

# 단순 지지 경계 조건을 가진 임의 형상 평판의 고정밀도 자유 진동 해석을 위한 NDIF법 개발

## Development of NDIF Method for Highly Accurate Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Simply Supported Boundary Condition

강 상 욱\*·우 윤 환\*

Sang Wook Kang and Yoon Hwan Woo

(2010년 12월 30일 접수 ; 2011년 1월 27일 심사완료)

**Key Words** : NDIF Method(무차원 동영향 함수법), Arbitrarily Shaped Plate(임의 형상 평판), Simply Supported Boundary Condition(단순 지지 경계 조건), Free Vibration(자유 진동), Natural Frequency(고유진동수), Natural Mode(고유모드)

### ABSTRACT

The NDIF method(non-dimensional dynamic influence function method) for free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with the simply supported edge is newly developed in the paper. In order to extract the system matrix that gives the natural frequencies and natural modes of the plate of interest, the difficulty of measuring higher differential terms involved in the simply supported boundary condition is successfully overcome. Finally, the excellence of the characteristics of convergence and accuracy of the proposed method is shown through two verification examples, which indicate that natural frequencies and natural modes obtained by the proposed method are very accurate and swiftly converged even though a small number of nodes are used compared with FEM.

### 1. 서 론

다양한 형상 및 경계 조건을 가진 평판의 자유 진동 해석 기법에 대한 해석적 및 이론적 방법에 대한 다양한 연구들이 지금까지 꾸준히 연구되고 있다<sup>(1-14)</sup>. 이와 관련된 몇 가지 선행 연구들을 살펴보면, Irie<sup>(1)</sup>와 Conway<sup>(2)</sup>는 정다각형 평판에 대한 자유진동해석 기법에 대한 연구를 수행하였고, Singh<sup>(3)</sup>은 원형 및 타원 평판에 대한 고유치와 고유모드 추출 기법을 제안하였다. 또, Durvalsula<sup>(7-11)</sup>는 Rayleigh-Ritz법, Galerkin법 및 좌표계 매핑법 등

의 다양한 이론적 기법을 이용하여 평행사변형<sup>(7)</sup>, 사다리꼴<sup>(8,9)</sup>, 기울어진 사각형<sup>(10,11)</sup> 평판에 대한 고유치 해석 기법을 개발하였다.

위에서 설명한 선행 연구들<sup>(1-14)</sup>은 원형, 타원형, 평행사변형, 정다각형 등의 특별한 형상을 가진 평판에 대한 해석적 기법에 관한 것으로, 만약 평판이 임의의 형상을 가질 경우 가장 일반적인 방법은 유한요소법(finite element method)이나 경계요소법(boundary element method)과 같은 수치 해석적 방법을 이용하는 것이다<sup>(15,16)</sup>. 상기의 두 방법은 해석 대상물의 전체 영역 또는 경계 영역을 여러 개의 노드와 요소로 분할한 후 노드와 노드 사이의 변위를 보간 함수로 근사화시키는 방법을 이용한다. 그러나 이들 보간 함수들이 해석 대상 평판의 운동 지배방정식을 만족하지 않는 단점으로 인해, 유한요소법과 경

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

Tel : (02)760-4228, Fax : (02)760-4329

\* 한성대학교 기계시스템공학과

계요소법은 해의 정밀도 확보에 있어서 한계를 가지며 많은 수치 계산량을 필요로 하는 단점을 가지고 있다<sup>(17)</sup>.

상기의 단점을 극복하기 위한 방안으로, 본 저자는 해석 대상물의 경계를 노드만으로 이산화하는 무차원 동영향 함수법(NDIF법, Non-dimensional dynamic influence function method)을 처음으로 개발하였으며<sup>(17)</sup>, NDIF법을 이용하여 임의의 형상 멤브레인의 고유진동수 및 고유모드를 정확히 구할 수 있는 방법을 제안하였다<sup>(17,18)</sup>. 더 나아가, 본 저자는 고정단 경계 조건을 가진 임의의 형상 평판<sup>(19)</sup>과 혼합 경계조건을 가진 임의의 형상평판<sup>(20)</sup>에 NDIF법을 응용/확장하는 연구도 수행하였다.

