

개선된 피어슨 시스템을 이용한 신뢰성기반 최적설계[§]

김 태 균* · 이 태 희**†

* 한양대학교 대학원 자동차공학과, ** 한양대학교 미래자동차공학과

Reliability-Based Design Optimization Using Enhanced Pearson System

Tae Kyun Kim* and Tae Hee Lee**†

* Dept. of Automotive Engineering, Graduate School, Hanyang Univ.

** Dept. of Automotive Engineering, College of Engineering, Hanyang Univ.

(Received January 5, 2010 ; Revised December 15, 2010 ; Accepted December 17, 2010)

Key Words : RBDO(신뢰성기반 최적설계), Reliability Analysis(신뢰성해석), Kriging Model(크리깅모델), Pearson System(피어슨 시스템), Pearson Type IV Distribution(피어슨 타입 IV 분포)

초록: 확정론적 최적설계 방법은 설계 혹은 공정과정에서 발생하는 설계변수의 불확실성을 고려하지 않아 최적점이 제한조건의 경계점에 위치한다. 신뢰성기반 최적설계는 설계자가 요구하는 신뢰도를 만족하는 범위에서 목적함수가 최소가 되는 최적점을 찾는 방법이다. 이 과정은 최적설계 과정과 설계변수의 불확실성을 고려하는 신뢰성해석 과정으로 나눌 수 있다. 모멘트기반 신뢰성해석은 시스템의 통계적 모멘트를 이용하여 신뢰도를 구하는 방법이다. 일반적으로 신뢰성해석은 통계적 모멘트의 값에 따라 피어슨 시스템을 통해 시스템의 확률밀도함수를 7가지 형태로 분류하여 신뢰도를 구한다. 하지만 피어슨 시스템에서 타입 IV 분포의 경우에는 수식이 복잡하여 다루기 어려운 문제점이 있었다. 본 논문에서는 크리깅모델을 이용하여 피어슨 시스템의 단점을 개선한 신뢰성 해석기법을 크리깅모델을 이용하여 개발하고 이를 적용하여 신뢰성기반최적설계 방법을 제안한다. 피어슨 타입 IV의 수학 및 공학예제에 대하여 신뢰성기반최적설계를 수행하고 이를 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 정확성을 검증한다.

Abstract: Since conventional optimization that is classified as a deterministic method does not consider the uncertainty involved in a modeling or manufacturing process, an optimum design is often determined to be on the boundaries of the feasible region of constraints. Reliability-based design optimization is a method for obtaining a solution by minimizing the objective function while satisfying the reliability constraints. This method includes an optimization process and a reliability analysis that facilitates the quantization of the uncertainties related to design variables. Moment-based reliability analysis is a method for calculating the reliability of a system on the basis of statistical moments. In general, on the basis of these statistical moments, the Pearson system estimates seven types of distributions and determines the reliability of the system. However, it is technically difficult to practically consider the Pearson Type IV distribution. In this study, we propose an enhanced Pearson Type IV distribution based on a kriging model and validate the accuracy of the enhanced Pearson Type IV distribution by comparing it with a Monte Carlo simulation. Finally, reliability-based design optimization is performed for a system with type IV distribution by using the proposed method.

	기호설명	R :	상관행렬
R :	시스템의 신뢰도	θ :	상관계수벡터
$Y(\mathbf{x})$:	실제모델	$\mathbf{r}(\mathbf{x})$:	상관벡터
$f_X(\mathbf{x})$:	확률밀도함수	μ :	평균
$\hat{Y}(\mathbf{x})$:	크리깅모델	σ^2 :	분산
$\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$:	전역모델	$\sqrt{\beta_1}$:	왜도
$\mathbf{r}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\gamma}^*$:	국부모델		

1. 서론

§ 이 논문은 대한기계학회 2009년도 추계학술대회(2009.

