 이른 그리스시대부터 잘 알려진 첫 번째 최적화 문제 중 하나였다. 이와 같이 둘레의 길이와 넓이사이의 관계성과 연관된 이슈는 땅을 다루는 것에 특히 중요한 것이었고, 이 둘 사이의 잘 못된 관계에서 비롯된 오류의 유리한 점을 이용해서 현명한 사기꾼들이 사람들을 속여 토지를 빼앗기도 하였다.

B.C. 400년 경 Tucydides를 비롯한 몇몇 역사가는 도시 주위를 한 바퀴 돌아오는데 걸린 시간으로 그 도시의 크기를 재었다. A.D. 400년 경 수학 역사가인 Proclus는 "도시를 둘러싸고 있는 담의 길이로 그 도시의 크기를 측정하는 것과 섬의 크기를 섬 주위를 항해하는데 걸린 시간으로 재는 것"에 대해서 그의 그리스 선조인 학자를 조롱하였다. 고대 그리스 철학자들은 창조주가 지구를 창조할 때 3-D 등주문제(3차원 등주문제)를 풀었다고 믿었다.

등주문제의 주목할 만한 문헌적 역사는 Virgil의 Aeneas와 Dido여왕의 전설까지 약 21세까지 거슬러 올라간다.

등주문제의 첫 번째 완전한 증명은 해석학과 미・적분을 이용한 Weierstrass와 Edler에 의해서 이루어 졌으며, 그 후 많은 다른 또는 진보된 증명들이 발견되었다.

수순기하적인 증명은 고대 그리스에 알려졌고, A.D.

4세기경에 Pappus에 의해 기록되었으며, 또한 그는 Zenodorus의 등주문제 결과를 신뢰하였다. 현재의 수학적인 관점에서 그들의 증명이 심하게 완전하지 못하였다. 완전한 증명에 대한 현대의 연구는 고대 그리스 연구가의 주장이 불충분하다고 깨달은 Steiner의 자취라고 할 수 있다. 1841년 Steiner는 순수 유글리드 기하를 사용한 다섯 개의 우아하고 개선된 증명 절차를 발표하였다. Steiner 자신은 완전한 것으로 보았지만, 그 시대의 영향력이 있는 수학자인 Weierstrass는 그렇게 생각하지 않았으며 해석학과 미·적분을 이용하여 그 문제를 정확하게 해결하였다.

여기서는 기하학적인 관점을 중심으로 한 (초등)영재 프로그램을 디자인 할 목적으로, 등주문제의 역사를 간단하게 살펴보고 증명에 사용된 아이디어를 고찰한다.

1. 간단한 고대 역사

가. Dido의 문제

Dido의 문제는 고대의 가장 유명한 수학문제 중 하나로 고대의 로마 시인 Virgil의 장편 서사시 Aeneas에 기록되어 있다. Dido는 그리스·로마 신화에 나오는 Aeneas를 사랑한 아프리카 북부 해안에 있는 도시 Carthage의 전설적인 여왕이다. 원래 Dido는 Tyre의 왕의 딸이었지만, 왕이 죽은 후 왕위를 계승한 그녀의 오빠에게 남편이 살해를 당하자 오빠에게서 도망쳐 아프리카의 튀니지 해안으로 가게 되었다. 그곳에서 Dido는 원주민들에게 한 마리의 황소가죽으로 둘러 쌀 수 있는 정도의 토지를 나누어 달라고 부탁했다. 원주민들이 쾌히 승낙하자 Dido는 황소 가죽을 잘라 가는 띠를 만들어 토지의 영역을 (반)원으로 표시했다.[2] 같은 길이의 둘레를 갖는 도형 중에 원이 가장 많은 넓이를 갖고 있기 때문이다. Dido는 그 안에 성채를 쌓고 Carthage를 건설했다.

<그림 II-1> 황소 가죽을 가는 띠로 만들고 가장 큰 영역을 만들고자 노력하는 Dido의 사람들
(S. Hildebrandt & A. Tromba, 1996, p. 65; Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historiche Chronica*, Frankfurt a.M., 1630.)

<그림 II-2> Dido의 극대 원리가 적용된 중세 쾰른(Cologne)의 지도
(S. Hildebrandt & A. Tromba, 1996, p. 67)

나. Zenodorus

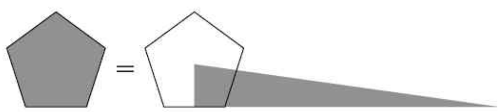
Zenodorus (약 200 B.C - 약 140 B.C)는 고대 그리스 수학자였다. 그의 가장 중요한 저술은 '등거리 도형에 관하여(on isometric figures)'인데 불행하게도 분실되었다. 이 저술에서 그는 같은 크기의 둘레 길이를 갖지만 모양이 다른 도형을 연구하였다. 그의 저술 일부분은 Pappus와 알렉산드리아의 Theon과 같은 다른 수학자에 의한 참고 문헌을 통해서 남아있었다.

2) 이 사건이 현대수학에 기념화 된다. 일정한 경계로 최대넓이를 둘러싸는 '등주문제(isoperimetric problem)'는 종종 현대 변분계산에서 'Dido 문제'로 언급된다.

Zenodorus에 의하여 증명된((1)과 (3); Tapia, 2009) 또는 증명 없이 추측된((2)과 (4); Tapia, 2009) 가장 중요한 명제는 다음과 같다.

(1) 같은 크기의 둘레의 길이를 가지는 정다각형 중에서 더 많은 변(각)을 가지는 것이 더 큰 넓이를 가진다.
(2) 원은 같은 둘레의 길이를 가지는 임의의 정다각형보다 더 넓은 넓이를 가진다.
(3) 같은 둘레의 길이를 가지고 같은 수의 변을 가지는 다각형 중에서 등각·등변 다각형(다른 말로 정다각형)이 가장 넓은 넓이를 가진다.
(4) 같은 넓이의 겉넓이를 가지는 입체도형 중에서 구(sphere)가 가장 큰 부피를 가진다.

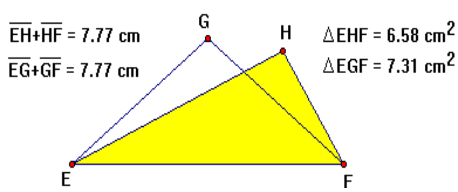
(1)의 증명에서 사용된 핵심 아이디어는 <그림 II-3>과 같다.



<그림 II-3> 등적변형(Blasjo, 2005)

이와 같은 방법은 일반적인 정다각형에 적용될 수 있으며, 둘레의 길이가 일정한 정다각형의 넓이비교는 단지 변심거리의 비교로 판정할 수 있다. 실제로, 변의 수가 많아질수록 변심거리가 더 커짐을 알 수 있다.

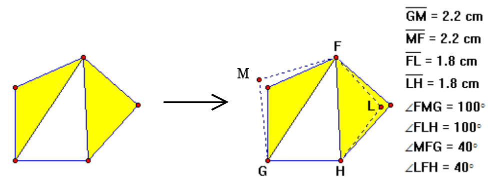
(3)의 증명에는 두 가지의 아이디어가 사용되고 있다. 하나는 등변을 증명하기 것으로 핵심적인 아이디어는 <그림 II-4>와 같다.



<그림 II-4> 등변을 밝히는 핵심 아이디어

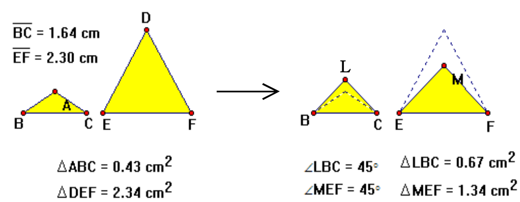
다른 하나는 등각을 밝히기 위한 것으로 두 삼각형의 닮음을 이용하고 있다. 이때 사용된 것이 <그림 II-5>와 같이 둘레의 길이의 재분배이다. 그러나 여기에는 이러한 주장을 위한 다음과 같은 보조정리가 필요하다.

보조정리. 만일 두 이등변삼각형이 밑변의 길이가 다르고 다른 변은 길이가 모두 같다면, 증명에서처럼 두 삼각형의 닮음을 만들 때 두 삼각형의 넓이의 합은 증가한다.



<그림 II-5> 둘레의 재분배

그러나 Zenodorus는 위의 보조정리를 임의의 두 닮지 않은 이등변삼각형을 허용함으로써 좀 더 일반적으로 서술하고 있다. 즉, 앞서 증명한-극대 다각형은 등변이다-것의 이점을 사용하지 않고 있다. 이러한 일반화는 오류이다. 실제로, <그림 II-6>에서 두 이등변삼각형 ABC와 DEF의 넓이의 합은 $2.77cm^2$이지만 변형된 두 닮은 이등변삼각형 LBC와 MEF의 넓이 합은 $2.01cm^2$로 넓이가 감소하였다.



<그림 II-6> Zenodorus의 보조정리의 반례(Blasjo, 2005)

2. Steiner

스위스 수학자인 Steiner(Jakob Steiner; 1796-1863)는 등주문제에 관하여 기하적인 방법을 이용한 다섯 가지의 증명을 제공하였다. 그의 모든 증명은 해의 존재를 가정하고 있으며 증명에 사용된 주된 전략은 다음과 같다.

F를 일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 그 넓이가 최대인 도형이라고 하자. F가 원이 아니라면 넓이를 더 크게 할 수 있다.

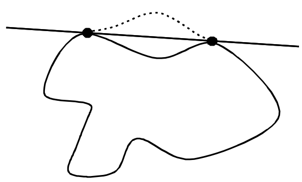
Steiner는 해의 존재성을 증명하지 못함으로써 등주문제의 완전한 증명에 성공하지 못하였다. 여기서는 3가지의 잘 알려진 증명법을 고찰한다.

가. 4-힌지(four-hinge) 증명

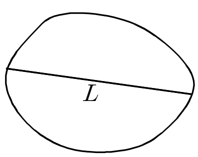
Steiner의 4-힌지 방법은 핵심 아이디어는 다음과 같다.

일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 그 넓이가 최대인 도형을 F라고 하자.

단계 1: F는 볼록(convex)곡선이다. 이유는

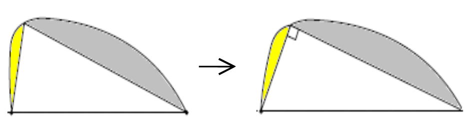


단계 2: F의 둘레의 길이를 반으로 나누는 선분 L은 F의 넓이도 반으로 나눈다.



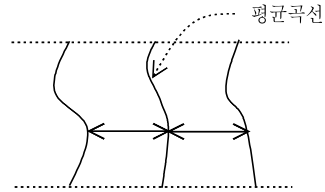
만일 넓이를 반으로 나누지 않으면 더 큰 반쪽을 선분 L로 대칭시키면 둘레의 길이를 변화시키지 않고 넓이를 더 키울 수 있다. 이것은 F의 선택에 모순이다.

단계 3: F에서 곡선 반쪽만 생각하며, 이것이 반원이다. 만일 반원이 아니라면 선분 L에 의해서 결정되는 내접각(inscribed angle)이 직각이 아닌 점이 존재한다. 그러면 넓이를 더 키울 수 있다.



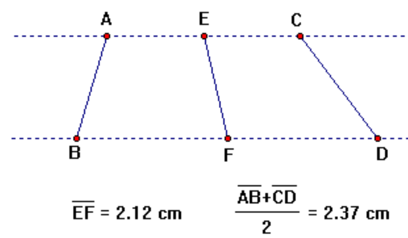
나. 평균 경계(mean boundary) 증명

주어진 두 곡선의 평균곡선은 두 곡선 사이의 중간에 놓여있는 곡선을 의미한다.