최근에 와서, 본 저자는 고정단 경계 조건에 비해 수치 해석적으로 다루기가 상대적으로 어려운 자유단 경계 조건을 가진 평판의 고유진동수와 고유모드를 NDIF법을 이용하여 정확히 구하기 위한 다양한 연구들을 수행하였으나<sup>(21,23)</sup>, 단지 원형, 타원형과 같은 유선형 평판에만 적용 가능한 한계를 극복하지는 못하였다. 이러한 한계를 극복하기 위하여 저자는 평면파(plane wave)를 기저함수로 이용하는 해석적 방법을 제안하였으나<sup>(22)</sup>, 이 방법은 유선형 평판에는 적용 못하고 다각형 평판에만 적용 가능한 한계를 가진다.

이 논문에서는 지금까지 다루지 못한 경계 조건인 단순지지 경계 조건을 가진 임의의 형상 평판에 NDIF법을 적용하는 연구가 수행되었다. 제안된 방법은 저자의 자유단 평판에 대한 이전 연구<sup>(21,23)</sup>와는 달리 유선형 및 다각형 평판 모두에 적용 가능한 장점을 가진다. 한편, 단순 지지 경계 조건은 자유단 경계 조건과 마찬가지로 고차의 미분 항이 경계 조건 식에 포함되어 있기 때문에<sup>(24)</sup> 경계 조건 식으로부터 시스템 행렬을 추출하는 데에 상당한 어려움이 있으며, 이러한 어려움은 이 논문에서 성공적으로 극복되었다.

이 논문에서 제안된 NDIF법의 정확성 및 수렴성을 검증하기 위하여, NDIF법에 의해 구해진 고유진동수와 고유모드 형상은 엄밀해 또는 FEM (NASTRAN)에 의해 구해진 결과들과 비교되었다.

## 2. 이론 정식화

### 2.1 자유 진동해 가정과 이산 단순지지 경계 조건 정의

평판의 자유진동에 관한 지배방정식은 다음과 같다<sup>(24)</sup>.

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0, \quad (1)$$

여기서  $W$ 는 평판의 진동변위,  $\lambda$ 는 고유치 파라미터이며 다음과 같이 주어진다<sup>(24)</sup>.

$$\lambda = [\rho_s (2\pi f)^2 / D_E]^{1/4}, \quad (2)$$

여기서  $\rho_s$ 는 평판의 면밀도,  $f$ 는 진동수(Hz),  $D_E = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ 는 판강성(flexural rigidity of plate)을 뜻한다<sup>(24)</sup>.

그리고 평판의 단순 지지 경계 조건은 변위와 모멘트가 영(zero)인 두 개의 식으로 정의되며<sup>(24)</sup>, 다음과 같이 각각 주어진다.

$$W_\Gamma = 0, \quad (M_n)_\Gamma = 0 \quad (3, 4)$$

여기서  $\Gamma$ 는 평판의 경계를 의미한다.

이 논문에서 고려될 임의의 형상 평판은 Fig. 1에서 점선으로 표현된다. NDIF법을 해석 대상 평판에 적용하기 위해, Fig. 1에서와 같이 평판의 경계  $\Gamma$ 는  $N$ 개의 노드들로 이산화된다. 위치 벡터  $\mathbf{r}_0$  표시된 평판 내부의 임의의 한 점  $P$ 에서의 진동 변위(자유 진동해에 해당)는 다음과 같이 무차원 동영향 함수(NDIF)들의 선형 결합으로 가정된다<sup>(19)</sup>.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N [A_k J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] \quad (5)$$

여기서  $J_0$ 와  $I_0$ 는 각각 제1종 및 제2종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며,  $A_k$ 와  $B_k$ 는 미지 상수이다. 그리고  $\mathbf{r}_k$ 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판 경계에 위치한 노드  $P_k$ 에 대한 위치 벡터를 뜻한다. 참고로 베셀 함수  $J_0$ 와  $I_0$ 의 선형 결합만으로도 임의의 형상 평판의 진동변위를 가정할 수 있는 이유는 저자의 기 발표 논문들을 참조하기 바란다<sup>(19-23)</sup>.