11. 4.-6., 용평리조트) 발표논문임

† Corresponding Author, thlee@hanyang.ac.kr

© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

정확한 신뢰성기반 최적설계(reliability-based design optimization: RBDO)의 해를 얻기 위해서는 신뢰성

해석과정에서 신뢰도를 정확하게 구하는 과정이 요구된다. 신뢰성기반 최적설계는 최적설계와 신뢰성해석(reliability analysis)으로 나눌 수 있다. 신뢰성해석은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$P\{Y(\mathbf{X}) \leq 0\} = \int_{Y(\mathbf{x}) \leq 0} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

여기서 $Y(\mathbf{x})$ 는 설계변수 \mathbf{x} 에 대한 시스템의 제한조건(design constraints)이고 $Y(\mathbf{x}) \leq 0$ 는 시스템의 유용영역(feasible region)이다.

일반적으로 사용하는 시스템의 신뢰도를 구하는 방법은 크게 3가지가 있다. 가장 널리 알려져 있는 신뢰성해석방법으로는 랜덤변수(random variables)를 이용하여 응답을 반복적으로 계산하여 신뢰도를 구하는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)이 있다. 또 FORM(first order reliability methods),⁽¹⁾ SORM(second order reliability methods)⁽²⁾과 같이 제한조건을 테일러 급수를 이용하여 1차 혹은 2차로 근사화 하고 최대가능손상점(most probable failure point: MPP)까지의 거리를 이용하여 신뢰도를 구하는 급속확률적분법(fast probability integration method), 제한조건의 1~4차 통계적 모멘트를 통해 피어슨 시스템(Pearson system)을 이용하여 신뢰도를 구하는 모멘트기반 신뢰성해석(moment-based reliability analysis)이 있다.⁽³⁻⁶⁾

피어슨 시스템은 응답의 분포를 통계적 모멘트를 통해서 구한 계수의 값에 따라서 Type I~VII 중 Type을 결정하고 확률밀도함수를 추정하여 신뢰도를 구하는 방법이다. 하지만 Type IV 분포 함수는 수치적 계산 역시 매우 힘들 뿐만 아니라 지금까지 제안되었던 방법으로는 정확한 시스템의 신뢰도를 구하지 못하는 문제점이 있었다.⁽⁷⁾ 이러한 문제점을 해결하기 위해서 크리깅모델을 이용하여 Type IV 분포를 근사화하고 이를 통해 시스템의 신뢰도를 구하는 방법이 제안되었지만 이 역시 문제의 특성에 따라 정확한 분포를 추정하지 못하는 어려움이 있었다.⁽⁸⁾

본 연구에서는 모멘트기반 신뢰성해석 방법 중 곱분해기법(multiplicative decomposition method: MD method)을 이용하여 시스템의 1~4차 모멘트를 구하고 이를 통해 피어슨 시스템 Type IV를 이용하여 얻은 신뢰도와 몬테카를로 시뮬레이션을 통해서 구한 신뢰도를 비교하였다.⁽⁷⁾ 그리고 기존의 피어슨 시스템 Type IV의 문제점을 개선하고 몬테카를로 시뮬레이션과 비교하여 정확한 신뢰도를 구하였고 이를 신뢰성기반 최적설계에 적용하였다.

2. 크리깅모델

크리깅모델은 응답의 평균에 해당하는 전역모델 $\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}$ 와 응답까지의 편차(deviation)를 나타낸 $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 의 합으로 가정하고 예측응답을 식 (2)와 같이 정의한다.⁽⁷⁾

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서 식 (2)의 전역모델은 일반화된 최소제곱법(generalized least squared method)으로 구할 수 있다. 이때 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 는 회귀모델을 구성하는 함수이고 $\boldsymbol{\beta}$ 는 추정된 회귀모델의 계수이다. $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 는 편차를 나타내는 것으로, 평균이 0이고 공분산은 식 (3)으로 표현이 된다.

$$\text{Cov}[z(\mathbf{x}^i), z(\mathbf{x}^j)] = \sigma^2 \mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \boldsymbol{\theta}) \quad (3)$$

여기서 편차 $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 의 공분산은 σ^2 과 상관행렬 $\mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \boldsymbol{\theta})$ 의 곱으로 나타낼 수 있다. 상관행렬을 구성하는 상관함수 $\mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \boldsymbol{\theta})$ 는 식 (4)와 같이 가우스 상관관계로 정의한다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \boldsymbol{\theta}) = \exp \left[- \sum_{k=1}^{n_d} \theta_k |x^i - x^j|^2 \right] \quad (4)$$

여기서 n_d 는 설계변수의 개수, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_{n_d}]^T$ 는 최우량추정법(maximum likelihood method)을 통해서 구해지는 상관인자(correlation parameter)이고 식 (2)의 크리깅모델은 식 (5)와 같이 유도된다.