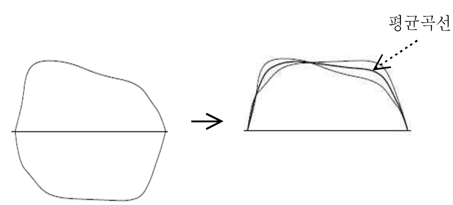
<그림 II-7> 주어진 두 곡선의 평균곡선

평균곡선의 길이는 주어진 두 곡선의 길이들의 평균보다 작거나 같다. 여기서 같은 경우는 주어진 두 곡선이 같은 경우이다. 이유는 곡선들을 무한히 작게 자르면 <그림 II-8>와 같은 경우로 귀착된다.



<그림 II-8> 주어진 두 직선의 평균곡선

일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 그 넓이가 최대인 도형 F를 택하고 어떤 직선 L로 F의 둘레를 반으로 나누자. 이 경우, 앞에서 논의한 것처럼, 선분 L은 F의 둘러싸인 부분의 넓이도 반으로 나눈다.



<그림 II-9> 평균곡선(Blasjo, 2005)

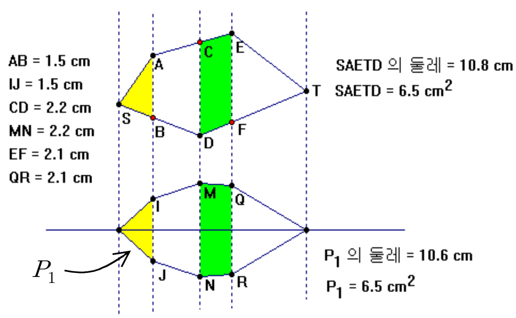
<그림 II-9>에서 평균곡선의 길이는 두 곡선 길이의 평균(이 경우 F의 둘레의 길이의 반)보다 작다. 그러나 평균곡선의 구성상 둘러싸인 부분의 넓이는 F의 경우와 같다. 따라서 F의 둘레의 길이를 반으로 나누었을 때, 두 반쪽은 다른 모양일 수가 없다. 왜냐하면 두 반쪽이 다른 모양이면 <그림 II-9>와 같이 F와 모양이 다른

평균곡선을 만들 수 있고, 이 평균곡선은 둘러싸는 넓이는 F와 같으면서 더 짧은 길이를 가진다. 이것은 모순을 이끈다. 이러한 모순에서 탈출하려면 F는 원이 되어야만 한다.

다. 눈송이 만들기(snowball-packing) 증명

기본적인 아이디어는 우리가 눈을 뭉칠 때처럼 처음에는 울퉁불퉁한 모양이 점점 동그랗게 변해가도록 한다는 것이다. 다시 말해서 원으로 변형시키는 동안, 넓이는 변화가 없으면서, 둘레의 길이는 점점 작아지도록 한다는 것이 눈송이 만들기 증명의 핵심적인 아이디어이다.[3]

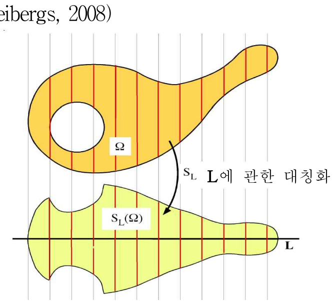
여기서는 다각형인 경우에 한정하여 눈송이 만들기의 아이디어를 이해하도록 한다. 먼저 볼록도형으로 시작하여 어떤 직선에 대칭이 되도록 변형한다. 다각형인 경우로 설명하면 아이디어는 <그림 II-10>과 같다.



<그림 II-10> 눈송이 만들기

<그림 II-10>을 살펴보면, 다각형의 꼭짓점과 주어진 직선을 이용하여 주어진 직선에 대칭인 도형으로 변형한다. 실제로 이러한 변형에서는 두 가지만 나타난다.

3) 일반적으로 Steiner의 대칭화(Steiner's symmetrization)라고 한다.(Treibergs, 2008)



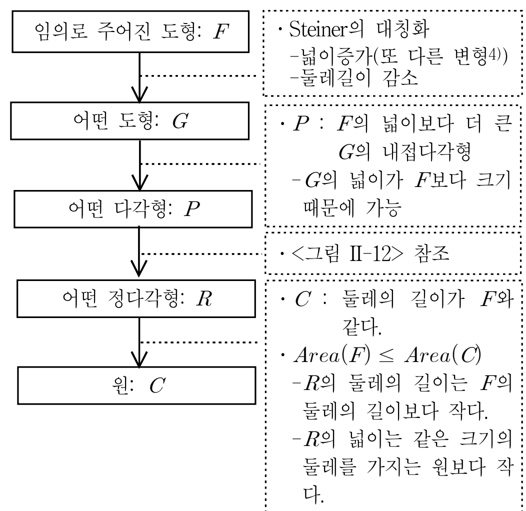
- 삼각형이 넓이가 같고 둘레의 길이가 더 짧은 이등변삼각형으로 변형과
- 사다리꼴이 넓이가 같고 둘레의 길이가 더 짧은 등변사다리꼴로의 변형이다.

따라서 이와 같은 변형에서 전체적으로 넓이의 변화는 없지만 둘레의 길이는 더 짧아진다.

대칭축을 달리하면서 이와 같은 변형을 연속적으로 수행하면 결국 임의의 축에 대칭인 원에 도달할 수 있다.

3. Edler

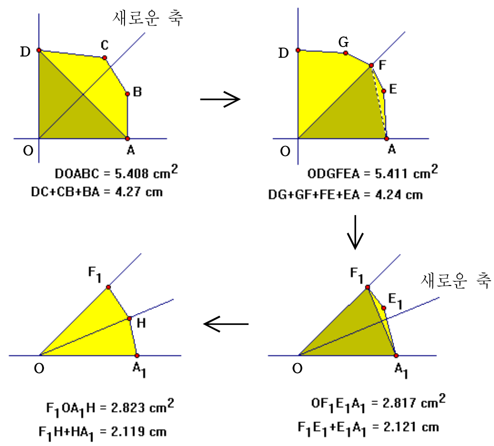
둘레의 길이가 일정한 평면 도형 중에서 넓이가 최대인 도형의 존재한다는 존재성의 가정 없이 Edler는 1882년에 특정한 둘레의 길이를 가지는 원이 아닌 평면도형은 그 원보다 더 작은 넓이를 가진다는 사실을 증명하였다.



<그림 II-11> Edler의 유한 존재증명의 절차

4) Steiner의 대칭화는 넓이를 보존하기 때문에 넓이를 증가시키는, F의 둘레의 길이를 증가시키지 않는, 변형이 필요하다. 참고문헌 (Blasjo, 2005, 554쪽)에서 이 부분을 간과한 서술을 하고 있는 것 같다. 실제로 이 논문에서는 Steiner의 대칭화로 넓이의 증가를 논하고 있다: Apply Steiner symmetrization (i.e., snowball-packing) to get a figure with greater area.

이를 Edler의 유한 존재증명(Edler's finite existence proof)이라고 부르며, 개략적인 증명의 절차는 <그림 II-11>과 같다.



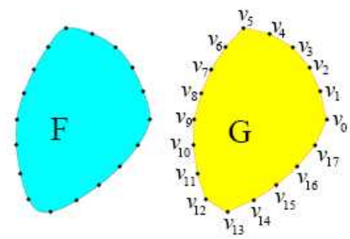
<그림 II-12> 유한 번의 활동으로 주어진 다각형을 어떤 정다각형으로 만들기

<그림 II-12>의 첫 번째 다각형은 어떤 다각형 P에 x-와 y-축에 있어서 'Steiner의 대칭화'와 '빗변을 움직인 이등변삼각형화'를 통해 만들어진 다각형의 1사분면을 나타고 있으며, 나머지 부분은 대칭성으로 그 모양을 알 수 있다. 두 번째 다각형은 이전 다각형의 새로운 축(이전 두 축사이의 각의 이등분선)에 의한 Steiner의 대칭화이다. 세 번째 다각형은 이전 다각형에서 만들어진, 원점(O), 새로운 축과 다각형이 만나는 점(F), 이전 축과 다각형이 만나는 점(A)로 만들어 진 삼각형의 이등변삼각형으로의 변화이다. 끝으로 마지막 다각형은 이전 다각형의 새로운 축에 의한 Steiner의 대칭화이다.

<그림 II-12>와 같이 유한 번의 단계를 통해서, 축위에 있는 않는 꼭짓점이 없음을 알 수 있으며, 모든 삼각형이 이등변삼각형이고 따라서 정다각형을 얻을 수 있다. 실제로, <그림 II-12>에서는 정 16각형이다.

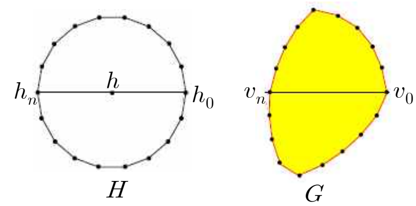
4. Lawlor의 절개형(Lawlor's dissection) 증명

둘레의 길이가 p인 볼록영역을 F 라고 하자. F의 경계를 따라서 $2n$개의 점 $v_0, v_1, \ldots, v_{2n-2}, v_{2n-1}$을 정하고 이러한 연속된 각 점을 연결하여 만든 다각형을 G라고 하자. 여기서 F의 경계에 놓인 임의의 연속된 두 점사이의 거리를 $\frac{p}{2n}$이라고 하자.(<그림 II-13> 참고)



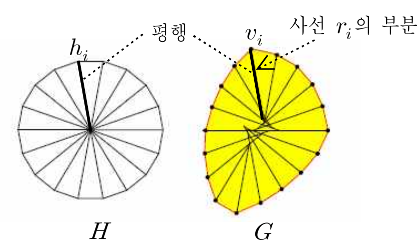
<그림 II-13> 볼록영역과 내접다각형(Siegel, preprint)

중심이 h인 정 $2n$-각형 H를 그리자. 여기서 각 꼭짓점을 $h_0, h_1, \ldots, h_{2n-2}, h_{2n-1}$로 정하자. 당연히 각 변의 길이는 $\frac{p}{2n}$이다. 두 다각형 G와 H, 필요하다면, 회전을 시켜 두 선분 $\overline{v_nv_0}$와 $\overline{h_nh_0}$이 평행하고 수평선이 되도록 하자.(<그림 II-14 참조>)



<그림 II-14> 정다각형과 내접다각형(Siegel, preprint)

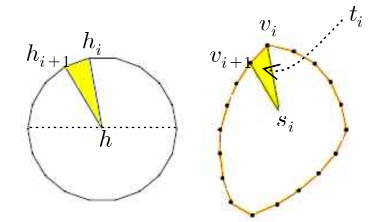
정다각형 H의 각 꼭짓점에서 중심 h로의 선분을 그리고 G의 각 꼭짓점 v_i에서 선분 $\overline{h_ih}$에 평행한 사선(ray) r_i를 그린다.(<그림 II-15> 참조)



<그림 II-15> 사선(Siegel, preprint)

이제, $t_i(0 \le i \le 2n-1)$를 다음과 같이 정의하자.

$$t_i = \begin{cases} \triangle v_i v_{i+1} s_i & <\text{그림 } II-16> \text{인 경우} \\ \overline{v_i v_{i+1}} & \text{두 사선} r_i \text{와} r_{i+1} \text{이 만나지 않는 경우} \end{cases}$$



<그림 II-16> 두 사선 r_i와 r_{i+1}이 s_i에서 만나는 경우

이로부터 다음을 알 수 있다.

(1) t_i의 넓이는 $\triangle h_i h_{i+1} h$의 넓이보다 작거나 같다. 실제로, <그림 II-16>에서 두 삼각형의 밑변의 길이에서는 $|v_i v_{i+1}| \le |h_i h_{i+1}| = \dfrac{p}{2n}$이 성립하고, 두 각 $\angle h_{i+1} h h_i$ 와 $\angle v_{i+1} s_i v_i$은 같다.
(2) 영역 $t_0, t_1, \ldots, t_{2n-1}$는 다각형 G를 덮는다.

(2)와 관련된 사실은 기하적인 방법으로 어렵지 않게 밝힐 수 있지만(Siegel, preprint) 여기에서는 생략하기로 한다.