가정된 자유 진동 해 식(5)가 평판의 경계에 위치한 노드들 위에서 단순지지 경계 조건을 만족하도록 하기 위해, 경계  $\Gamma$ 를 따라 연속적으로 정의된 ‘연속 경계 조건’ 식 (3), (4)를 경계 노드에 대

해 이산화하여, 다음과 같은 ‘이산 경계 조건’으로 변형한다.

$$W(\mathbf{r}_i) = 0, \tag{6}$$

$$M_n(\mathbf{r}_i) = 0 \tag{7}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

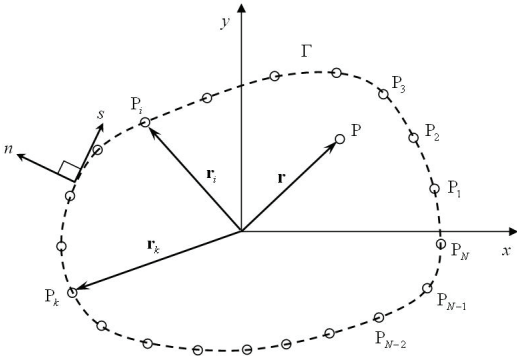
여기서  $\mathbf{r}_i$ 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판의 경계에 놓인 노드  $P_i$ 에 대한 위치벡터를 뜻한다.

**2.2 단순 지지 경계 조건 고찰**

단순 지지 경계 조건 중에 모멘트가 영(zero)인 조건인 식 (7)을 접선-법선 방향 좌표계(tangential-normal coordinates)의 관점에서 표현하면 다음과 같다<sup>(24)</sup>.

$$M_n(\mathbf{r}_i) = \frac{\partial^2 W(\mathbf{r}_i)}{\partial n_i^2} + \frac{\nu}{R_i} \frac{\partial W(\mathbf{r}_i)}{\partial n_i} = 0 \tag{7a}$$

여기서  $R_i$ 는 노드  $P_i$ 에서의 경계의 곡률 반경,  $n_i$ 은 노드  $P_i$ 에서의 경계의 법선 방향,  $\nu$ 는 푸아송비를 나타낸다. 식 (7a)에서 알 수 있듯이 평판의 경계가 유선형이 아닌 직선 경계로만 구성되어 있다면, 곡률 반경  $R_i$ 가 무한대가 되어 식 (7a)의 두 번째 항은 사라지게 된다. 결과적으로 사각형, 삼각형 등의 다각형 평판인 경우, 평판의 고유진동수는 푸아송비와 무관하게 되어, 평판을 멤브레인으로 유사(analogy)시켜서 비교적 간단하게 고유치 해석을 수행할 수 있다.



**Fig. 1** Arbitrarily shaped plate discretized with boundary nodes  $P_1, P_2, \dots, P_N$

이 논문의 경우는 평판의 형상을 다각형으로 국한하지 않고 일반적인 모든 임의 형상을 고려하기 때문에, 식 (7a)에서 두 번째 항은 그대로 고려될 것이다.

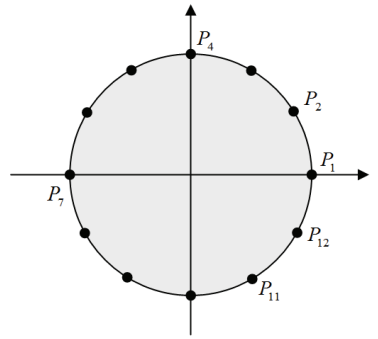
**2.3 시스템 행렬식 구성**

해석 대상 평판의 시스템 행렬을 추출하기 위하여, 가정된 자유 진동해 식 (5)에 이산 경계 조건 식 (6), (7a)을 적용하면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

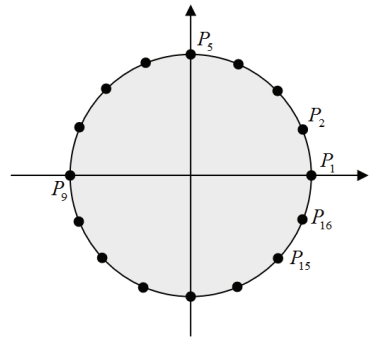
$$\sum_{k=1}^N [A_k J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n_i^2} \sum_{k=1}^N [A_k J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] + \frac{\nu}{R_i} \frac{\partial}{\partial n_i} \sum_{k=1}^N [A_k J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)] = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$