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\gamma}^* \quad (5)$$

여기서 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}$ 로 일반화된 최소자승 추정치(generalized least squared estimate)이고 $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ 는 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 로 표현된다. 여기서 \mathbf{F} 는 확장설계행렬이고 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 는 예측점 \mathbf{x} 와 실험점 \mathbf{x}^i 의 상관관계를 나타내는 상관벡터로 식 (4)를 이용하여 나타내면 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^1), \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^2), \dots, \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^n)]^T \quad (6)$$

이처럼 크리깅모델은 $\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 의 전역모델과 $\mathbf{r}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\gamma}^*$ 의 국부모델의 합으로 표현되는 보간모델이다. 일반적으로 크리깅모델의 전역모델은 0차, 1차, 2차 전역모델로 구분되고 설계자에 의해서 결정된다.

3. 모멘트기반 신뢰성해석

신뢰성해석은 곱분해기법으로 구한 제한조건의 통계적 모멘트를 피어슨 시스템을 이용하여 분포의 특성 및 확률밀도함수를 구하고 이를 통해서 시스템의 신뢰도 및 파괴확률을 구하는 방법이다.⁽⁷⁾

3.1 곱분해기법

시스템의 통계적 모멘트는 다음과 같다.

$$\mu = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7a)$$

$$\sigma^2 = \int_{\Omega} (Y(\mathbf{x}) - \mu)^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7b)$$

$$\sqrt{\beta_1} = \int_{\Omega} (Y(\mathbf{x}) - \mu)^3 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} / \sigma^3 \quad (7c)$$

$$\beta_2 = \int_{\Omega} (Y(\mathbf{x}) - \mu)^4 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} / \sigma^4 \quad (7d)$$

여기서 $\mu, \sigma^2, \sqrt{\beta_1}, \beta_2$ 는 각각 평균, 분산, 왜도, 첨도를 의미하고 $f_X(\mathbf{x})$ 는 랜덤변수 \mathbf{x} 의 결합확률밀도함수를 의미한다. 이때 식 (7)의 통계적 모멘트를 구하기 위해서 필요한 1-4 차 모멘트는 다음과 같은 과정을 통해서 구한다.

$$m_l = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^l f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (l=1,2,3,4)$$

이렇게 구한 1-4 차 모멘트를 이용하여 식 (8)을 통해 통계적 모멘트를 계산한다.

$$\mu = m_1 \quad (8a)$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 \quad (8b)$$

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{m_3 - 3m_1m_2 + 3m_1^3}{\sigma^3} \quad (8c)$$

$$\beta_2 = \frac{m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4}{\sigma^4} \quad (8d)$$

여기서 1-4 차 모멘트를 실제모델을 이용하여 구하면 많은 계산이 필요하기 때문에 효율성이 떨어지고 또 설계변수가 증가하면 비용이 급격히 상승한다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 식 (9)와 같이 실제 모델을 크리깅모델로 근사화하여 1-4 차 모멘트를 구한다.

$$m_1 = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9a)$$

$$m_2 = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9b)$$

$$m_3 = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^3 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}_2(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9c)$$

$$m_4 = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^4 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}_2(\mathbf{x}) \hat{Y}_2(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9d)$$

여기서 $\hat{Y}_2(\mathbf{x})$ 는 응답을 제공한 크리깅모델을 의미한다.

3.2 피어슨 시스템(Pearson system)

피어슨 시스템은 시스템의 분포를 추정하는 방법으로서 식 (10)과 같이 미분방정식을 만족시키는 확률밀도함수로 구성된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(Y)} \frac{df(Y)}{d\bar{y}} &= \frac{\bar{y} - a_0}{b_0 + b_1\bar{y} + b_2\bar{y}^2} \\ \bar{y} &= Y - \mu \\ b_0 &= -\sigma^2(4\beta_2 - 3\beta_1) / A \\ a_0 &= b_1 = -\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3) / A \\ b_2 &= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) / A \\ A &= (10\beta_2 - 12\beta_1 - 18) \end{aligned} \quad (10)$$

시스템의 분포는 통계적 모멘트를 이용하여 구한 계수 b_0, b_1, b_2 의 값과 이를 통해서 구한 식 (10)의 미분방정식 $b_0 + b_1\bar{y} + b_2\bar{y}^2 = 0$ 의 해의 형태에 따라 결정된다.

