

일정 열 유속 벽을 갖는 수평 환형 공간에서의 준주기성과 혼돈대류

유 주 식¹

QUASI-PERIODICITY AND CHAOTIC CONVECTION IN A HORIZONTAL ANNULUS WITH A CONSTANT HEAT FLUX WALL

Joo-Sik Yoo¹

This study investigates the bifurcation sequence to chaos in a horizontal annulus with a constant heat flux wall. After the first Hopf bifurcation from a steady to a simple time-periodic flow with a fundamental frequency, quasi-periodic flows with two or three incommensurable frequencies appear. A reverse transition from a quasi-periodic flow to a simple periodic flow is observed with increase of Rayleigh number. And finally, chaotic convection is established after appearance of three incommensurable frequencies at a high Rayleigh number. Simple periodic flows exist between quasi periodic flows. The transition route to chaos of the present simulations follows the Ruelle-Takens route.

Key Words : 진동 대류(Oscillatory Convection), 주기 유동(Periodic Flow), 준주기 유동(Quasi-periodic flow), 혼돈 대류(Chaotic Convection)

1. 서 론

수평 환형 공간은 열적인 불안정과 수력학적 불안정이 모두 공존하기 때문에 물리적으로 매우 흥미로운 구조로서 환형의 기하학적 형태와 유체의 특성에 따라 다양한 자연 대류 현상이 관찰되었다[1-3]. 그런데 지금까지 주로 연구된 것은 벽면이 모두 일정한 온도를 가진 경우이고, 특히 진동하는 대류의 분기 현상에 대한 연구는 많지 않다.

본 연구에서는 안쪽 벽이 일정한 열 유속[4-5]으로 가열되고 있는 환형 공간에서 일어나는 진동 대류의 특성을 조사한다. 진동하는 대류는 유동의 시간적 거동에 따라 단순 주기적인 운동, 2개 혹은 3개의 약분할 수 없는 주파수를 갖는

준주기적인 운동 등으로 나눌 수 있으며 최종적으로는 불규칙적인 혼돈 유동으로 발전된다. 이와 같은 시간적인 혼돈(temporal chaos)으로의 천이 경로는 아주 흥미 있는 현상으로서 유체 역학 뿐만 아니라 여러 분야의 비선형 시스템에 걸쳐 광범위하게 연구되어 왔다[6].

일정 온도 벽을 갖는 환형에서의 진동 대류에 대한 연구에는 Labonia and Guj[7]와 Yoo and Han[8]에 의한 연구가 있다. Labonia and Guj[7]는 $D_i/L = 1.47$ 인 환형 공간에서의 공기의 자연 대류를 실험을 통하여 연구하였고, Yoo and Han[8]은 $D_i/L = 2$ 인 환형 공간에서 주기 3배(period-tripling) 분기 현상을 보였다. 여기에서 D_i , L 은 각각 안쪽 실린더 지름과 두 실린더 사이의 간격을 나타낸다(Fig. 1). 그리고 D_o 는 바깥 실린더 지름이다.

일정 열 유속 벽을 갖는 환형에 대한 연구로는 비교적 근래에 수행된 Yoo[9]의 연구가 있다. Yoo[9]는 $D_o/D_i = 5$ 인 넓은 환형을 조사하여 연속적인 주기 배가(period-doubling)

접수일: 2011년 6월 21일, 수정일: 2011년 8월 11일,

게재확정일: 2011년 8월 12일.

1 종신회원, 안동대학교 기계교육과

E-mail: jsyoo@andong.ac.kr

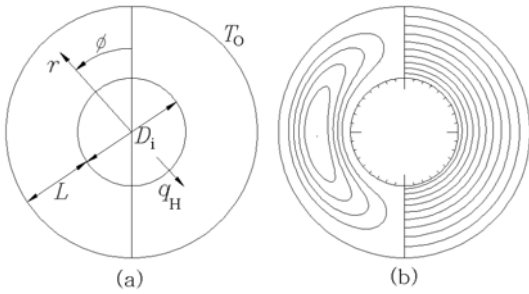


Fig. 1 (a) Definition sketch; (b) Streamlines and isotherms at small Rayleigh number.