(a) 12 nodes



(b) 16 nodes

**Fig. 2** Simply supported circular plates with 12 and 16 nodes on the boundary

식 (8), (9)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같이 각각 정리된다.

$$\mathbf{SM}^J \mathbf{A} + \mathbf{SM}^I \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\mathbf{SM}_M^J \mathbf{A} + \mathbf{SM}_M^I \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

여기서 행렬  $\mathbf{SM}^J$ ,  $\mathbf{SM}^I$ ,  $\mathbf{SM}_M^J$ ,  $\mathbf{SM}_M^I$ 의  $i$ 행,  $j$ 열 성분은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{SM}^J(i, k) = J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|), \quad (12)$$

$$\mathbf{SM}^I(i, k) = I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|), \quad (13)$$

$$\mathbf{SM}_M^J(i, k) = \frac{\partial^2}{\partial n_i^2} J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + \frac{\nu}{R_i} \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|), \quad (14)$$

$$\mathbf{SM}_M^I(i, k) = \frac{\partial^2}{\partial n_i^2} I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + \frac{\nu}{R_i} \frac{\partial}{\partial n_i} I_0(\lambda|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|). \quad (15)$$

그런데, 식 (14), (15)에서  $i = k$ 인 경우(즉, 노드  $P_i$ 와 노드  $P_k$ 가 일치할 경우), 분모가 영(zero)이 되는 항들이 발생하게 되어 성분 값들을 구할 수가 없게 된다. 그래서 이 논문에서는  $i \neq k$ 인 경우만을 고려해서 식 (11)의 행렬식을 구성하였다.

#### 2.4 해석 대상 평판의 시스템 행렬 구성 및 고유진동수와 고유모드 추출

앞에서 구한 시스템 행렬식 식(10), (11)을 하나의 행렬식으로 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{SM}^J & \mathbf{SM}^I \\ \mathbf{SM}_M^J & \mathbf{SM}_M^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

다음으로 식 (16)은 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\mathbf{SM}(f) \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

여기서

$$\mathbf{SM}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}^J & \mathbf{SM}^I \\ \mathbf{SM}_M^J & \mathbf{SM}_M^I \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

식 (17)의  $\mathbf{SM}(f)$ 는 해석 대상 평판의 시스템 행렬을 의미하며, 식 (2)에서 설명한 진동수  $f$ 의 함수이다.

마지막으로 평판의 고유진동수는 시스템 행렬  $\mathbf{SM}(f)$ 의 판별식이 영(zero)이 되게 하는 조건인 다음의 식으로부터 구해 질 수 있다.

$$\det[\mathbf{SM}(f)] = 0. \quad (20)$$

그리고 고유모드 형상은 다음과 같은 과정을 통해 구해질 수 있다. 먼저 식 (20)에서 구한 고유진동수를 식 (17)에 대입하여 벡터  $\mathbf{C}$ 를 구한다. 다음으로 벡터  $\mathbf{C}$ 를 식 (5)에 대입하면, 식 (5)로부터 고유모드 형상을 구할 수 있다.

한편, 식 (20)으로부터 구한 고유진동수들 중에는 해석 대상 평판의 고유진동수뿐만 아니라, 해석 대상 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유진동수도 포함되어 있는 것이 확인되었다. 이러한 사실은 지금까지 본 저자가 수행해온 연구 결과들<sup>(17-20)</sup>과도 일치한다. 이러한 멤브레인의 고유진동수를 잉여 고유진동수(spurious natural frequency)라 부르며, 이들 잉여 고유진동수를 효과적으로 제거할 수 있는 방안에 대한 연구가 향후 진행될 것이다. 참고로, 해석 결과 속에 섞여 있는 평판 고유진동수와 잉여 고유진동수를 구분하기 위하여, 멤브레인에 대한 NDIF법 해석을 수행하여 멤브레인 고유치를 먼저 추출하였다.