피어슨 Type IV 분포는 식 $b_0 + b_1\bar{y} + b_2\bar{y}^2 = 0$ 에서 \bar{y} 의 해가 허근을 갖는 경우로서 식 (10)을 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$\frac{d}{d\bar{y}}(\ln f(Y)) = \frac{(\bar{y} - a_0)}{b_0 + b_1\bar{y} + b_2\bar{y}^2} = \frac{(\bar{y} - c_1) + (\bar{y} - a_0)}{c_0 + b_2(\bar{y} + c_1)^2} \quad (11)$$

여기서 $c_1 = b_1/2b_2, c_0 = b_0 - b_1^2/4b_2$ 이고 식 (11)을 정리하면 다음과 같다.

$$f(Y) = K [c_0 + b_2(\bar{y} - c_1)^2]^{2c_2} \exp \left[\frac{c_1 - a_0}{\sqrt{c_0 b_2}} \tan^{-1} \frac{\bar{y} - c_1}{\sqrt{c_0 / b_2}} \right] \quad (12)$$

여기서 식 (12)를 해석적으로 적분하는 것은 불가능하며 상수 K 와 피어슨 Type IV 분포의 확률분포함수의 수치적 계산 역시 힘든 것으로 알려져 있다.⁽⁸⁾ 이러한 문제점을 해결하고 정확도가 높은 피어슨 Type IV 분포의 확률밀도함수를 구하기 위해서 식 (13)과 같이 크리깅모델 $\hat{G}(\mathbf{Y})$ 를 이용하여 Type IV 분포를 가정하였다.⁽⁹⁾

$$f(Y) = K [\hat{G}(\mathbf{Y})] = K [\mathbf{f}(\mathbf{Y})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{Y})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{G} - \hat{\boldsymbol{\beta}})] \quad (13)$$

여기서 확률밀도함수 $f(Y)$ 를 적분 구간 $[-\infty, \infty]$ 에서 적분한 값이 1이 되는 성질을 이용하여 K 를 구할 수 있다.

$$1 = F(\infty) = K \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{G}(\mathbf{Y})] d\mathbf{Y} \Rightarrow K = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{G}(\mathbf{Y})] d\mathbf{Y}} \quad (14)$$

이때 크리깅모델은 상관함수를 가우스 상관함수, 전역모델을 상수 모델로 가정한다. 또한 누적분포함수(cumulative distribution function)는 식 (15)와 같이 크리깅모델을 이용해서 구한 확률밀도함수를 적분하여 구할 수 있다.

$$F(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} K [\hat{G}(\mathbf{Y})] d\mathbf{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} K [\hat{\beta} + r(\mathbf{Y})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{G} - \hat{\beta})] d\mathbf{Y} \quad (15)$$

3.2.1 비편향조건 (unbiasedness condition)

식 (16)은 설계변수가 각각 정규분포를 따르고 다항식으로 이루어진 함수로 이 함수의 확률분포를 구하여보자.

$$Y(\mathbf{X}) = 1 - \frac{80}{(X_1^2 + 8X_2 + 5)} \quad (16)$$

$$X_{1,2} \sim N(5.0, 0.6^2)$$

앞에서 제안한 방법을 이용하여 확률밀도함수와 누적분포함수를 구해보면 Fig. 1, 2와 같다. Fig. 1, 2와 같이 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 구한 결과와 Table 1의 1-4 차 모멘트를 이용하여 구한 확률밀도함수가 정확하게 일치하지 않는 것을 알 수 있다. 또 Table 2와 같이 신뢰도 역시 큰 오차가 있는 것을 알 수 있는데 이것은 곱분해기법을 이용하여 구한 1차 모멘트 $(m_1)_{MD}$ 와 제안한 방법을 이용한 $(m_1)_{Pearson}$ 값이 정확하게 일치하지 않기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 식 (17)과 같이 비편향조건을 만족하도록 하여 개선된 피어슨 시스템 Type IV를 구현하면 Fig. 3, 4와 같은 결과가 나온다.

$$(m_1)_{MD} = (m_1)_{Pearson}$$

$$E[\hat{Y}(\mathbf{x})]_{MD} = E[\hat{Y}(\mathbf{x})]_{Pearson} \quad (17)$$

결과에서 알 수 있듯이 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 구한 결과와 비편향조건을 적용시킨 피어슨 시스템 Type IV의 확률분포 결과가 정확히 일치하는 것을 확인할 수 있다. 마찬가지로 누적 분포함수도 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 구한 결과와 일치하는 것을 확인할 수 있다.