분기 현상과 비주기 영역에 존재하는 하나의 주기적인 창을 발견하였다. $D_o/D_i = 5$ 에서의 카오스로의 천이 경로[9]는 Feigenbaum의 Period-doubling scenario[10]와 일치한다. D_i, L 은 각각 안쪽 실린더 지름과 두 실린더 사이의 간격을 나타낸다.

진동하는 대류에 있어서 혼돈 상태로의 천이 현상을 조사하기 위해서는 매우 긴 시간 동안 아주 정확한 계산을 수행해야 한다. 본 연구에서 고려하는 환형은 $D_i/L = 1.5$ 이며 $Pr = 0.02$ 인 낮은 Prandtl 수 유체에 대해 진동 대류의 천이 현상을 조사한다. 일정 온도 벽을 갖는 경우와 넓은 폭의 환형과는 달리 여러 가지의 준주기적인 유동과 매우 복잡한 천이 현상이 관찰되었다.

2. 해 석

Fig. 1(a)에 환형의 구조와 좌표계를 나타내었다. 바깥쪽 실린더는 일정 온도(T_o)를 유지하고 있으며, 안쪽 실린더는 일정 열 유속(q_H)을 받고 있다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화를 무시한다.

유동함수(streamfunction) Ψ 와 와도(vorticity) ω 에 대한 무차원 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - Pr Ra \left(\sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos \phi \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 무차원 온도(θ)는 $\theta = k(T - T_o)/q_H L$, Rayleigh 수는 $Ra = \alpha g(q_H L/k)L^3/\kappa \nu$ 이고, 와도와 유동함수 및 Jacobian은 다음과 같이 정의된다.

$$u = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \omega = \frac{\partial}{r \partial r}(rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi}(u) \quad (4)$$

$$\mathcal{J}(f, g) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right)$$

그리고 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = -1 \text{ at } r = r_i$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad (6)$$

$$\theta = 0 \text{ at } r = r_o$$

각도(ϕ) 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \text{ at } \phi = 0, \pi \quad (7)$$

유한 차분법을 사용하여 식 (1)-(7)의 비정상 방정식을 푼다. 식 (1)과 (3)의 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 방법[11]을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 각도 방향(ϕ)으로는 균일 격자를 이용하고 반경(r) 방향으로는 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta - 1)\}}{\tanh C} \right] \quad (8)$$

with $C = 1.5, 0 \leq \eta \leq 1$

본 연구에서 사용한 격자계는 (45×65) 이다. 진동하는 대류의 특성을 조사하기 위해 계산 기간 동안에 환형의 갭 중심에서의 유동함수 $\Psi_c(t)$ 의 값을 기록한다.

$$\Psi_c(t) = \Psi(r_c, \pi/2, t), r_c = \frac{r_i + r_o}{2} \quad (9)$$

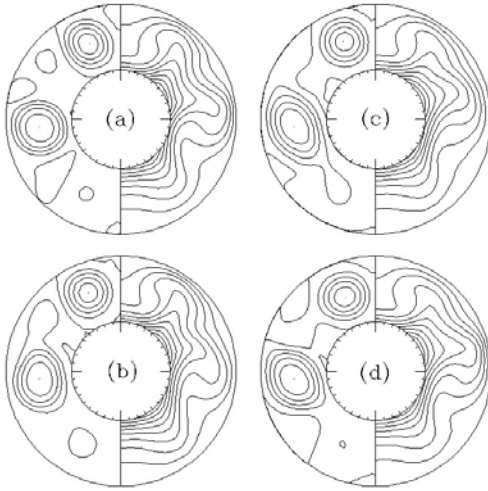


Fig. 2 Instantaneous streamlines and isotherms over one period of oscillation at $Ra = 4 \times 10^4$:
 (a) at $t = t_1$ at which $\Psi_c(t)$ takes its minimum value;
 (b) at $t = t_1 + P/4$; (c) at $t = t_1 + 2P/4$;
 (d) at $t = t_1 + 3P/4$. P is the period of oscillation.