### 3. 검증 예제

이 논문에서 정립한 단순 지지 평판에 대한 NDIF법의 수렴성 및 정확성을 검증하기 위해 두 가지 종류의 평판이 검증 예제로 고려되었다. 두께( $h$ )가 7 mm, 영률( $E$ )이 210 GPa, 푸아송비( $\nu$ )가 0.3, 밀도( $\rho_s/h$ )가 7820 kg/m<sup>3</sup>인 물성치를 가지는 평판이 이 예제들에서 사용되었다.

#### 3.1 단순지지 원형 평판

이 논문에서 제안된 방법의 정확성을 검증하기

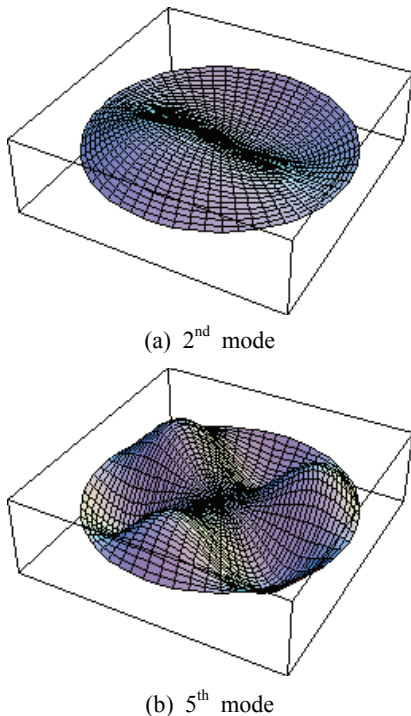
위해, 엄밀해가 존재하는 반지름이 1m인 단순 지지 원형 평판을 검증 예제로 먼저 고려하였다.

제안된 NDIF법의 수렴성을 보여주기 위해, 원형 평판의 경계 노드 개수  $N$ 을 12개, 16개, 20개로 증가시키면서 해석을 수행하였으며, 해석 결과는 Table 1에서 제시되었다. Fig. 2는 12개와 16개의 노드로 이산화된 원형 평판의 예를 보여준다.

Table 1에서 알 수 있듯이, 이 논문에서 제안된

**Table 1** Natural frequency  $f_i$ (Hz) of the simply supported circular plate

	NDIF Method			Exact solution <sup>(25)</sup>	FEM (1732 nodes)
	N=12	N=16	N=20		
1	8.622	8.624	8.624	8.694	8.617
2	24.25	24.28	24.28	24.36	24.26
3	44.72	44.75	44.75	44.82	44.63
4	51.91	51.93	51.93	51.99	51.81
5	None	69.80	69.80	69.80	69.54
6	84.63	84.70	84.70	84.77	84.42



**Fig. 3** Mode shapes of the circular plate obtained by the proposed method(20 nodes)

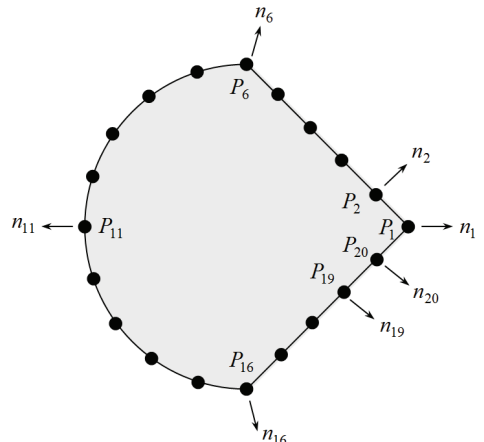
NDIF법인 경우, 노드의 개수가 증가함에 따라 고유진동수가 엄밀해<sup>(25)</sup>에 정확히 수렴되고 있음을 확인할 수 있다. 더 나아가, 단지 20개의 노드만을 사용한 NDIF법 해석 결과와 1732개 노드를 사용한 FEM 해석 결과를 엄밀해와 비교해볼 때, 단지 20개의 노드를 사용한 NDIF법이 훨씬 더 정확한 결과를 제공함을 확인할 수 있다.

Fig. 3은 이 논문에서 제안된 NDIF법에 의해 구해진 고유모드 형상을 보여준다. 지면 관계상 단지 두 개의 모드 형상만을 제시하지만, 나머지 고유모드들도 FEM에 의해 구해진 모드들과 잘 일치하는 것으로 확인 되었다.