또 Table 2와 같이 개선된 피어슨 시스템을 이용하면 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 구한 신뢰도와 매우 잘 일치한다.

Table 1 Results of statistical moments using MCS

Moment	Mean	Std	Skewness	Kurtosis
MCS	0.15087	0.12814	0.51275	3.52991
MD	0.15081	0.12813	0.51383	3.55086

Table 2 Reliability of MCS and Pearson system

Method	MCS	MD	Proposed method
Reliability	0.89178	0.96025	0.88826

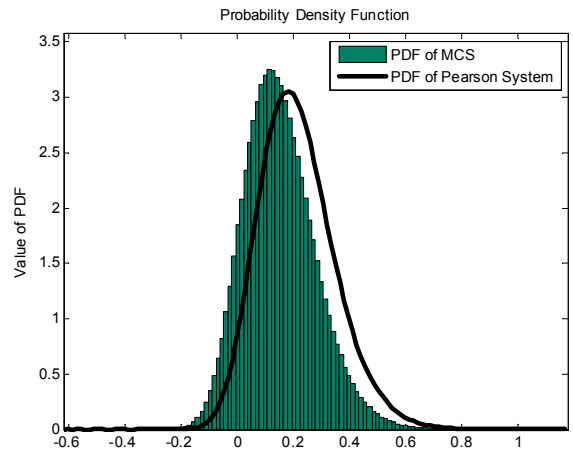


Fig. 1 PDF obtained from MCS and Pearson system

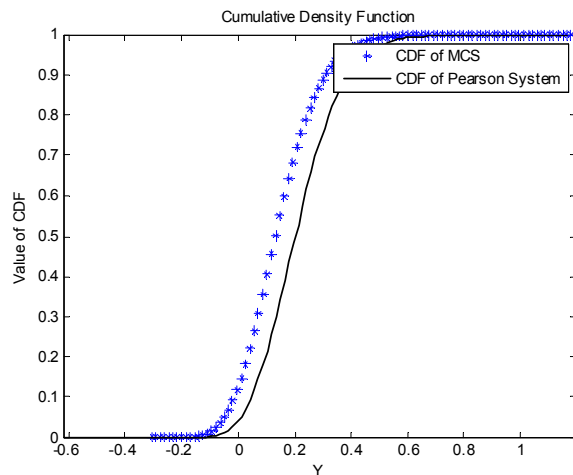


Fig. 2 CDF obtained from MCS and Pearson system

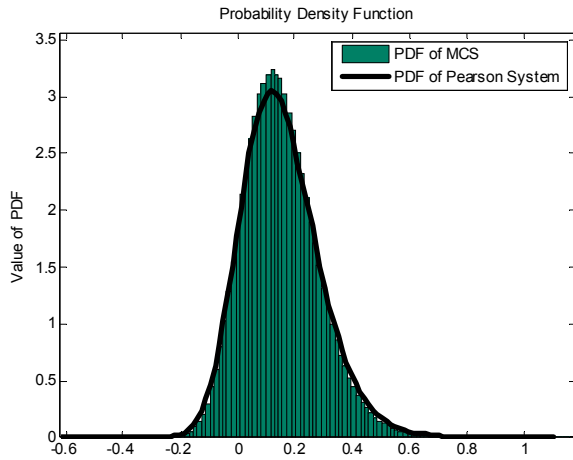


Fig. 3 PDF obtained from MCS and proposed method

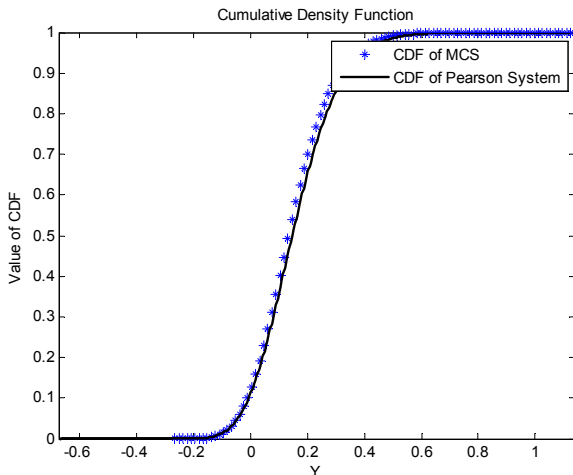


Fig. 4 CDF obtained from MCS and proposed method

4. 예 제

4.1 수학 예제

목적함수가 2 차이고 제한조건은 선형함수와 비선형성이 큰 개량된 Haupt function 을 이용하여 문제를 다음과 같이 정식화하였다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && \text{Cost}(x) = (x_1 - 3.7)^2 + (x_2 - 4.0)^2 \\
 & \text{subject to} && R(G_j(\mathbf{X}) \leq 0) \geq R^{target}, j = 1, 2 \\