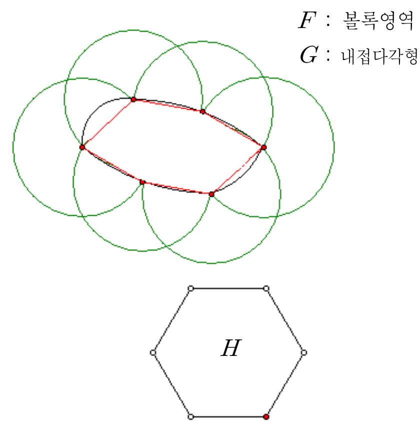
따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이}(G) &\le \text{넓이}(t_0) + \text{넓이}(t_1) + \cdots + \text{넓이}(t_{2n-1}) \\ &\le 2 \times n \times \text{넓이}(\triangle h h_0 h_1) = \text{넓이}(H) \end{aligned}$$

여기서 n을 무한히 증가시키면 G들은 주어진 곡선 F로 수렴, 이에 대응하여 정 $2n$ 각형 H는 둘레의 길이가 p인 원으로 수렴한다. 넓이 또한 그렇게 된다. 즉, n이 커짐에 따라

$$\text{넓이}(G) \to \text{넓이}(F), \quad \text{넓이}(H) \to \text{넓이}(C_p)$$

여기서, C_p는 둘레의 길이가 p인 원을 나타낸다. 이러한 논의를 좀 더 구체적으로 논의할 수 있다. 핵심적인 아이디어는 <그림 II-17>과 같이 오차의 한계를 이용하는 것이다.



$$\begin{aligned} \text{넓이}(F) &\le \text{넓이}(G) + 6 \times \pi \times \left(\frac{p}{6}\right)^2 \\ &\le \text{넓이}(H) + 6 \times \pi \times \left(\frac{p}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

<그림 II-17> 둘레의 길이가 p인, 볼록영역 F와 정다각형과의 넓이 관계

III. 등주문제 내용구성

수학의 연역적 접근을 반대하는 주요한 논거는 교육에 관심을 가진 위대한 수학자들이 주장한 '역사 발생적 원리'이다.(우정호, 2006) 이들 수학자들은 수학의 역사적 발생에 따라 처음에는 어느 정도 직관적인 상태이지만 점차적으로 형식화되어 연역적인 형식체계에 이르도록 하는 것이 자연스러운 지도방법이라고 주장한다. 결국 역사 발생적 원리는 최종적으로 형식화된 또는 연역적 체계에 따른 수학을 지도하는 것이 아니라 학생들로 하여금 발생상태의 수학을 점차적으로 형식화해 나아가는 수학화의 경험을 줄 수 있는 교수・학습을 의미하고 있다.

역사 발생적 원리에 따른 등주문제의 발생적 측면과 수학자가 수학하듯이 곧 국소적 조직화(강문봉 외 12인, 2005; 우정호, 2006)의 경험을 줄 수 있는 분석-종합법(강문봉, 1992; 우정호, 2006)을 기본적인 바탕으로 등주문제를 디자인 한다.

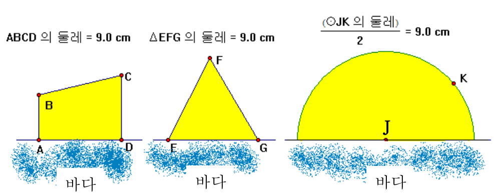
연구자가 속한 영재교육원 초등 수학영재반에서는 등

주문제와 관련하여 2개 프로그램 6시간으로 수업을 진행하고 있다. 주로 Zenodorus의 아이디어를 바탕으로 한 다각형의 등주문제(2009년 심화과정부터 현재까지)와 일반적인 등주문제의 접근방법(2004년 심화과정부터 현재까지)인 Steiner의 4-힌지 증명법을 바탕으로 구성하고 있다. 여기서는 이 두 가지의 방법을 포함하여 연구자의 경험을 바탕으로 시간적인 여건상 다루지 못한 등주문제의 또 다른 기하적인 증명법을 디자인 한다.

1. 문제의 추출

Dido의 문제를 통해서 학습자 스스로가 ‘등주문제’를 추출하도록 한다.

탐구문제 1: (Dido의 문제) Dido는 Tyre의 왕의 딸이었지만, 왕이 죽은 후 왕위를 계승한 그녀의 오빠에게 남편이 살해를 당하자 오빠에게서 도망쳐 그를 따르는 많은 사람들과 함께 여러 척의 보트에 나누어 타고 항해를 하여 아프리카의 튀니지 해안에 도착하게 되었다. 그곳의 원주민 들은 새로운 사람들의 등장을 그다지 반기지는 않았다. 그러나 그곳에서 Dido는 그들의 왕과 거래를 성사시켰다. 그녀는 항소 한 마리의 가죽으로 표시(두 지역간 경계)할 수 있는 만큼의 땅에 공평한 돈을 그에게 지불하였다. 거래가 끝난 후 원주민의 왕은 그녀(Dido)보다 더 많은 것을 얻었다고 생각했지만 곧 그녀가 더 현명하였다는 것을 깨달았다. 원주민의 왕이 이렇게 생각한 까닭은 무엇이었을까요? 결국 Dido의 전략은 무엇이었을까요?



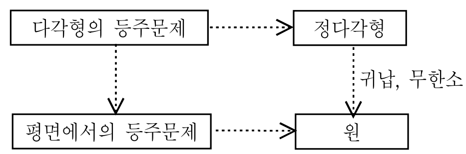
<그림 III-1> Dido의 문제

일반적으로 등주문제는 ‘음료수 캔이 왜 원통형일까요?’등과 같이 현실적인 문제로 학습에 대한 동기부여의 목적으로 시작하는 경우가 흔하며, 그 답은 ‘원’이다.

그러나 위와 같이 등주문제의 역사적 관점으로의 접근방식이 오히려 더 흥미롭고 또한 문제의 원형을 볼 수 있다는 점에서 좋을 수 있다. 실제로, Dido의 문제는 <그림 III-1>과 같이 해안선을 고려해야 함으로 답은 ‘원’이아니라 ‘반원(semicircle)’이다.

2. 내용 구성

등주문제의 내용구성은 근본적으로 역사 발생적 측면을 고려한 직관적인 방법에서 연역적인 방법으로의 순서를 따른다. 또한 이러한 방법으로 내용을 구성할 때, 학생들이 처한 현실-교육과정의 문제 등-을 고려한다.



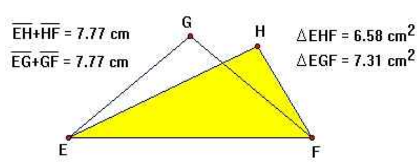
<그림 III-2> 등주문제의 내용구성 구조

가. Zenodorus

앞서 분석한 Zenodorus의 문제를 (3) → (1) → (2)의 순서로 초등수준에 맞게 좀 더 구체화하여 구성한다.

1) 문제 (3)의 구성

문제 (3)의 구성에 있어서, Zenodorus의 증명에서 사용된 전략을 살펴보면, 둘레의 길이가 일정한 다각형들 중에는 넓이가 가장 큰 다각형 P가 존재함을 가정하고, P는 정다각형이라는 결론을 내리고 있다. 특히, ‘등변’임을 밝힐 때 사용된 전략은 <그림 III-3>과 같고, 또한 이 전략은 우리의 구성에 있어 ‘등각’을 밝히는 경우에도 중요하게 사용된다.



<그림 III-3> 등변을 밝히는 핵심 아이디어

우리 경우에는 문제 (3)의 구성에 있어서, 먼저 ‘삼각형의 등주문제’를 해결하고, 해결과정 중에 나타난 아이

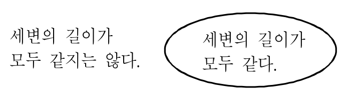
디어를 이용하여 ‘사각형의 등주문제’를 해결한다. 또한 ‘오각형의 등주문제’를 해결하는 과정을 통하여 ‘일반적인 다각형의 등주문제’를 해결한다.

① 삼각형의 등주문제

탐구문제 2: 일정한 둘레의 길이를 가지는 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형은?

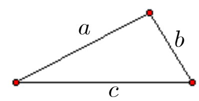
다음은 삼각형의 등주문제와 관련된 영재수업의 일부분5)이다.

T: 일정한 둘레의 길이를 가지는 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형은 무엇일까요?
S: 정삼각형이요.
T: 혹시 이유를 설명할 수 있는 사람? 증명을 본적이 있는 사람?
S: …
T: 자, 정삼각형이라는 결론을 내리기 위해서 어떻게 하면 되나요?
S: 세변의 길이가 같다.
T: 그런데 세변의 길이가 같다는 사실은 무엇을 통해서 주장해야 하나요? 아무른 근거 없이 주장하면 안 되겠죠?
S: 예
T: 어떤 근거를 가지고 주장을 해야 하나요?
S: 삼각형의 둘레가 일정, 넓이가 최대
T: 누구 아이디어 있나요?
S: …
T: 수학에서는 직접적인 해결책이 없는 경우 뒤집어 생각해보면 해결되는 경우가 많아요? 그림을 그려봅시다.



<그림 III-4> 범주 나누기

세변의 길이가 모두 같지 않은 모든 경우에 모순이 생기면?
S: 세변의 길이가 같다.
T: 문제를 단순화하기 위해서 T를 일정한 둘레의 길이를 가지는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형이라 둡시다. 그러면 주장은 무엇이지요?
S: T는 세변의 길이가 모두 같다.
T: 편의상 세변과 세변의 길이를 같은 기호 a, b, c로 사용합시다. 세변의 길이가 모두 같지는 않은 경우는 어떤 경우입니까?
S: $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, $a \neq b \neq c$
T: 먼저, $a \neq b$인 경우를 생각해보세요.



S: …
T: 높이가 최대인 경우는 언제인가요?
S: … c의 중점, 두 변의 길이를 같게 만들 때
… 중략 …

삼각형의 등주문제를 해결하기 위한 위의 수업에서 ‘존재성의 문제’를 가정하고 있다. 즉, ‘일정한 둘레의 길이를 가지는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형이 존재한다.’ 이 존재성의 문제를 가정하면 삼각형의 등주문제는 어렵지 않게 해결되며, 또한 일반적인 등주문제에서도 존재성은 중요한 역할을 한다. 역사적으로 살펴보더라도 존재성의 문제는 항상 수학자들에게 골치 아픈 문제였다.

다음은 존재성 문제를 어떻게 인식하고 활용하고 있는지와 관련된 것이다. 아래와 같이 탐구문제 A를 통해서 탐구문제 B(삼각형의 등주문제)를 해결하도록 유도하였다.

탐구문제 A. 고정된 길이의 한 변과 나머지 두 변의 길이의 합이 일정한 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형은?
탐구문제 B. 일정한 둘레의 길이를 가지는 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형은?

그러나 탐구문제 A의 아이디어(<그림 III-3>)를 통해서 세 변의 길이가 같다는 사실을 유도하는 학생이 거의 없었으며, 심지어 학교 영재교육을 담당하는 교사도 그 논리가 부족하였다. 다음은 영재교육을 담당하는 어느 교사와의 대화이다.

R: 삼각형의 등주문제의 답은 무엇이라고 생각합니까?

5) ○○대학교 영재교육원 초등수학반의 2011년 4월 30일 영재수업 비디오 촬영을 근거로 작성하였다.

T: 정삼각형입니다. 실제로...
R: 탐구문제 A의 답은 이등변 삼각형입니다.[6] 이 문제의 아이디어를 사용하여 삼각형의 등주문제를 해결할 수는 없을까요?
T: 두 변이 같음, 즉 적어도 이등변삼각형임을 보일 수는 있지만 세변이 모두 같음을 보일 수는 없는 것 같은데요? 자꾸 빙빙 돕니다. 세 개의 변 중에서 두 개의 변은 같게 만들 수 있는데...
R: 근본적인 문제로 돌아가 봅시다. 삼각형의 등주문제가 성립할까요? 즉, 둘레의 길이가 일정한 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형이 존재할까요?
T: ???
R: 근본적인 질문을 한 이유가 무엇이라고 생각합니까?
T: ???