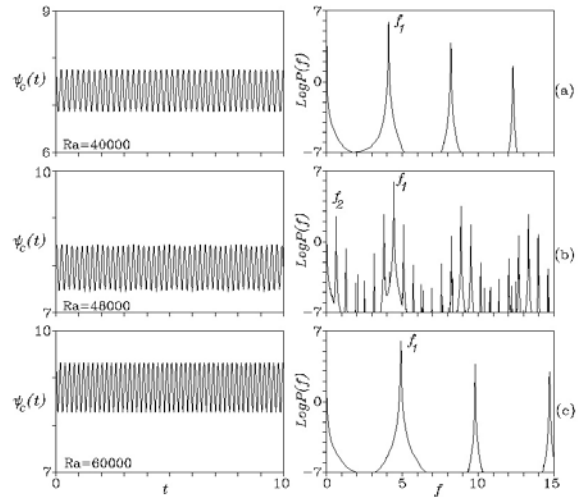


Fig. 3 Records of $\Psi_c(t)$ and power spectra:
 (a) $Ra = 4 \times 10^4$; (b) $Ra = 4.8 \times 10^4$;
 (c) $Ra = 6 \times 10^4$.

그리고 $\Psi_c(t)$ 의 Power spectrum을 분석하여 시간적인 거동 특성과 분기 현상(bifurcation phenomena)을 조사한다. Power spectrum은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\Psi}_c(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \exp(i2\pi ft) \Psi_c(t) dt \quad (10)$$

$$P(f) = |\hat{\Psi}_c(f)|^2 \quad (11)$$

하나의 Ra 에 대해 3×10^5 혹은 6×10^5 time step을 계산하였다. 데이터의 sampling time step은 $\Delta t_s = 0.0075$ 이며 축적된 데이터의 후반부에 있는 2^{14} 개의 연속된 데이터로써 Power spectrum을 구한다.

분기 현상은 주로 Power spectrum을 분석하여 조사하지만 때로는 Phase space, Correlation function, Poincaré section map을 함께 이용한다. Correlation function은 다음과 같이 정의된다.

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_c'(t) \Psi_c'(t + \tau) dt \quad (12)$$

$$\Psi_c'(t) = \Psi_c(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \Psi_c(t) dt \quad (13)$$

$C(\tau)$ 는 특히 비주기적인 운동을 조사하는 하나의 유용한 척도가 된다. 주기적인 신호에 대해서는 $C(\tau)$ 가 주기함수가 되고, 비주기적인 신호에 대해서는 $C(\tau)$ 가 0으로 접근해 간다.

3. 결과 및 논의

일정 열 유속 벽을 갖는 수평 환형 공간에서도 Ra 가 작을 때는 Fig. 1(b)와 같은 콩팥(kidney) 모양의 셀을 갖는 정상 상태 대류가 일어난다. 그러나 Ra 를 증가시키면 환형의 위 부분에서 반대방향으로 회전하는 하나의 소용돌이가 형성되며 시간에 따라 진동하는 대류가 일어난다. $Ra \leq 1000$ 에서는 정상 상태 대류가 유지된다.

$Ra \geq 2000$ 에서는 진동하는 대류가 일어나는데 주기적인 운동을 보이는 $Ra = 4 \times 10^4$ 에서의 몇 개의 순간적인 유동장을 Fig. 2에 도시하였다. $\Psi_c(t)$ 의 거동은 Fig. 3(a)와 같다. Fig. 2(a-d)는 한 주기 동안의 유동장을 $P/4$ 간격으로 나타낸 것이다. 진동하는 대류가 충분히 확립된 $Ra = 4 \times 10^4$ 에서는 뚜렷하게 구분되는 다수 셀 유동(multicellular flow)이 일어난다. 열적으로 가장 불안정한 영역인 환형의 위 부분에 생성된 소용돌이는 진동 기간 내에 거의 일정한 형태를 유지하지만 환형의 측면 부분에서는 작