 & && G_1(\mathbf{X}) = X_1 \sin(4X_1) + 1.1X_2 \sin(2X_2) \quad (18) \\
 & && G_2(\mathbf{X}) = 3 - X_1 - X_2 \\
 & && 0 \leq x_{1,2} \leq 3.5
 \end{aligned}$$

이 예제의 초기 설계점은 $\mathbf{x}_0 = [3.0, 2.6]^T$ 이고 각 설계변수의 통계적 특성은 $X_1 \sim N(3.0, 0.1^2)$, $X_2 \sim N(2.6, 0.1^2)$ 이다. 이때 설계자가 요구하는 시스템의 신뢰도는 $R = 0.97725$ 이다.

Table 4 RBDO points for mathematical example

	Optimal Point		Cost
	x_1	x_2	
RBDO	2.801769	3.236542	1.3897
Proposed method	2.802808	3.237090	1.3870

Table 5 Reliability of each constraint for mathematical example

	Reliability of Constraints using MCS	
	$R(G_1(\mathbf{X}) \leq 0)$	$R(G_2(\mathbf{X}) \leq 0)$
RBDO	0.9868	1.0000
Proposed method	0.9773	1.0000

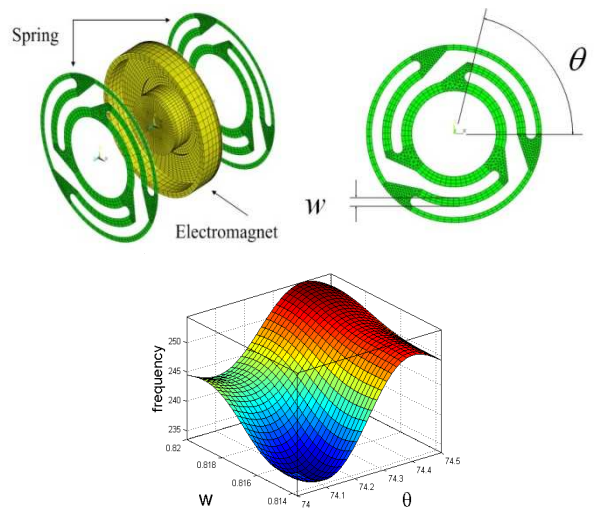


Fig. 5 Finite element model and kriging model replacing actual simulation

Table 4 와 같이 기존의 방법보다 제안한 방법을 이용한 목적함수 값이 작게 나온 이유는 제한한 방법이 더 정확한 신뢰도를 구해주기 때문이다. 또 Table 5 와 같이 각각의 제한조건에 대한 신뢰도를 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 구해보면 기존 방법보다 본 논문에서 제안한 방법이 설계자가 요구하는 신뢰도를 더 정확히 만족하는 것을 확인할 수 있다.