… 중략 …

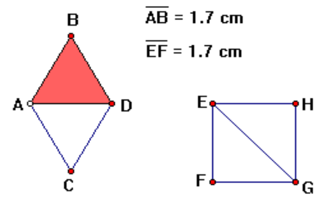
② 사각형의 등주문제

탐구문제 3: 일정한 둘레의 길이를 가지는 사각형 중에서 넓이가 가장 큰 사각형은?

탐구문제 3의 문제와 관련하여, 실제적 영재수업에서 나타난 학생들의 문제점을 도출하고, 이로부터 이 탐구문제를 어떻게 디자인할 것인가를 생각한다.

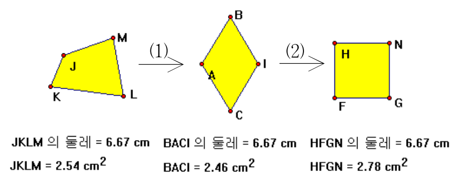
실제적 영재수업(조별 활동)에서 나타난 학생들 반응을 요약하면 다음과 같다.[7]

- 특수한 사각형인 경우에 한정하여 문제해결: 탐구문제 1에서 해결한 삼각형의 등주문제를 이용, 정삼각형 두 개를 붙여 마름모를 만들고 같은 길이의 변을 가지는 정사각형과 넓이를 비교[8]



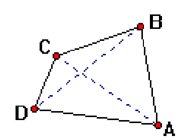
실제로, 이 학생의 경우 정삼각형 두 개로 구성된 사각형의 경우로 한정해서 문제를 풀고 있다.

- <그림 III-3>의 아이디어를 사용하고 있지만 논리적이지 못함: 탐구문제 1을 해결할 때, 사용되어진 논리를 사용하지 못하고 있다. 실제로, <그림 III-5>에서 (2)의 경우는 대체로 잘 해결하였으나 (1)의 경우는 논리성이 부족하였다.



<그림 III-5>

T: 누구 나와서 자신의 아이디어를 설명해보세요.
S: 아래 그림에서 선분 DC와 선분 CB를 <그림 III-1>의 아이디어를 사용해서 같게 만들고, 또한 선분 DA와 선분 AB도 같게 만들 수 있습니다. 그리고 선분 BC와 선분 AB를 같게... 따라서 모든 선분의 길이가 같습니다.



T: 그런데 선분 BC와 선분 AB를 같게 만들 때, 이미 만든 같은 길이의 선분 DC와 선분 CB의 길이가 달라지지 않을까요?
S: …
T: 아이디어가 빙빙 돌지요?[9]
S: 예

6) 탐구문제 A를 해결하는데 어려움을 겪었다. 아마도 이것은 초등영재 프로그램에서는 등주문제의 결과를 응용하는 것에만 초점을 두고, 정당화의 문제에 대해서는 다루지 않음에 기인한다고 생각된다.

7) ○○대학교 영재교육원 초등수학반의 2011년 4월 30일 영재수업 비디오 촬영을 근거로 요약하였다.

8) 정삼각형 ABD와 직각삼각형 EFG의 넓이를 비교할 때, 기하적인 방법보다 산술계산을 이용하고 있다. 이러한 점에서 학생들의 공간감각 기르기 활동을 좀 더 강조할 필요가 있다.

9) 삼각형의 등주문제에서 <그림 III-4>와 같은 아이디어를 사용하리라고 생각하였지만 초등학생이라 논리성과 이미 알고 있는 정보의 사용능력 등이 아직 부족하였다.

앞선 학생들의 분석을 통해 나타난 문제점을 인지하면서, 특히 <그림 III-5>의 (1), 주어진 사각형을 등변사변형으로 변형하는 논리에 주안점을 두고 사각형의 등주문제를 디자인한다.

삼각형의 경우와 마찬가지로 존재성의 문제를 가정하고 시작한다. 즉, 둘레의 길이가 일정한 사각형 중에서 넓이가 최대인 것이 존재한다. 편의상 이 사각형을 S 라고 두자.

먼저 <그림 III-6>과 같이 문제를 단순화하여 생각한다.[10]

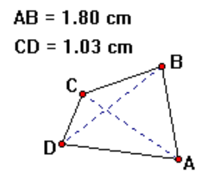
<그림 III-6> 범주 나누기

네 변의 길이가 모두 같지는 않은 경우에 S가 속하면 <그림 III-3>의 아이디어를 사용하여 S의 넓이를 더 크게 만들 수 있고 이는 모순을 이끈다는 논리이다.

네 변의 길이가 모두 같지는 않은 경우는 크게 3가지로 생각할 수 있다.

a) 두 변의 길이가 다른 경우
b) 세변의 길이가 다른 경우
c) 네 변 모두 길이가 다른 경우

위에서 b)와 c)의 경우에는 항상 인접한 서로 다른 길이의 변이 항상 존재하며, 따라서 <그림 III-3>의 아이디어를 사용하여 S의 넓이를 더 크게 만들 수 있고 이는 모순이다. 그러나 a)의 경우는 삼각형의 경우와는 달리 '두 변의 길이가 다르다는 것'과 '인접한 두 변의 길이가 다르다는 것'은 같은 의미가 아니다. 다시 말해서, 사각형의 경우에는 두 변이 인접하지 않으면서 그 길이가 다른 경우도 있다는 것이다. 이 경우에는 바로 <그림 III-3>의 아이디어를 적용할 수 없다.



<그림 III-7> 인접하지 않는 길이가 다른 두변

따라서 a)의 경우에도 인접한 서로 다른 길이의 두 변이 항상 존재한다는 사실을 보여 주어야한다. 실제로, <그림 III-7>에서 인접하지 않은 두 변 AB 와 CD의 길이가 다른 경우, 인접한 두 변 AB 와 BC의 길이가 다르거나 또는 인접한 두 변 CD와 BC의 길이가 다르다. 즉, 인접하지 않은 서로 다른 길이의 두 변이 있으면 인접한 서로 다른 길이의 두 변이 항상 존재한다. 따라서 a)의 경우에도 모순을 이끌 수 있다.

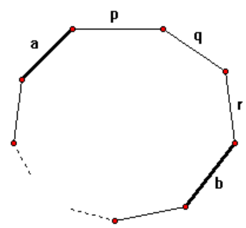
여기서 초등학생들의 수준을 생각하여 a), b)와 c)의 세 가지의 경우로 나누어 생각을 했지만, 좀 더 생각을 해보면 b)와 c)의 경우는 a)의 경우에 포함된다. 따라서 a)의 경우만 고려하면 된다. 이러한 것은 일반적인 다각형의 경우로 일반화 될 수 있다. 즉,

명제 L[11]: 주어진 다각형에서, 어느 두 변의 길이가 다르다면 인접한 서로 다른 길이의 두 변이 항상 있다.

인접한 서로 다른 길이의 두변 찾기 알고리즘을 초등수준에서 만들어 보자.

10) 일반적인 논리적 접근은 다음과 같다. 만일 사각형 S 에서 길이가 서로 다른 인접한 두 변이 존재하면 넓이를 더 키울 수 있으므로 S의 넓이가 최대라는 사실에 모순이다. 따라서 S는 임의의 인접한 두 변은 같아야 하고 따라서 정사각형이다. 그러나 이와 같은 분석적인 논리적 접근은 초등학생에게는 쉬운 접근이 아니라고 생각되어, 가능한 경우를 모두 따지는 방법으로 구체화하여 접근하는 방식을 고려하고 있다. 실제로, 초등학생의 경우 도형을 분석적으로 보기보다는 외형을 먼저 인식한다. 예를 들어, 정사각형의 경우 '네 변의 길이가 모두 같고 …' 와 같은 인식이 분석적인 관점 '인접하는 두 변의 길이가 모두 같고 …' 보다 선행한다.

11) 초등학교 수준에서의 수학화 또는 국소적 조직화 활동으로 볼 수 있다.



<그림 Ⅲ-8> 다각형에서 인접하지 않는 길이가 다른 두변

<그림 Ⅲ-8>에서 $a \neq b$인 경우를 생각해보자.

· $a \neq p$인 경우: a와 p가 서로 다른 길이의 인접 변이다.

· $a = p$인 경우:

- $p \neq q$인 경우: p와 q가 서로 다른 길이의 인접 변이다.
- $p = q$인 경우:
  * $q \neq r$인 경우: q와 r가 서로 다른 길이의 인접 변이다.
  * $q = r$인 경우: r와 b가 서로 다른 길이의 인접 변이다.

이제, 위의 명제 L로부터 '둘레의 길이가 일정한 다각형 중에서 넓이가 최대인 것은 등변다각형이다.'라는 결론을 얻을 수 있다.

③ 오각형의 등주문제

탐구문제 4: 일정한 둘레의 길이를 가지는 오각형 중에서 넓이가 가장 큰 오각형은?

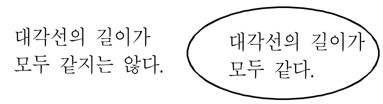
삼·사각형의 경우와 마찬가지로 존재성의 문제를 가정하고 시작한다. 즉, 둘레의 길이가 일정한 오각형 중에서 넓이가 최대인 것이 존재한다. 편의상 이 오각형을 P 라고 두자.

앞선 명제 L을 이용하면 일정한 둘레의 길이를 가지는 오각형 중에서 넓이가 가장 큰 오각형은 우선 등변오각형이 됨을 알 수 있다. 이제 등각이 됨을 밝히기만 하면 된다.

Zenodorus은 <그림 Ⅱ-5>와 같이 둘레의 재분배를 이용한 '닮음'을 사용하였다. 이러한 접근은 <그림 Ⅱ-6>과 같은 오류를 발생시킨다. 따라서 우리의 경우는 '등변'과 '합동'의 성질을 이용하여 등각이 됨을 밝힌다.

등변오각형에서 대각선의 길이가 모두 같으면 대각선에 붙어있는 모든 삼각형이 합동이고 따라서 등각이 됨을 알 수 있다. 결국 우리는 등변오각형의 모든 대각선의 길이가 같음을 보이면 된다.

먼저 <그림 Ⅲ-9>와 같이 문제를 단순화하여 생각한다.



<그림 Ⅲ-9> 범주 나누기

'대각선의 길이가 모두 같다.'는 범주에 속하지 않는 경우는 '길이가 같지 않은 두 대각선이 존재한다.'로 생각할 수 있고, 이것은 명제 D에 의해서 '인접한 서로 다른 길이의 두 대각선이 있다.'라는 사실과 동치이다. 명제 D는 명제 L의 증명과 같은 방법으로 생각하면 쉽게 성립함을 알 수 있다.

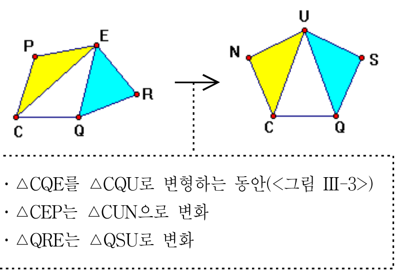
명제 D[12]**:** 오각형에서, 어느 두 대각선의 길이가 다르다면 인접한 서로 다른 길이의 두 대각선이 항상 있다.

아래의 연속된 그림인 <그림 Ⅲ-10>, <그림 Ⅲ-11>, <그림 Ⅲ-12>와 <그림 Ⅲ-13>은 <그림 Ⅲ-9>에서 '대각선의 길이가 모두 같지는 않다'라는 범주에 P가 속하면 모순이 일어남을 보여주고 있다.[13]

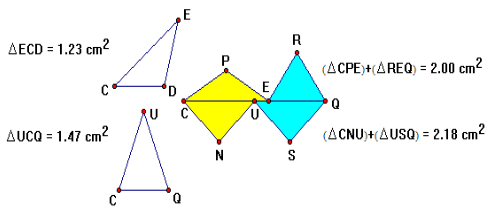
---

12) 수학화 활동의 일환으로, 오각형에서는 대각선이 모두 연결되어 있다는 사실을 인식할 수 있어야 가능하다. 짝수 차수의 다각형인 경우에서는 대각선의 연결성분이 2개이기 때문에 이 명제가 성립하지 않는다.