한편, Table 1에서  $N=12$ 인 경우에 다섯 번째 고유진동수만이 구해지지 않은 이유는, Fig. 3에서 제시된 다섯 번째 고유모드 형상을 보면 알 수 있다. 다섯 번째 고유모드는 원주 방향으로 3개의 노달라인(nodal line)을 가지고 있기 때문에 원주 방향으로 모드 형상 변화가 심한 모드이다. 결과적으로 12개의 노드만으로는 다섯 번째 모드 형상을 표현하기에는 노드 개수가 부족해서 다섯 번째 고유진동수가 구해지지 않은 것으로 예측할 수 있다.

**3.2 임의의 형상 평판**

이 검증 예제에서는 Fig. 4와 같이 원형과 사각형 모양이 결합된 임의의 형상 평판에 대한 자유진동 해석이 수행되었다. NDIF법을 적용하기 위해 평판의 경계는 12개, 16개, 20개의 노드로 이산화되었으며,

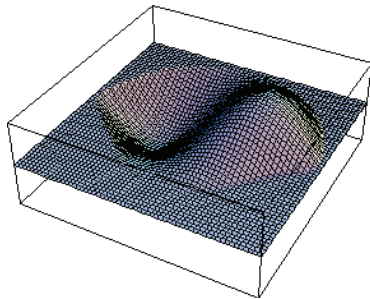


**Fig. 4** Simply supported arbitrarily shaped plate with 20 nodes on the boundary

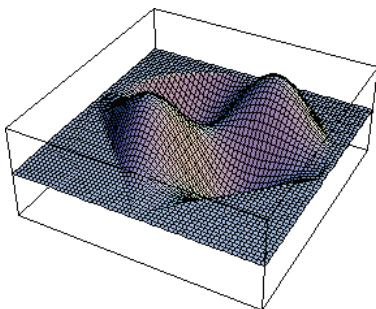
Fig. 4는 20개의 노드로 이산화된 경우를 보여준다. 이 논문에서 제안된 NDIF법에 의한 해석 결과와 FEM에 의한 해석 결과는 Table 2에 제시되어있다. 앞에서 예를 들은 원형 평판의 경우와 마찬가지로, NDIF법의 경우 경계 노드의 수가 증가함에 따라 고유진동수가 특정 값으로 수렴되고 있는 경향을 확인할 수 있으며, 단지 20개의 경계 노드를 사용한 경우에도 3124개의 노드를 사용한 FEM 해석 결과와 거의 일치함을 확인할 수 있다. 이러한 사실

**Table 2** Natural frequency  $f_i$ (Hz) of the simply supported arbitrarily shaped plate

	NDIF Method			FEM	
	$N=12$	$N=16$	$N=20$	2314 nodes	3124 nodes
1	11.54	11.60	11.63	11.98	11.98
2	29.08	29.37	29.51	30.37	30.37
3	32.30	32.35	32.45	32.43	32.44
4	50.19	51.70	51.89	53.28	53.30
5	60.20	60.59	60.61	60.72	60.73
6	None	63.95	64.37	64.54	64.55



(a) 2nd mode



(b) 5th mode

**Fig. 5** Mode shapes of the arbitrarily shaped plate obtained by the proposed method(20 nodes)

로부터 이 논문에서 제안된 NDIF법은 적은 개수의 노드를 사용한 경우에도 우수한 수렴성과 정확성을 가진다고 말할 수 있다.

Fig. 5는 NDIF법에 의해 구해진 임의의 형상 평판의 고유모드 형상을 보여준다. 지면 관계상 나머지 고유모드들은 제시되지 않았지만, 모든 고유모드들이 FEM에 의해 구한 고유모드 형상과 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