4.2 공학 예제

다음으로는 실제 공학예제로서 전자석과 스프링 요소로 구성되어 있는 축진동 문제이다. 이 모델은

Table 6 Results of RBDO for laterally vibrating model

	Function Call	Optimal Point		Cost
		θ	w	
Proposed method	68	74.00	0.8190	60.61

Table 7 Reliability of constraint

	Reliability of Constraints
	$R(G(\mathbf{X}) \leq 0)$
Proposed method	0.9500

고유진동수(natural frequency)를 높여 음압을 향상 시키고 이를 통해서 좋은 음질을 갖도록 설계하는 문제이다. 설계변수는 Fig. 5 와 같이 θ 와 w 이고 목적함수와 제한조건은 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && \text{volume} \\
 & \text{subject to} && R(G(\theta, w) \leq 0) \geq R^{target} \\
 & && G(\theta, w) = f - 238(Hz) \\
 & && 74 \leq \theta \leq 75, 0.8165 \leq w \leq 0.82
 \end{aligned} \tag{19}$$

설계변수는 각각 $\theta(\text{deg}) \sim N(74.5, 0.0833^2)$, $w(\text{mm}) \sim N(0.816, 0.00104^2)$ 의 통계적 특성을 갖는다. 이 모델은 1 회 해석하는데 1 분의 시간이 소요되기 때문에 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한 신뢰성기반 최적설계를 수행할 시에는 막대한 비용이 들어가는 문제가 있어 크리깅모델을 이용한 곱분해기법을 통해 신뢰성해석을 수행하는 과정이 필요하다. 크리깅모델을 생성하기 위한 실험점 개수는 전조합실시법으로 5×5 개를 선정하였다. 95%의 신뢰도를 만족하는 제품을 생산하고자 할 때 곱분해기법을 이용한 신뢰성기반 최적설계를 통해 구하면 Table 6, 7 과 같다.

5. 결 론

본 논문에서는 신뢰성기반 최적설계를 수행하기 위한 모멘트기반 신뢰성해석에서 정확한 신뢰도를 구하기 위한 개선된 피어슨 시스템 Type IV 분포를 제안하였다.

기존의 피어슨 시스템 Type IV 는 확률밀도함수를 크리깅모델로 근사화하여 신뢰도를 구하는 방법이었다. 하지만 기존 방법은 크리깅모델을 통해서 추정된 값과 몬테카를로 시뮬레이션을 통해서

구한 결과값이 일치하지 않는 문제점이 있었다.

제안한 방법은 피어슨 시스템을 통해서 구한 평균값과 곱분해 기법을 통해서 구한 평균값이 일치하게끔 하는 비편향 조건을 제시하여 보다 정확한 신뢰도를 구할 수 있었다. 예제에서 살펴본 바와 같이 응답함수의 신뢰도 값을 매우 정확하게 구할 수 있음을 예시하였다. 개선된 피어슨 시스템을 이용하여 신뢰성기반 최적설계에 적용한 결과도 마찬가지로 정확한 해를 구할 수 있는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Cornell, C. A., 1969, "A Probability-Based Structural Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 66, No. 12, pp. 974~985.
- (2) Breitung, K., 1984, "Asymptotic Approximations for Multi-Normal Integrals," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 110, No. 3, pp. 357~366.
- (3) Seo, H. S. and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distributions Using Three-Point Information," *International Journal of Production Research*, Vol. 40, No. 4, pp. 931~944.
- (4) Lee, S. H. and Kwak, B. M., 2005, "Reliability-Based Design Optimization Using Response Surface Augmented Moment Method," *Proceedings of the 6th world Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Reo de Janeiro, 30 May-3 June, 2005.
- (5) Rahman, S. and Xu, H., 2004, "A Univariate Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 4, pp. 393~408.
- (6) Youn, B. D., Xi, Z., Wells, L. J. and Wang, P., 2006, "Enhanced Dimension-Reduction(eDR) Method for Sensitivity-Free Uncertainty Quantification," *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 6-8 September 2006, Portsmouth, Virginia.
- (7) Jung, J. J., 2007, "Multiplicative Decomposition Method for Accurate Moment-Based Reliability Analysis," Ph.D. Thesis, Hanyang University.
- (8) Stuart, A. and Ord, J. K., 1994, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, 6th ed. Edward Arnold, London.
- (9) Kim, T. K. and Lee, T. H., 2009, "Reliability-based Design Optimization using Multiplicative Decomposition Method," *COSEIK*, Vol. 22, No. 04, pp. 229~306.