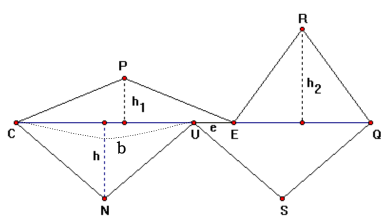
13) 분석-종합법에 따른 오각형의 등주문제를 해결하는 절차는 다음과 같다. 초등학생의 경우 아이디어를 만들고, 추측과 증명을 하는 것이 쉽지는 않다. 여기에서는 GSP를 사용한 조작활동으로 정당화를 시도한다.



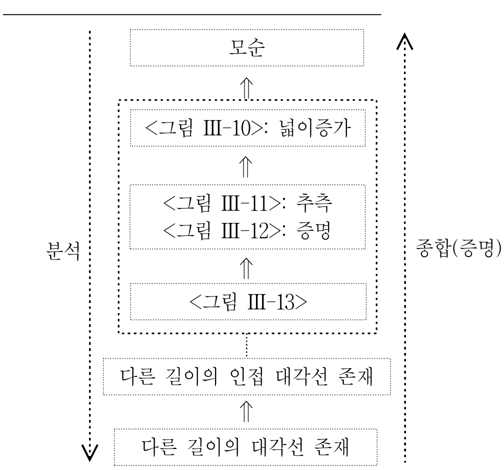
<그림 Ⅲ-10> 등변 오각형의 변형(최근배, 2009)



<그림 Ⅲ-11> 두 등변 오각형의 분해(최근배, 2009)



<그림 Ⅲ-12> 대각선에 붙어있는 삼각형



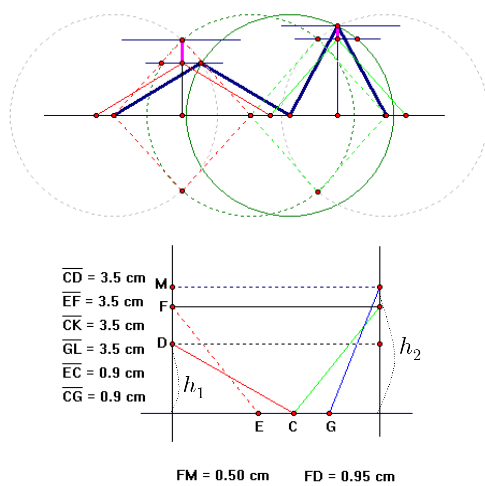
<그림 Ⅲ-12> 가로선 위에 있는 두 삼각형의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2}\times(b+e)\times h_1+\frac{1}{2}\times(b-e)\times h_2$$

이다. 이로부터 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\times(b+e)\times h_1+\frac{1}{2}\times(b-e)\times h_2\\
&\quad=\frac{1}{2}\times\{b(h_1+h_2)+e(h_1-h_2)\}\\
&\quad\le\frac{1}{2}\times b\times(h_1+h_2),\quad h_1\le h_2 \text{ 이므로}\\
&\quad\le b\times h \qquad\qquad \text{<그림 Ⅲ-13> 참조}
\end{aligned}$$

여기서 $b\times h$는 가로선 아래의 합동인 두 삼각형의 넓이의 합이다.



<그림 Ⅲ-13> 높이의 변화

④ 일반적 정다각형의 등주문제

탐구문제 5: 일정한 둘레의 길이를 가지는 다각형(>5) 중에서 넓이가 가장 큰 다각형은 무슨 모양일까요?

'등변'의 증명은 명제 L을 이용하면 된다. 그러나 '등

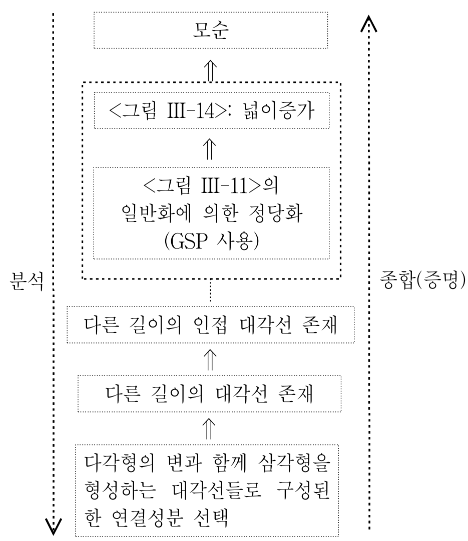
각'의 경우에서 홀수각형과 짝수각형을 나누어서 생각한다. 홀수 각형(>5)인 경우[14]에는 오각형의 경우를 일반화하면 된다. 그러나 이 경우 주의 또는 주목해야 할 점은 다음과 같다.

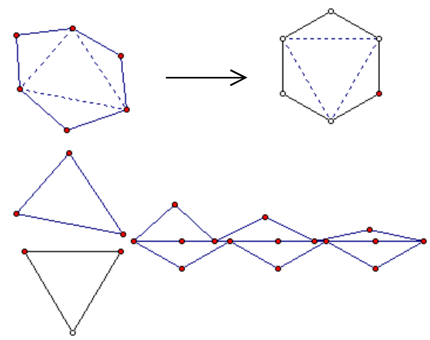
- 대각선의 종류가 여러 가지가 있으므로 변과 함께 삼각형을 형성할 수 있는 대각선만 고려한다.
- 삼각형을 형성할 수 있는 대각선들은 모두가 연결되어있다. 따라서 명제 D를 사용할 수 있다.

짝수각형(>5)인 경우[15]에는 변과 함께 삼각형을 형성할 수 있는 대각선만 고려한다고 해도 대각선 모두가 연결되어 있지 않다. 실제로 연결성분이 2개이다. 따라서 명제 D를 사용할 수 없다. 하지만 변과 함께 삼각형을 형성할 수 있는 연결된 대각선(연결성분)은 다각형을 형성한다. 따라서 <그림 III-11>의 아이디어를 일반화하여 생각하면 된다. 즉, 등변다각형의 내부에 형성된 다각형을 이 다각형과 같은 둘레의 길이를 가지는 정다각형으로 변화시키는 동안 넓이의 변화를 살펴보면 된다. <그림 III-14>는 육각형인 경우의 예이다.

14) 분석-종합의 과정은 각주 12) 참조.

15) 분석-종합법에 따른 짝수각형인 다각형의 등주문제를 해결하는 절차는 다음과 같다. 실제로, 이 분석-종합의 절차는 일반적인 다각형(>3)에 적용될 수 있다.





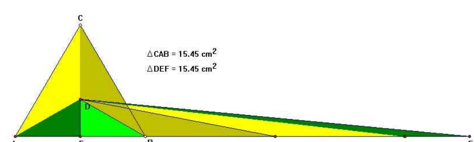
<그림 III-14> 등변 육각형의 분해

2) 문제 (1)의 구성

탐구문제 6: 같은 크기의 둘레의 길이를 가지는 정다각형 중에서 더 많은 변(각)을 가지는 것이 더 큰 넓이를 가진다.

Zenodorus의 증명에 사용된 핵심적인 아이디어는 변심거리를 이용한 <그림 II-3>과 같은 등적변형을 사용한 것이다.

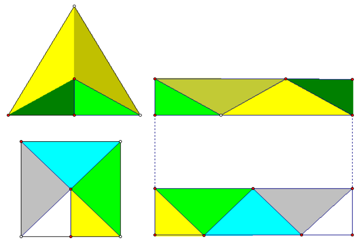
<그림 II-3>의 아이디어를 좀 더 구체화하여 해석해 보자. <그림 III-15>는 정삼각형 ABC의 직각삼각형 DEF (밑변이 주어진 삼각형 ABC의 둘레의 길이이고 높이가 변심거리(apothem))로의 등적변형을 보여주고 있다.



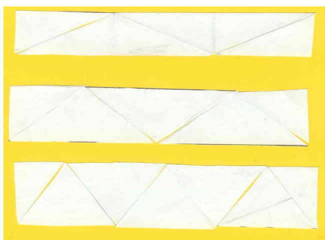
<그림 III-15> 등적변형

<그림 III-16>은 정다각형의 직사각형으로의 등적변형을 나타내고 있다. 초등학생에게는 Zenodorus의 방법보다 이러한 방법이 더 쉽고 유리할 수 있다. 또한 이 방법은 초등학교 6학년에서 배우는 원의 공식을 유도[16]하는 경우에 유용하게 사용될 수 있다.

16) 등적변형을 이용한 원의 면적 구하기



<그림 III-16> 직사각형으로의 등적변형



<그림 III-17> 학생 결과물

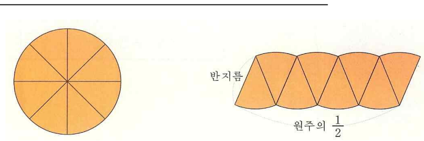
3) 문제 (2)의 구성

탐구문제 7: 원은 같은 둘레의 길이를 가지는 임의의 정다각형보다 더 넓은 넓이를 가진다.

Zenodorus의 (2)번 문제는 증명 없이 추측된 것일 수 있다.(Tapia, 2009) 따라서 초등수준에서 등주문제의 답이 원이라는 사실을 <그림 III-16>의 방법에 따른 직관적 추측에 만족하기로 한다. 즉, 정다각형의 변의 수가 많아질수록 정다각형은 원에 가까워지고 따라서 변심거리는 점점 증가하다가 결국 반지름이 된다. 물론 이러한 사실을 삼각함수를 이용한 해석적인 방법(최근배, 2009)으로 증명을 할 수 있다.

나. 두 가지 형태의 등주문제

평면에서의 등주문제는 다음과 같이 서로 동치가 되는 두 가지 형태의 명제로 진술된다.

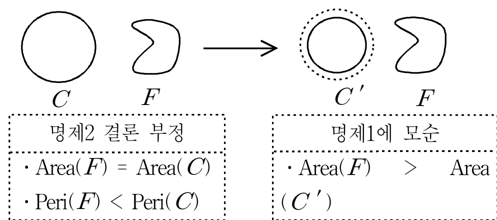


명제 1: 같은 길이의 둘레를 가지는 평면도형 중에서 가장 큰 넓이를 가지는 것은 원이다.

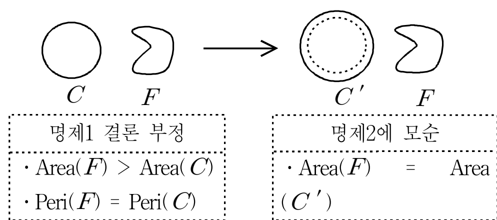
명제 2: 같은 넓이를 가지는 평면도형 중에서 가장 짧은 둘레의 길이를 가지는 것은 원이다.

탐구문제: 명제 1과 명제 2는 같은 진술이다.[17]

· **명제** 1 ⇒ **명제** 2



· **명제** 2 ⇒ **명제** 1



다. Steiner

앞서 논의한 Steiner의 3가지 증명법 중에서 등주문제와 관련된 수학 프로그램은 주로 4-힌지 증명법을 사용하여 구성한다. 실제로, 저자가 속한 ○○대학교 과학영재 교육원 초등수학반 영재 프로그램 중 등주문제와 관련된 학습 프로그램의 구성도 Steiner의 4-힌지 증명법을 따르고 있다.

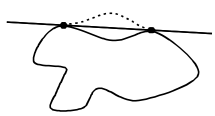
1) 4-힌지 증명

탐구문제: 일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 넓이가 가장 큰 것은 무엇일까요?

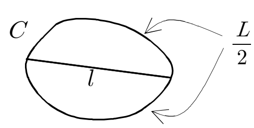
17) 초등학생의 경우에는 논리성이 부족함으로 경우에 따라서는 GSP와 같은 컴퓨터 프로그램을 사용하여 정당화하는 수준으로 다룰 수 있다.

다음은 등주문제와 관련된 영재수업의 일부분[18]이다. 원래 분석법에 따른 수업을 진행하고자 하였지만, 시간적 여유가 없어 학생 스스로의 분석이 미비하였다. 주로 충분조건을 탐구주제로 교사가 제시하는 경향이 강하다.