한편, Fig. 4에서와 같이 본 임의의 형상 평판은 세 군데( $P_1, P_6, P_{16}$ )위치에서 모서리를 가지고 있으며, 이들 모서리에서의 법선 방향은 모서리 양 쪽 변(edge)의 두 법선 방향 벡터의 평균 값으로 결정되었다. 그리고, 이들 모서리에서의 곡률 반경( $R_i$ )도 모서리에 바로 근접한 양 쪽 변(edge)의 두 곡률 반경의 평균값으로 결정되었다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는 단순 지지 경계 조건 식 속에 포함되어 있는 고차 미분 항을 수치해석적으로 정확히 고려하여, NDIF법을 단순지지 임의의 형상 평판에 확장/적용하는 연구가 성공적으로 이루어졌다. 검증 예제에서 확인할 수 있듯이, 이 논문에서 제안된 방법은 적은 개수의 노드를 사용함에도 불구하고 엄밀해 또는 FEM 해석 결과에 신속히 수렴해서, 정확한 고유진동수와 고유모드를 제공함이 확인되었다. 향후에는 이 논문에서 해결 못한 경계 노드  $P_i$ 와 노드  $P_k$ 가 일치했을 경우에 발생하는 문제와 잉여 고유진동수 발생 문제를 해결하기 위한 추가 연구가 진행될 것이다.

#### 후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0009422).

이 연구는 한성대학교 교내연구비 지원과제임.

#### 참 고 문 헌

- (1) Irie, T., Yamada, G. and Umesato, K., 1981, Free Vibration of Regular Polygonal Plates with

Simply Supported Edges, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 69, No. 5, pp. 1330~1336.

(2) Conway, H. D., 1961, The Bending, Buckling, and Flexural Vibration of Simply Supported Polygonal Plates by Point-matching, Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, pp. 288~291.

(3) Singh, B. and Chakraverty, S., 1992, Transverse Vibration of Simply Supported Elliptical and Circular Plates Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables, Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, No. 1, pp. 149~155.

(4) Conway, H. D. and Karnham, K. A., 1965, The Free Flexural Vibration of Triangular, Rhombic and Parallelogram Plates and Some Analogies, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 7, pp. 811~816.

(5) Mazumdar, J., 1973, Transverse Vibration of Membranes of Arbitrary Shape by the Method of Constant-deflection Contours, Journal of Sound and Vibration, Vol. 27, pp. 47~57.

(6) Nagaya, K., 1978, Vibrations and Dynamic Response of Membranes with Arbitrary Shape, Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 153~158.

(7) Durvasula, S., 1969, Free Vibration of Simply Supported Parallelogrammic Plates, Journal of Aircraft, Vol. 6, pp. 66~68.

(8) Chopra, I. and Durvasula, S., 1972, Vibration of Simply Supported Trapezoidal Plates, I. Symmetric Trapezoids, Journal of Sound and Vibration, Vol. 19, pp. 379~392.

(9) Chopra, I. and Durvasula, S., 1972, Vibration of Simply Supported Trapezoidal Plates, II. Unsymmetric Trapezoids, Journal of Sound and Vibration, Vol. 20, pp. 125~134.

(10) Durvasula, S., 1968, Natural Frequencies and Modes of Skew Membranes, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 44, pp. 1636~1646.

(11) Durvasula, S., 1969, Natural Frequencies and Modes of Clamped Skew Plates, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 7, pp. 1164~1167.

(12) Hasegawa, M., 1957, Vibration of Clamped Parallelogrammic Isotropic Flat Plates, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 24, pp. 145~146.

(13) Hamada, M., 1959, Compressive or Shear Buckling Load and Fundamental Frequency of a Rhomboidal Plate with All Edges Clamped, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 2, pp. 520~526.

(14) Nair, P. S. and Durvasula, S., 1973, Vibration of Skew Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 26, pp. 1~19.

(15) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, New Jersey: Prentice-Hall.

(16) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, New York: Springer-Verlag.

(17) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function, Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

(18) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function, Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(19) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(20) Kang, S. W., 2002, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(21) Kang, S. W., et al., 2003, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.

(22) Kang, S. W., 2007, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free

Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(23) Kang, S. W., 2008, Development of Meshless Method for Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Free Plates Using LocalPolar Coordinates, Transactions of the Korean Society for Noise and

Vibration Engineering, Vol. 18, No. 6, pp. 674~680.

(24) Meirovitch, L., 1967, Analytic Methods in Vibrations, New York: Nacmillan Publishing, pp. 179~182.

(25) Blevivs, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, New York: Litton Education Publishing, pp. 239~245.