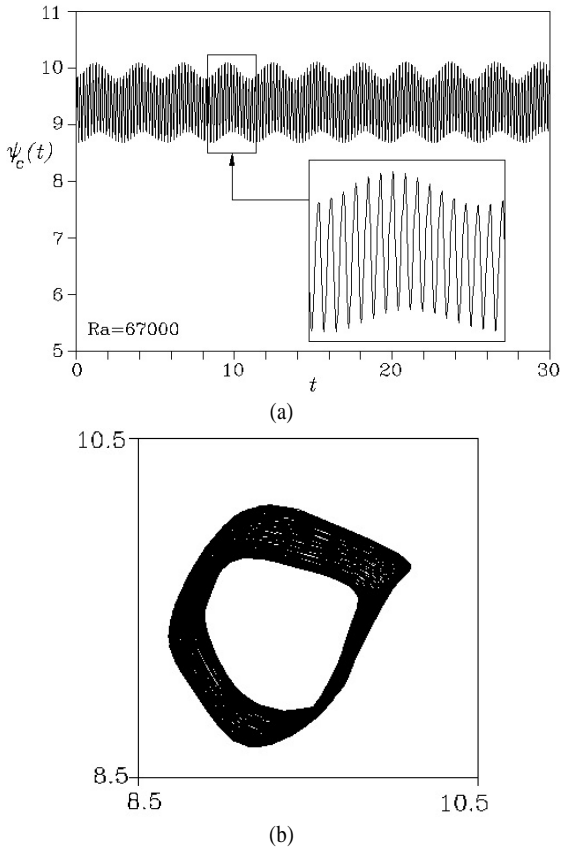


Fig. 4 (a) Phase space plots and (b) records of $\Psi_c(t)$ with $Ra = 6.7 \times 10^4$. The plotted in (a) is $\Psi_c(t)$ versus $\Psi_c(t + \tau_d)$ with $\tau_d = 0.15$.

을 셀들의 분리와 합체를 보여주고 있다.

1000 < Ra < 2000에서 정상 상태에서부터 주기적으로 진동하는 대류가 일어난 후에 Ra의 증가와 함께 유동은 최종적으로 비주기적인 혼돈 대류로 발전된다. 세부적인 분기 현상을 규명하기 위하여 여러 변수에 대하여 많은 계산을 수행하였는데 일정 온도 벽을 갖는 경우[7,8]와 넓은 폭의 환형[9]과는 달리 매우 복잡한 분기 현상이 관찰되었다. 혼돈 대류로 천이하는 경로를 보여주는 $\Psi_c(t)$ 와 Power spectrum 및 Phase space를 Fig. 3 ~ Fig. 7에 도시하였다. 관찰된 현상은 다음과 같다.

(1) $2 \times 10^3 \leq Ra \leq 4.4 \times 10^4$ (P) : Fig. 3(a)와 같이 하나의 기본 주파수(fundamental frequency) f_1 을 갖는 단순 주기 운동이 일어난다. 가장 큰 피크(peak)는 f_1 에 있으며,

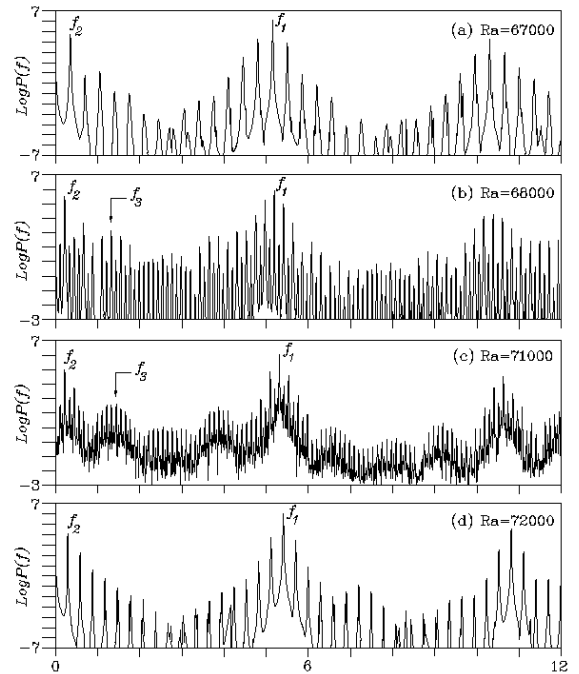


Fig. 5 Power spectra showing quasi-periodic flows with two or three incommensurable frequencies: (a) $Ra = 6.7 \times 10^4$; (b) $Ra = 6.8 \times 10^4$; (c) $Ra = 7.1 \times 10^4$; (d) $Ra = 7.2 \times 10^4$.