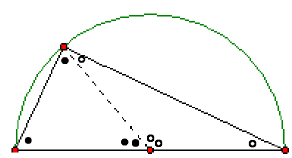
T: 일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 넓이가 가장 큰 것은 무엇일까요?
S: 원이요.
T: 원이 되기 위해서 어떤 주장을 해야 하나요?
S: ...
T: C를 둘레의 길이가 L인 평면도형들 중에서 넓이가 최대인 도형이라고 둡시다. 그러면 C가 원이 됨을 보여주면 되겠지요.
S: 예
T: 원의 특징을 알아볼까요? 어떤 특징이 있나요?
S: 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점들... 평면도형이다. 각이 없다. 곡선이다. 대칭선이 무수히 많다. 한 글자다.
T: 볼록곡선이지요?
S: 예
T: 탐구문제를 줄께요. C는 볼록곡선이 됩니까?
S1: 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점들이 되니까 볼록곡선이 안되면 안됩니다.
Ss: 원을 사용하면 안돼
S2: 예. 볼록곡선이 됩니다. 이유는



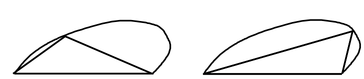
T: 그래요. 볼록하지 않으면 둘레의 길이를 변화 시키지 않고 넓이를 더 크게 만들 수 있겠지요.
T: 점점 원으로 가고 있지요. 그러나 볼록곡선만 가지고 원이라고 주장할 수 없지요.
S: 예
T: 원은 지름의 아래·위의 넓이가 같지요. 그래서 탐구문제를 만들어 봅시다. 아래의 경우 선분 l의 아래·위의 넓이가 같을까요?



S: 예. l의 위쪽과 아래쪽 중 큰 쪽이 두 개 있으면 되요.
T: 다른 학생들 무슨 말하지 알겠지요? 만일 위쪽이 크다면 위쪽을 l에 관하여 대칭시키면 둘레의 길이를 변화시키지 않고 넓이를 더 크게 만들 수 있지요. 이것은 모순이지요.
S: 예
T: 이제, 우리는 반쪽만 생각하면 되겠죠.
S: 예
T: 적당한 직선에 선대칭이 되는 도형이 무수히 많겠지요. 예를 들어 타원도 있겠지요. 그러나 타원은 원이 아니죠.
S: 예
T: 느낌에 타원까지는 온 것 같죠. 타원과 원의 차이점에는 어떤 것이 있을까요?
S: 곡률이 다르다.
T: 그러면 이제 각에 대한 이야기를 해봅시다. 이것이 반원입니다. 곡률이 같다는 것은 무슨 이야기 입니까? 그림에서 지름을 밑변으로 가지는 삼각형에서 원주에 접하는 각(원주각)이 모두 같다. 몇도 일까요? 누구 나와서 설명해 보세요.
S: 제가 해보겠습니다. 90°도입니다.



T: 이제 우리가 해결해야 할 것이 무엇일까요?
S: 문제가 뭐지? 원주각이 90°도가 아니면 넓이를 더 크게 만들 수 있다.
T: 전 시간에 배운 마름모의 넓이를 더 키울 때 어떤 아이디어를 사용하였지요. 반원이 아닌 반곡선에서 나타 날 수 있는 둘레에 내접한 각의 형태는 90°보다 크거나 작은 경우가 있겠죠.



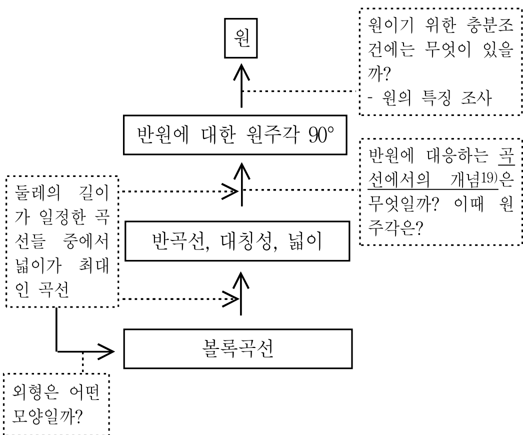
… 중략 …

S: 원주각이 90°도 아니면 넓이를 더 크게 만들 수 있어요. 직각 삼각형으로 만들면 넓이가 더 커집니다. 따라서 C는 원입니다.

이 수업에서 학생들이 비교적 어려움 없이 문제를 잘 해결하였지만 Steiner의 3단계 중에서 3단계의 경우에는

18) ○○대학교 영재교육원 초등수학반의 2011년 5월 7일 영재수업 비디오 촬영을 근거로 작성하였다.

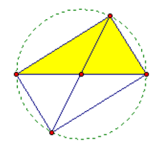
조별활동과 교사의 적절한 도움이 요구되었다. 또한 학생들의 수학을 조직화하는 활동이 부족하다. 학생들 스스로의 수학화 활동의 능력을 길러주기 위해서 이 주제의 프로그램은 시간이 많이 요구될 지라도 분석법을 기초로 디자인하는 것이 좋을 것 같다. 이유는 학생 대부분이 등주문제의 답이 원이라는 사실을 알고 있거나 추측하고 있기 때문에 결국 이것을 어떻게 정당화하는 문제가 핵심이 되기 때문이다.(<그림 III-18>참조)



<그림 III-18> 분석과 종합

앞선 학생과 교사와의 대화에서 우리가 무심코 비판 없이 지나간 수학적 내용이 있다. 증명에 필요한 것은 Thales 정리가 아니라 이의 역정리이다. 즉, '반원에 대한 원주각은 항상 90°이다.'는 사실보다는 이와 동치가 되는 이에 역인 '반곡선의 원주각이 항상 90°이면 이 곡선은 원이다.'는 사실이다. 따라서 교수내용을 디자인 할 때 이점을 고려해야 한다.

T: 우리가 지금까지 가진 정보는 무엇이지요.
S: 반곡선의 원주각이 모두 90°이다는 사실입니다.
T: 이것으로 곡선이 원이라고 주장할 수 있나요?
S: 선생님, 원에서의 원주각이 항상 90°이니까 증명된 것 아닌가요?
T: 자. 우리가 밝혀야 사실은 주어진 곡선이 원이라는 것이지요. 하지만 학생은 먼저 원이 주어지고 그 원의 원주각은 90°라는 것을 말하고 있지요.
S: 반대로...
T: '반곡선의 원주각이 모두 90°이면 이 반곡선은 원이다'를 밝히려면 반곡선의 내접 직각삼각형의 대변이 외접원의 지름이 되면 되겠지요.
S: 예.
T: 위의 내용을 원의 정의에 충실하도록 다시 바꾸어 봅시다.
S: 중심으로부터 같은 거리 점... 내접 직각삼각형의 대변의 반에 있는 점이 외접원의 중심...
T: 예. 그렇지요. 결국 원에서 중심 찾는 문제입니다.[20]



따라서 곡선상의 모든 점들은 반지름을 결정하겠지요.

2) 평균경계 증명

평균경계 증명(mean boundary proof)은 두 가지 형태의 등주문제 중에서 명제 2를 사용하고 있다.

탐구문제: 같은 넓이를 가지는 평면도형 중에서 가장 짧은 둘레의 길이를 가지는 것은 무엇일까요?

이 탐구문제는 원래 주어진 등주문제의 쌍대(dual) 문제이다. 따라서 수학적인 주제를 다양한 측면에서 다루어 볼 수 있다는 점에서 의의가 있다. 다음은 분석법을 기초로 디자인한 영재수업의 가상적인 예시다.

T: 위 탐구문제의 답은 무엇일 것 같나요?

19) 반원의 개념에 대응하는 반곡선의 개념을 어떻게 정의할 것인가? 이를 테면, 반원을 아래와 같이 해석해보자.
a) 지름의 위 또는 아래
b) 원주의 반인 호(arc)
일반적인 단일폐곡선에서는 지름의 개념, 중점의 개념을 의미 있게 정의하기 힘들다. 따라서 반곡선을 a)처럼 정의하기는 힘들다. b)인 경우로 반곡선을 '둘레길이의 연속된 반쪽'으로 정의하면 반원의 일반화로 볼 수 있다.

20) 주어진 원과 30cm 자를 주고, 원의 중심을 찾아라. 실제로 이 문제를 몇 명의 대학원생(초등교사)들에게 실험을 해보니까, 답을 찾지 못했다. 직사각형에서의 대각선과 관련된 정보, 원의 중심과 관련된 정보 각각은 알고 있지만 이 두 개념을 통합적으로 생각해 내지 못하였다. 이와 같은 역 문제는 사고의 다양성을 기르는데 중요한 역할을 할 수 있다.

S: 원이요.
T: 원이 되기 위해서 어떤 주장을 해야 하나요? Steiner의 4-힌지 증명에서는 무엇을 이용했나요.
S: 원주각이요.
T: 그래요. 이제, 원은 다른 특징을 조사해보세요.

…

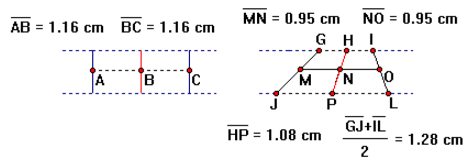
S: 지름에 대해서 대칭입니다.
T: 그래요. 모든 지름에 대해서 대칭이지요. 이 사실을 이용해서 탐구문제를 풀어볼까요.

원

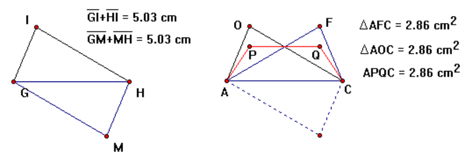
↑

모든 지름에 대해서 대칭

T: 우리의 경우 원의 지름에 대응하는 곡선에서 개념을 나름대로 알아볼 까요?
S: 4-힌지 증명에서 반곡선의 개념을 곡선 둘레의 길이의 반인 (연속된)부분으로 하였기에 '둘레의 길이를 반으로 나누는 두 점을 이은 선분'으로 간주하면 될 것 같은데요. 물론 원인 경우와는 달리 선분의 길이가 다를 수 있지만...
T: 그렇게 생각해봅시다. 같은 넓이를 가지는 평면도형 중에서 가장 짧은 둘레의 길이를 가지는 것이 존재할 까요?
S: 무슨 말이지?
T: 수학에서 존재성의 문제는 항상 어렵습니다. 따라서 우리는 존재성을 가정하고 문제를 해결해 봅시다. 편의상 이 도형을 C라고 합시다. 이제 무엇을 해야 하나요?
S: C는 원이다.
T: 원임을 주장하기 위한 4-힌지 증명을 상기해보세요.
S: 곡선의 원주각이 90°가 아니면 넓이를 더 키울 수 있었습니다. 그래서 모순이고, 모든 곡선의 원주각이 90°이여야 한다. 이것은 곧 원이다.
T: 우리의 경우로 바꾸어보세요.
S: 곡선을 대칭이 되지 않게 하는 곡선의 지름이 존재하면 넓이를 변화시키지 않고 둘레의 길이를 더 짧게 만들 수 있다. 그래서 모순이고, 곡선은 모든 곡선의 지름에 대칭이여야 한다. 이것은 곧 원이다.
T: 그러면 우리가 해야 할 것은 무엇입니까?
S: 곡선을 대칭이 되지 않게 하는 곡선의 지름이 존재하면 넓이를 변화시키지 않고 둘레의 길이를 더 짧게 만들 수 있어야 합니다.
T: 누구 아이디어 있나요.
S: …
T: 두 직선(곡선) 사이의 중간에 놓여 있는 직선(곡선)을 평균직선(곡선) 이라고 합니다. 평균곡선의 길이는 주어진 두 곡선의 길이와 어떤 관계가 있을까요. 우선 직선의 경우를 생각해보세요. 직접 그려서 그 길이를 재어보세요.
S: 두 직선이 평행한 경우에서 평균직선이 두 직선의 길이의 평균과 같다. 그러나 평행하지 않은 경우에는 평균직선의 길이는 주어진 두 직선 길이의 평균보다 작습니다.



T: 곡선인 경우에는 어떻게 될까요?
S: 아마도 직선과 마찬가지 일걸요.
T: 그래요. 곡선을 충분히 작은 조각으로 나누면 그 조각은 직선으로 생각할 수 있으니까요.
T: 다시 문제로 돌아가 봅시다. 이제 주어진 곡선을 대칭이 되지 않게 하는 곡선의 지름이 존재한다고 합시다. 이 지름의 위·아래에 놓여 있는 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 같을까요?
S: 같습니다. 4-힌지 증명 때 배운 내용이 아닌가요?
T: 곡선의 길이를 구하기 힘드니까 다각형인 경우에 한정해서 생각해보세요.
S: 평균곡선을 생각해서 계산을 해보면 넓이는 변화없는데 둘레의 길이는 더 짧아 졌어요.



이것은 가정에 모순입니다. 따라서 곡선은 모든 곡선의 지름에 대칭이여야 한다. 이것은 곧 원입니다.

3) 눈송이 만들기 증명

눈송이 만들기(snowball-packing) 증명은 평균경계 증명과 마찬가지로 다음의 탐구주제로 시작한다.

탐구문제: 같은 넓이를 가지는 평면도형 중에서 가장 짧은 둘레의 길이를 가지는 것은 무엇일까요?

다음은 분석법을 기초로 디자인한 영재수업의 가상적인 예시입니다.

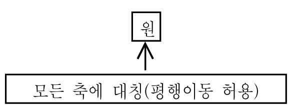
T: 눈송이는 어떻게 만드나요?
S: 그냥 땅에 있는 눈을 두 손으로 한 움큼 들고 점점 둥글게 만들지요.
T: 그래요. 처음에 눈의 모양은 모난 모양이지만 점점 둥글게 변해가지요. 변해가는 동안 눈의 양은 변화 없지만 겉넓이는 점점 감소하지요. 이것을 2차원에서 생각해 봅시다.

탐구문제: 같은 넓이를 가지는 평면도형 중에서 가장 짧은 둘레의 길이를 가지는 것은 무엇일까요?

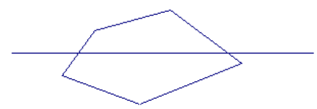
T: 위 탐구문제의 답은 무엇일 것 같나요?
S: 원이요.
T: 원이 되기 위해서 어떤 주장을 해야 하나요? Steiner의 4-힌지 증명과 평균경계 증명에서는 무엇을 이용했나요.
S: 원주각의 크기와 지름에 대한 대칭성이요.
T: 이제, 원은 또 다른 특징을 조사해보세요.

…

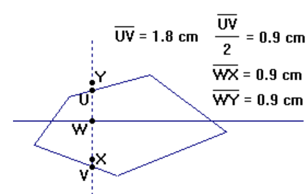
T: 평균경계 증명에서는 지름에 대한 대칭성을 이용하였지요. 여기서 지름의 관념을 좀 더 완화해 보세요. 보통의 경우 대칭은 다룰 때 지름 말고 무엇을 사용하나요?
S: 축, 대칭축이요. 대칭선?
T: 그래요. 원은 한 정점을 지나는 모든 축에 대칭이지요. 이 사실을 이용해서 탐구문제를 풀어볼까요.



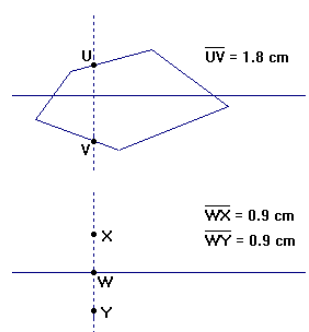
S: 평균경계 증명에서는 곡선을 대칭이 되지 않게 하는 곡선의 지름이 있으면 모순을 찾는 방법을 사용했잖아요. 여기에서도 이와 유사한 방법을 사용하나요?
T: 수업 시작할 때 눈송이 만들기를 생각해보세요. 그러니까 이번에는 아마도 주어진 평면도형을 직접 원으로 만들기를 하지 않을까요?
S: 주어진 평명도형을 점점 원으로 만든다. 어떻게? 축을 이용…
T: 그래요. 주어진 평면도형을 축을 이용하여 대칭으로 만들기를 합니다. 이러한 과정에서 주의해야 할 점은 무엇이지요?
S: 넓이는 변화시키지 않고 둘레의 길이는 더 짧게 해야 합니다.
T: 다각형의 경우만 생각하기로 합시다. 그렇게 하여도 문제는 없겠지요?
S: 예. 앞선 탐구문제들과 마찬가지로 곡선을 충분히 작은 조각으로 나누면 그 조각은 직선으로 생각할 수 있으니까요.
T: 선생님이 도형과 축을 하나 줄께요. 주어진 축에 대칭이 되도록 만들어 보세요. 단 넓이는 변화시키지 않고 둘레의 길이는 더 짧게라는 조건을 명심해야겠지요.



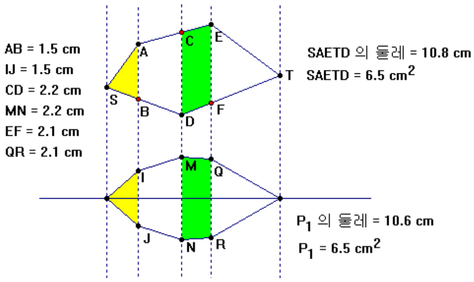
S: …
T: 주어진 축에 대칭이 되려면 축으로부터 위·아래 거리가 같아야 하겠지요. 따라서 거리의 평균이 축에 놓이도록 하면 되겠지요.



원래 그림과 대칭화된 그림을 분리해서 그리면 좋겠지요?
S: 축을 밑으로 옮기면 되겠는데요.



T: 좀 더 효율적으로 작업을 하기위해서 꼭짓점을 중심으로 생각해 보세요.
S: 예.



T: 꼭짓점을 중심으로 조작을 내는 경우 나타날 수 있는 도형은 종류는 무엇일 것 같습니까?

S: 삼각형과 사각형이요. 사각형은 실제로 사다리꼴입니다.

T: 원래 주어진 도형과 축에 대칭화된 도형에서의 변화를 구체적으로 보세요.

S: 삼각형은 이등변 삼각형으로, 사다리꼴은 등변사다리꼴(?)로 변화되었습니다.

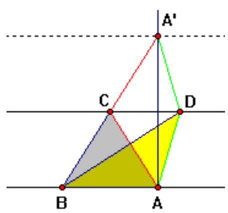
T: 넓이의 변화는?

S: 없습니다. 왜냐하면 삼각형과 사다리꼴에서 밑변, 아랫변, 윗변, 높이의 변화가 없기 때문입니다.

T: 둘레의 길이의 변화는?

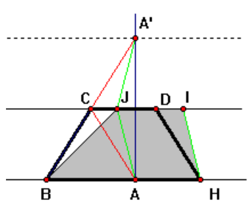
S: 짧아져야겠지요. 이유는?

T: 먼저 삼각형인 경우에 생각해보지요.



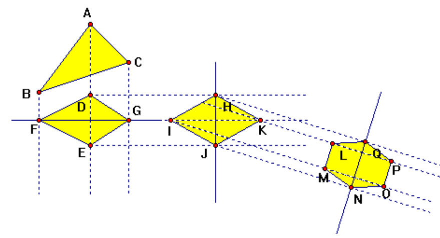
이등변 삼각형 ABC에서 두 선분 BC와 AC의 길이의 합은 선분 BA′의 길이와 같습니다. 반변 삼각형 ABD에서 두 선분 BD와 AD의 길이의 합은 두 선분 BD와 A'D의 길이의 합과 같습니다. 따라서 둘레의 길이가 짧아집니다. 그러면 사다리꼴에서 어떻게 될까요?

S: 삼각형의 경우로 변환해서 문제를 풀면 됩니다.



T: 이제, 눈송이 만들기와 관련된 아이디어를 이해했으므로 주어진 삼각형을 원으로 만들어 보세요. 물론 모든 축을 고려해야하기 때문에 원을 만들 수는 없겠지만 몇 단계만 시도하여 보세요.

S: 예.



라. Edler

Edler의 존재증명에서 우리는 주어진 어떤 다각형을, Steiner의 대칭화를 이용하여, 정다각형화 시키는 활동에만 초점을 둔다.

탐구문제: 주어진 다각형을, 넓이는 더 크거나 같고, 둘레의 길이는 더 짧거나 같은, 정다각형을 만들어 봅시다.

다음은 분석법을 기초로 디자인한 영재수업의 가상적인 예시입니다.

T: 결론적으로 우리가 해야 할 일은 무엇입니까?

S: 정다각형 만들기요.

T: 정다각형이 되기 위한 조건을 찾아보세요. 이를 위해 정다각형의 특징을 살펴보세요.

S: 무게중심과 꼭짓점을 잇는 선분으로 조각을 내면 모든 조각이 이등변 삼각형입니다.

T: 그래요.

정다각형

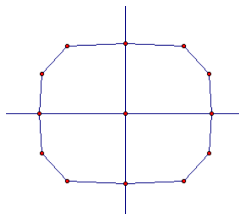
↑

무게중심과 꼭짓점을 잇는 선분으로 만들어진 모든 조각이 이등변 삼각형

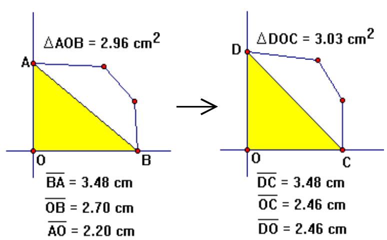
주어진 다각형을 넓이는 변화 없이 둘레의 길이는 더 짧게...

S: 눈송이 만들기에서 이런 이야기가 있었는데, 축에 대칭...

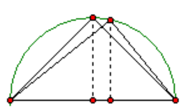
T: 먼저, 주어진 다각형내부에 나중에(정다각형화) 무게중심이 될 한 정점을 만들어야겠지요. 그래서 주어진 다각형을 x-축과 y-축에 관해서 대칭이 되도록 만들어 보세요. 이 두 축의 교점이 결국 나중에 정다각형의 무게중심이 됩니다.



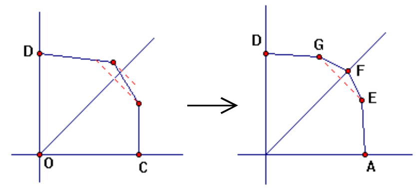
T: x-축과 y-축에 관해서 대칭이기 때문에 1사분면의 변화만 고려합시다.
먼저, x-축과 y-축 위에 놓여있는 양 끝점을 연결한 선분을 빗변으로 하는 삼각형을 생각합니다. 그리고 빗변의 길이를 고정한 채 축 위를 움직여서 이등변 삼각형을 만듭니다. 넓이 변화가 생깁니까?



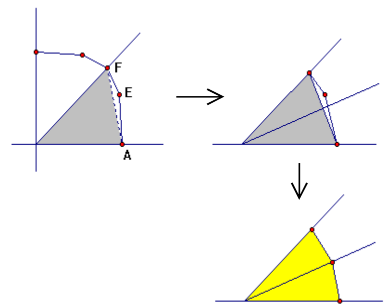
S: 예. 이유는 잘 모르겠지만, 경험에 의하면 항상 균형화하면 더 커지는 경향이 있습니다.
T: 위의 두 삼각형을 적당한 원 속에 내접시켜보세요.
S: 높이 비교가 아주 쉽네요. 따라서 넓이가 증가하네요.



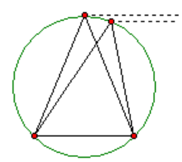
T: 이제, x-축과 y-축을 이용하여 새로운 축을 만들고 이축에 대하여 Steiner의 대칭화를 시행해보세요.
S: 예.



T: 같은 방법으로 일을 끝내세요.
S: 예.



T: 위의 변형에서 삼각형의 넓이변화는 무엇을 사용하였나요?
S: 원주각이요. 원 속에 두 삼각형을 내접할 수 있습니다. 그리고 높이를 비교하면 되지요.