$Ra = 4 \times 10^4$ 인 Fig. 3(a)에서 $f_1 = 4.272$ 이고 다른 주파수들은 모두 f_1 의 정수배 ($f = m f_1$; $m = 1, 2, 3, \dots$)로 표시된다.

(2) $4.5 \times 10^4 \leq Ra \leq 5.1 \times 10^4$ (QP2) : Ra가 커질수록 초기의 단순 주기 운동은 노이즈에 의해 방해를 받게 된다. 그리하여 이 영역에서는 두 개의 약분할 수 없는 주파수(incommensurable frequency) f_1, f_2 를 갖는 준주기적인 운동이 일어난다. 준주기적인 영역에서 피크들은 모두 f_1, f_2 의 선형 조합 $f = m_1 f_1 + m_2 f_2$ (m_1, m_2 는 정수)로 표현된다. $Ra = 4.8 \times 10^4$ 인 Fig. 3(b)에서 기본 주파수 $f_1 = 4.443, f_2 = 0.6429$ 이며 다른 피크들의 주파수들은 $2f_2, f_1 - 2f_2, f_1 - f_2, f_1 + f_2, \dots$ 등이다.

(3) $5.2 \times 10^4 \leq Ra \leq 6.4 \times 10^4$ (P) : 하나의 기본 주파수 f_1 을 갖는 단순 주기 운동이 다시 일어난다. $Ra = 6 \times 10^4$ 인 Fig. 3(c)에서 $f_1 = 4.883$ 이고 다른 주파수들은 모두 f_1 의 정수배이다.

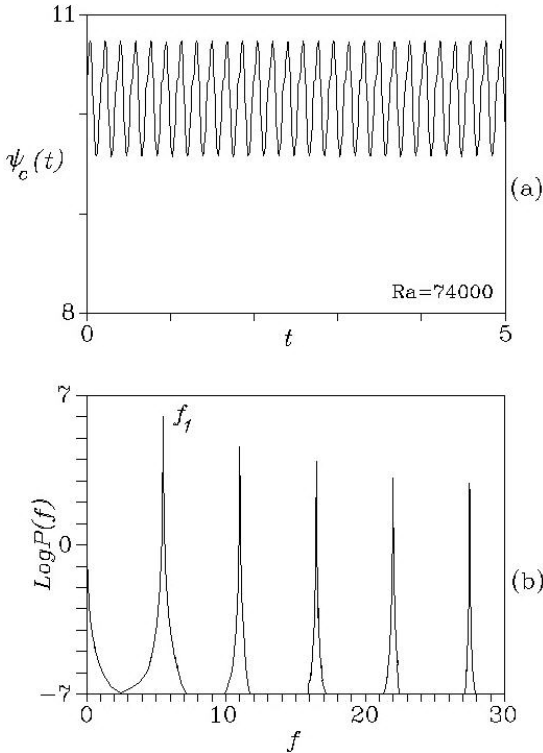


Fig. 6 Record of $\Psi_c(t)$ and the power spectrum at $Ra = 7.4 \times 10^4$.

첫 번째 단순주기 운동(1)에 비하여 f_1 은 큰 값을 가지며 더욱 더 빠른 진동을 한다.

(4) $6.6 \times 10^4 \leq Ra \leq 6.7 \times 10^4$ (QP2): 두 개의 기본 주파수 f_1, f_2 를 갖는 준주기적인 운동이 일어난다. $Ra = 6.7 \times 10^4$ 에서의 유동 특성을 Fig. 4와 Fig. 5(a)에 도시하였다. 먼저 Fig. 4의 $\Psi_c(t)$ 와 Phase space는 준주기적인 운동을 잘 보여주고 있다. 그리고 Fig. 5(a)의 Power spectrum에서 기본 주파수 $f_1 = 5.151, f_2 = 0.3499$ 이며 다른 피크들은 모두 f_1, f_2 의 선형 조합 $f = m_1 f_1 + m_2 f_2$ (m_1, m_2 는 정수)로 표현된다.