T: 누가 이 활동을 정리해보세요.
S: 주어진 다각형을, 넓이는 더 크거나 같고, 둘레의 길이는 더 짧거나 같은, 정다각형을 만들 수 있었습니다.

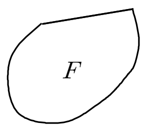
마. Lawlor

우리는 Lawlor의 절개형 증명의 기본적인 아이디어를 활동 중심으로 디자인하고자 한다.

탐구문제: 일정한 둘레의 길이를 가지는 평면도형 중에서 넓이가 가장 큰 것은 무엇일까요?

다음은 분석법을 기초로 디자인한 영재수업의 가상적인 예시입니다.

T: 먼저, 탐구문제에서 둘레의 길이가 p인 볼록도형을 F라고 합시다. 그리고 F의 둘레 위에 호의 길이가 $\frac{p}{2n}$인 $2n$-개의 점을 찍습니다.

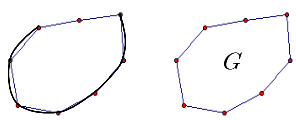


S: 선생님 호의 길이를 잴 수가 없습니다.

T: 호의 길이를 재기가 힘드니까 머릿속으로 점을 찍었다고 생각합시다. 또 실제적 활동을 위해서 $n=4$인 경우에 아이디어를 알아보시다. 그러면 F의 둘레에 몇 개의 점이 생기나요?

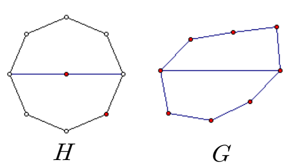
S: $2\times4=8$개요.

T: 만일 각점을 선분으로 연결한 내접 다각형 G을 생각합시다. 각 선분의 길이는 어떻게 될까요?



S: 호의 길이가 $\frac{p}{8}$이기 때문에 다각형의 각 선분의 길이는 $\frac{p}{8}$보다 작습니다.

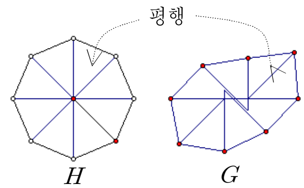
T: 이제, 다각형 G와 한 변의 길이가 $\frac{p}{8}$인 정다각형 H의 넓이를 비교해봅시다.



두 도형을 삼각형으로 조각내어 비교해봅시다.

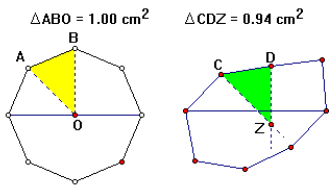
S: ...

T: 이렇게 조각을 냅니다. H에서 꼭짓점과 중점을 잇는 선분과 평행하게 G에서도 대응하는 꼭짓점에서 같은 작업을 합니다.



그러면 각각에 대응되는 삼각형의 넓이를 비교하면 어느 것이 더 클까요?

S: GSP를 사용해서 계산을 해보면 H가 더 클 것 같아요.



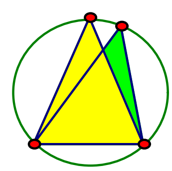
<그림 III-19>

T: $\angle$O와 $\angle$Z는 같은 가요?

S: 구성상 같습니다. 평행선을 이용했으니까요.

T: Edler의 증명에서 원주각을 사용한 경우를 생각해 보세요.

S: 적당한 원에 내접... 증명이 되었습니다.

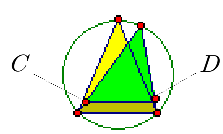


T: 위의 경우는 두 삼각형의 밑변 AB와 CD가 같은 경우이지요. 그런데 우리가 앞에서 다각형을 구성할 때 변의 길이는 어떻게 구성을 하였지요?

S: 다각형 G의 변의 길이는 정다각형 H의 한 변의 길이보다 작거나 같도록 구성을 했습니다.

T: 이와 같은 경우에는 어떻게 넓이를 비교하나요?

S: 만일 선분 CD의 길이가 작은 경우 아래와 같이 평행선을 이용하여 G의 조각이 H인 경우보다 넓이가 더 작음을 보일 수 있습니다.



T: 여기서 아직 두 가지의 문제가 남아있습니다. 하나는 항상 G의 각 변에서 <그림 III-19>처럼 삼각형이 만들어 지느냐의 문제입니다. 항상 그렇게 될까요?

S: 여러 가지 예를 GSP로 만들어 봐야 되겠네요.

T: 항상 만들어 지는 것은 아닙니다.[21] 이 경우에 우리는 그냥 G의 선분으로 정의합니다. 이렇게 하는 경우 넓이와 관련된 부등식(조각끼리의 비교)에 영향을 주나요?

S: 아니요. 이 경우 넓이가 0이 되기 때문에 부등식에는 문제가 되지 않습니다.

T: 또 다른 하나의 문제는 G가 우리가 만든 조각으로 모든 덮어 지느냐하는 것입니다. 실제적인 활동으로 정당화하세요.

S: G가 다 덮어 집니다.

T: 이 문제에 대한 증명은 생략하기로 합니다.

T: 이제까지 배운 내용을 가지고 넓이끼리의 부등식을 만들어 보세요.

S: 부등식이라...

$$\text{넓이}(G) \le G\text{를 덮는 각 조각의 넓이의 합} \le \text{넓이}(H)$$

T: 여기서 만일 n을 무한히 증가시키면 어떤 현상이 일어나는지 추측해보세요.

S: G의 넓이는 F의 넓이가 되고, H의 넓이는 둘레의 길이가 p인 원의 넓이가 됩니다.

T: 이제까지 배운 내용을 정리해보세요.

S: 주어진 둘레가 p인 평면도형 F의 넓이는 같은 둘레의 길이를 가지는 원의 넓이보다 작거나 같게 됩니다. 이러한 사실로부터 평면에서 등주문제의 답은 원입니다.

IV. 결론 및 제언

이 논문은 기하를 중심으로 등주문제와 관련된 다양한 증명법을 고찰하고 이로부터 초등영재를 위한 등주문제 디자인에 대하여 논의하였다. 이 디자인 연구에서 특징을 요약하면 다음과 같다.

먼저 등주문제와 관련된 고대의 역사적 고찰로 Dido의 문제와 Zenodorus의 증명법을, Steiner의 세 가지 증명법인 4-힌지 방법, 평균경계 방법과 눈송이 만들기 방법을, 그 후 Steiner이후인 Edler의 유한 존재 증명법과 Lawlor의 절개형 증명법을 살펴보았다. 이로 부터 내용 디자인을 크게 두 가지로 구분하여 접근하였다. 하나는 다각형을 이용한 접근법과 또 다른 하나는 원의 특징을 이용하는 접근법이다.

둘째, 존재성의 문제를 약간 언급하는 정도로 취급하였다. Weierstrass이전의 기하적인 접근법은 존재성의 문제를 가정하고 증명을 하고 있다는 점에서 치명적인 오류를 안고 있다. 그럼에도 불구하고 기하적인 접근법은 그 속에 수학적으로 아름다운 아이디어를 내포하고 있다. 존재성의 문제는 수학을 만드는 순수 수학분야에서는 아주 중요한 문제이지만 수학교육에서는 이러한 문제에 너무 집착할 필요가 없다. 이유는 지금 처한 학생의 현실을 출발점으로 볼 때, 존재성이 이미 알려진 상황으로 그 후의 아이디어 전개에 모순을 일으키지 않기 때문이다.

셋째, 초등 영재를 위한 등주문제 디자인에서의 수학교육적인 이론적인 배경은 '수학화'와 '분석-종합법'으로, 수학자가 수학을 만들 듯이, 학생들의 수학화의 활동을 바탕으로 하고 또 이를 위한 방법적인 측면에서는 분석-종합법을 사용하였다.

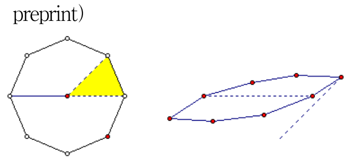
넷째, Edler와 Lawlor의 경우를 제외하고 전반적인 내용구성은 먼저 원의 특징을 살펴보고, 그 후 이에 대응하는 곡선에서의 개념을 파악한 후, 끝으로 주어진 곡선에서 원의 특징에 대응하는 성질을 만족하지 않으면 모순을 일으킨다는 순서를 따르고 있다.

다섯째, Lawlor의 절개형 증명법은 실제적인 학생들의 활동이 좋을 것 같다. 왜냐하면 증명의 방법이 구성적인 측면이 강하기 때문이다.

여섯째, 가능하면 역사-발생적 순서로 내용을 순서화하였다. 이유는 수학적으로 유명한 문제의 역사적 고찰은 문제의 원형을 알 수 있다는 점과 현재까지 어떻게 진화되어 왔는가를 볼 수 있다는 것이다.

끝으로 수학교육적 측면에서 보면, 등주문제의 기하적인 접근은 학생들의 공간감각 기르기 활동의 좋은 소

21) 아래와 같은 경우에는 삼각형이 형성되지 않습니다.(Siegel, preprint)



재라고 생각된다. 실제로 앞에서 언급한 수학자들의 아이디어는 기본적인 평면기하에서의 성질을 효율적으로 사용하고 있다. 이를테면, 등적변형, 원주각, 대칭성 등. 이러한 주제는 학생들이 이미 알고 있는 개념이다. 결국, 정보를 알고 있다는 사실보다는 얼마나 잘 활용하는냐와 같은 직관과 감각의 문제가 더 중요한 것이다.

Steiner의 말(Treibergs, 2008)을 인용하면서 이 논문을 끝맺는다.

> "계산은 사고를 대체하는 반면 기하는 사고를 자극한다."

참 고 문 헌

강문봉·강홍규·김수미·박교식·박문환·서동엽·송상헌·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥 (2005). 초등수학교육의 이해, 서울: 경문사.

강문봉 (2004). Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구, 수학교육학연구, 14(2), 143-156.

강문봉 (1992). 분석법에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집, 2(2), 81-93.

우정호·강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 대한수학교육학회 논문집, 3(2), 1-16.

우정호 (2006). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.

최근배 (2009). 초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰(게슈탈트 관점을 중심으로), 학교수학, 11(2), 227-241.

Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly*, 112, 526-566.

Demjanenko, S. (2008). The Isoperimetric Inequality: A History of the Problem, Proofs and Applications. *http://astrophysicsgeek.files.wordpress.com/2008/04/paper_final.pdf*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel: Dortrecht.

Hildebrandt, S., & A. Tromba (1996). *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag New York, Inc.

Polya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method, 2nd ed.*, Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1973). *Induction and Analogy in Mathematics.*, Princeton: Princeton University Press.

Siegel, A. Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Plane Geometry. preprint. *http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf*

Tapia, R. A. (2009). The Remarkable Life of the Isoperimetric Problem: The World's Most Influential Mathematics Problem. *http://www.princeton.edu/~wmassey/CAARMS15/PDF/Tapia.pdf*

Treibergs, A. (2008). Steiner Symmetrization and Applications, *http://www.math.utah.edu/~treiberg/Steiner/SteinerSlides.pdf*

A Study on the Teaching Design of the Isoperimetric Problem on a Plane for Mathematically gifted students in the Elementary School

- focused on the geometric methods -

Keunbae Choi

Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea

E-mail : kbchoe@jejunu.ac.kr

In this article, we study on the teaching design, focused on the geometric methods, of 2-D isoperimetric problem for the elementary mathematically gifted students. For our teaching design, we discussed the ideals of Zenodorus's polygon proof, Steiner's four-hinge proof, Steiner's mean boundary proof, Steiner's snowball-packing proof, Edler's finite existence proof and Lawlor's dissection proof, and then the ideals achieved were modified with the theoretical backgrounds-the theory of Freudenthal's mathematisation, the method of analysis-synthesis.

We expect that this article would contribute to the elementary mathematically gifted students to acquire and to improve spatial sense.

* ZDM Classification : D43, D53

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97D50

* Key Words : isoperimetric problem, mathematisation, analysis-synthesis