Fig. 4의 진동 모양은 Labonia and Guj[7]가 $D_f/L = 1.47$ 인 일정 온도 벽을 갖는 환형에서의 공기에 대한 실험에서 관찰한 모양과 비슷하다. 경계 조건과 유체가 다르지만 비슷한 형태의 진동이 관찰되었다. 그 이유를 분명하게 알 수는 없지만 환형의 자연대류에서는 기하학적 변수가 큰 영향을 미치는 게 아닌가 하는 생각이 든다. 본 연구에서 고려하는

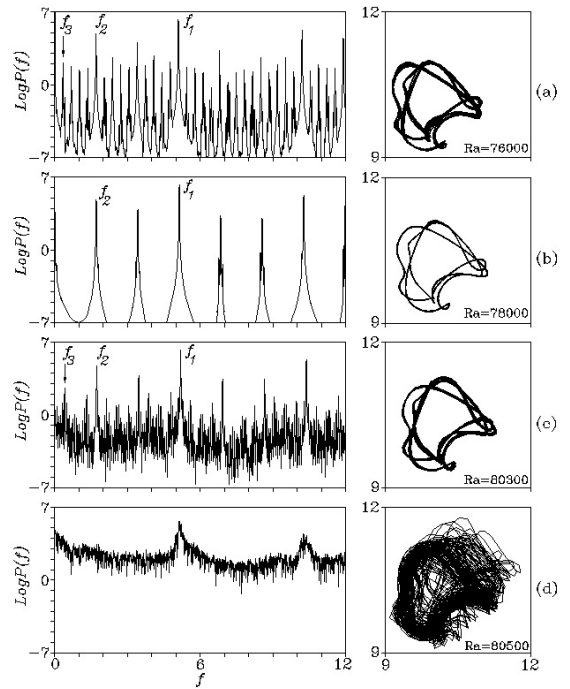


Fig. 7 Power spectra and phase space plots showing a chaotic flow after the appearance of three incommensurable frequencies: (a) $Ra = 7.6 \times 10^4$; (b) $Ra = 7.8 \times 10^4$; (c) $Ra = 8.03 \times 10^4$; (d) $Ra = 8.05 \times 10^4$. The plotted points in phase space are $\Psi_c(t)$ versus $\Psi_c(t + \tau_d)$ with $\tau_d = 0.15$.

환형은 $D_f/L = 1.5$ 이다.

(5) $6.8 \times 10^4 \leq Ra \leq 7.1 \times 10^4$ (QP3) : f_1 과 f_2 의 비가 $f_1/f_2 \approx 24$ 로 증가하면서 세 번째 주된 주파수 f_3 가 나타난다. $Ra = 6.8 \times 10^4$ 에서의 Power spectrum을 Fig. 5(b)에 도시하였다. 여기에서 세 개의 기본 주파수 $f_1 = 5.192, f_2 = 0.2197, f_3 = 1.326$ 이며 다른 피크들의 주파수는 $f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3$ (m_1, m_2, m_3 은 정수)로 표현된다. f_3 가 나타나는 준주기적인 운동의 Power spectrum은 매우 복잡하다. Fig. 5(c)는 $Ra = 7.1 \times 10^4$ 인 경우인데 여기에서 $f_1 = 5.314, f_2 = 0.2197, f_3 = 1.440$ 이다. 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기적인 이 영역에서 f_2 는 거의 일정하지만 f_1 은 증가한다. 즉, 가장 주된 진동은 더욱 더 빨라진다.

(6) $Ra = 7.2 \times 10^4$ (QP2): f_1 과 f_2 의 비가 f_1/f_2

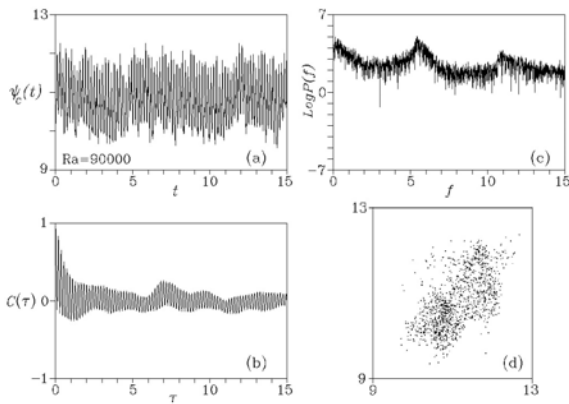


Fig. 8 (a) Fluctuation of $\Psi_c(t)$; (b) Correlation function; (c) Power spectrum; (d) Poincaré section in the chaotic regime with $Ra = 9 \times 10^4$: The plotted points are $\Psi_c(t + \tau_d)$ versus $\Psi_c(t + 2\tau_d)$ when $\Psi_c(t) = 11$ with $\tau_d = 0.15$.

≈ 18 로 감소하면서 두 개의 기본 주파수 f_1, f_2 를 갖는 준주기적인 운동이 일어난다. Fig. 5(d)의 Power spectrum에서 기본 주파수 $f_1 = 5.403, f_2 = 0.2929$ 이다.

(7) $7.3 \times 10^4 \leq Ra \leq 7.5 \times 10^4$ (P) : 하나의 기본 주파수 f_1 을 갖는 단순 주기 운동이 다시 일어난다. $Ra = 7.4 \times 10^4$ 에서의 $\Psi_c(t)$ 와 Power spectrum을 나타내는 Fig. 6은 단순 주기운동을 잘 보여준다.

이상에서 (5), (6), (7)은 Ra 의 증가와 함께 QP3 \rightarrow QP2 \rightarrow P의 역천이(reverse transition) 과정을 보여주고 있는데 이것은 환형의 자연대류에서 관찰되지 않은 흥미로운 과정이라 할 수 있다.

(8) $Ra = 7.6 \times 10^4$ (QP3) : 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기적인 운동이 다시 일어난다. Fig. 7(a)에 Power spectrum과 Phase space를 도시하였다. Power spectrum에서 $f_1 = 5.094, f_2 = 1.701, f_3 = 0.3417$ 이며 다른 피크들의 주파수는 $f = m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3$ 로 표현된다. Power spectrum에서는 f_3 의 존재가 불분명해 보이지만 Phase space는 3 개의 실타래와 같은 모양을 보여줌으로써 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기적인 운동임을 알 수 있다.

(9) $7.7 \times 10^4 \leq Ra \leq 7.9 \times 10^4$ (QP2): 이 영역에서는 $f_1/f_2 \approx 3$ 으로 f_1 이 f_2 의 정수 배가 되는 phase locking 현상이 일어난다. 따라서 이 영역의 운동은 거의 주기적인

거동을 보인다. $Ra = 7.8 \times 10^4$ 에서의 $\Psi_c(t)$ 와 Phase space를 Fig. 7(b)에 나타내었다. 여기에서 기본 주파수 $f_1 = 5.135, f_2 = 1.709$ 이다.

(10) $8 \times 10^4 \leq Ra \leq 8.03 \times 10^4$ (QP3) : 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기적인 운동이 일어난다. Fig. 7(c)에 $Ra = 8.03 \times 10^4$ 에서의 Power spectrum과 Phase space를 도시하였다. 여기에서 $f_1 = 5.184, f_2 = 1.725, f_3 = 0.4069$ 이다.

Fig. 7(c)의 Power spectrum은 몇 개의 뚜렷한 피크를 갖지만 넓은 대역에서 약한 잡음이 나타나는데 더욱 더 Ra 를 증가시키면 비주기적인 혼돈 대류가 일어난다.

(11) $Ra \geq 8.05 \times 10^4$ (C) : 광대역 잡음(broad-band noise)을 보이는 비주기적인 혼돈 대류가 일어난다(Fig. 7(d)) 끝으로 혼돈 유동을 보여주는 $Ra = 9 \times 10^4$ 에서의 $\Psi_c(t)$ 와 이에 대응하는 correlation function, Power spectrum, Poincaré section을 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서 보듯이 $\Psi_c(t)$ 의 요동은 거의 아무런 규칙이 없으며, $C(\tau)$ 는 0으로 접근해 가고, Power spectrum은 광대역 잡음을 보인다.

또한 Poincaré section은 여러 개의 흩어진 점들을 보여 주고 있다.

이상에서 관찰한 분기 현상을 요약하면 다음과 같다 :

$P \rightarrow QP2 \rightarrow P \rightarrow QP2 \rightarrow QP3 \rightarrow QP2 \rightarrow P \rightarrow QP3 \rightarrow QP2(\text{locking}) \rightarrow QP3 \rightarrow C$. 여기에서 P는 하나의 기본 주파수(f_1)를 갖는 단순주기 운동, QP2는 두 개의 기본 주파수(f_1, f_2)를 갖는 준주기 운동, QP3은 세 개의 기본 주파수(f_1, f_2, f_3)를 갖는 준주기 운동, C는 광대역 잡음을 갖는 비주기적인 운동을 나타낸다.

본 연구에서 관찰된 특히 흥미 있는 현상은 QP2 \rightarrow P와 QP3 \rightarrow QP2 \rightarrow P의 역천이 현상이다. 새로운 주기 운동이 일어난 후에 다시 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기 운동을 경유한 후에 혼돈 대류가 일어난다. 따라서 본 시스템에서의 혼돈 대류로의 천이 경로는 Ruelle-Takens scenario[12]를 따른다고 할 수 있다.

4. 결 론

일정 열 유속 벽을 갖는 수평 동심 실린더 사이의 환형 공간에서 일어나는 자연 대류 현상을 수치적으로 조사하였다. Ra 가 증가함에 따라 정상 상태에서부터 하나의 기본 주파수를 갖는 단순 주기 운동으로의 Hopf bifurcation이 일어

난다. 그 이후 더욱 더 큰 Ra 에서 두 개 및 세 개의 기본 주파수를 갖는 준주기 운동이 일어난다. Ra 의 증가에 따라 여러 가지 천이 현상이 일어나는데 준주기 운동으로부터 주기 운동으로의 역 천이가 관찰되었다. 최종적으로 단순 주기 유동은 준주기 운동을 거쳐서 비주기적인 혼돈 유동으로 발전된다. 본 연구에서의 카오스의 천이는 Ruelle-Takens 경로를 따른다고 할 수 있다.

참고문헌

- [1] 1988, Ebbart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., "Buoyancy-induced flows and transport," *Springer-Verlag*, pp.761-771.
- [2] 1998, Joo-sik, Y., "Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.41, pp.3055-3073.
- [3] 1999, Joo-sik, Y., "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.42, pp. 3275-3286.
- [4] 1979, Van de Sande, E. and Hamer, B. J. G., "Steady and transient natural convection in enclosures between horizontal circular cylinders(constant heat flux)," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.22, pp.361-370.
- [5] 2003, Joo-sik, Y., "Dual Free-Convective Flows in a Horizontal Annulus with a Constant Heat Flux Wall," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol 46, pp.2499-2503.
- [6] 1984, Schuster, H. G., "Deterministic Chaos," *Physik-Verlag*, pp.1-136.
- [7] 1998, Labonia, G. and Guj, G., "Natural convection in a horizontal concentric cylindrical annulus: Oscillatory flow and transition to chaos," *J. Fluid Mech.*, Vol.375, pp. 179-202.
- [8] 2000, Joo-sik, Y. and S.-M, Han., "Transitions and chaos in natural convection of a fluid with $Pr=0.1$ in a horizontal annulus," *Fluid Dynamics Research*, Vol.27, pp.231-245.
- [9] 2006, 유주식, "수평 환형 공간에서의 진동하는 열대류." *한국전산유체공학회지*, 제11권 제2호, pp.49-55.
- [10] 1980, Feigenbaum, M., "The transition to aperiodic behavior in turbulent systems," *Commun. Math. Phys.* Vol.77, pp.65-80.
- [11] 1972, Roache, P. J., "Computational Fluid Dynamics," *Hermosa*, pp.53-64.
- [12] 1971, Ruelle, D. and Takens, F. "On the nature of turbulence," *Commun. Math. Phys.* Vol.20, pp.167-19.