한국해양공학회지 제25권 제5호, pp 9-14, 2011년 10월 (ISSN 1225-0767)

고차의 무발산 요소를 이용한 비압축성 유동계산

김진환*
*동의대학교 기계공학과

Computation of Incompressible Flows Using Higher Order Divergence-free Elements

Jin Whan Kim*
Department of Mechanical Engineering, Dong-Eui University, Busan, Korea

KEY WORDS: Divergence-free element 무발산 요소, Incompressible flow 비압축성 유동, Vector potential 벡터 포텐셜, Solenoidal basis function 회전 기저 함수, Irrotational basis function 비회전 기저 함수

ABSTRACT: *The divergence-free finite elements introduced in this paper are derived from Hermite functions, which interpolate stream functions. Velocity bases are derived from the curl of the Hermite functions. These velocity basis functions constitute a solenoidal function space, and the gradient of the Hermite functions constitute an irrotational function space. The incompressible Navier-Stokes equation is orthogonally decomposed into its solenoidal and irrotational parts, and the decoupled Navier-Stokes equations are then projected onto their corresponding spaces to form appropriate variational formulations. The degrees of the Hermite functions we introduce in this paper are bi-cubis, quartic, and quintic. To verify the accuracy and convergence of the present method, three well-known benchmark problems are chosen. These are lid-driven cavity flow, flow over a backward facing step, and buoyancy-driven flow within a square enclosure. The numerical results show good agreement with the previously published results in all cases.*

1. 서 론

Navier-Stokes 방정식에서 밀도의 변화를 무시할 수 있다면 운동방정식이 상당히 단순화된다. 이러한 가정에 의하여 단순화된 유동 방정식을 우리는 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 하며, 무차원 형식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re)\nabla^2 \underline{u} - \nabla p + \underline{f} \tag{1}$$

여기서 $\underline{u}$는 유체 속도 벡터, p는 밀도로 나눈 감소 압력(Reduced pressure), Re는 레이놀즈 수, f는 체적력을 의미한다. 또 식 (1)의 속도 벡터는 아래의 연속 방정식을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{2}$$

속도와 압력을 종속 변수로 한 식 (1)과 식 (2)의 풀이는 경계조건은 쉽게 도입할 수 있으나, 해는 종종 비 물리적인 위글(Wiggle)을 동반할 경우가 많으며, 그 이유는 비압축성 조건(식 (2)을 만족시키지 못함에 있다고 본다. 또 수치적 관점에서 보면 속도와 압력이 혼재된 방정식의 해는 Inf-sup 혹은 LBB 조건을 충족시켜야 하는 어려움이 따른다. 따라서 밀도의 비압축성이란 가정은 단순화된 운동 방정식, 식 (1),의 풀이를 오히려 더 어렵게 하고 있으며, 일찍이 식 (2)를 만족시키는 속도 보간 함수를 찾는 시도가 있었으나, 결코 쉽지 않았다(Griffith, 1981).

일반적으로 벡터 함수는 회전(Solenoidal) 성분과 비회전(Irrotational) 성분의 벡터적 합으로 구성되어지는데, 속도 벡터가 회전 성분으로만 구성되어지면 식 (2)를 쉽게 만족시킬 수 있다. 또 식 (1)도 회전 성분과 비회전 성분들이 복합되어 구성되어 있으므로, 회전 함수 공간과 비회전 함수 공간으로 각각 투사(Projection)하면 압력 방정식을 식 (1)로부터 다음과 같이 분리할 수 있다. 즉, 식 (1)은 압력 항이 없는 Navier-Stokes 방정식이 되는데, 이의 이점은 더 이상 LBB 조건을 고려하지 않아도 된다는 것이다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re)\nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \tag{3}$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + (1/Re)\nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^I \tag{4}$$

여기서, $\underline{f}^S$는 중력항 f의 비보존적 혹은 회전 성분을, $\underline{f}^I$는 f의 보존적 혹은 비회전 성분을 의미하며, π^S와 π^I는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 투사 연산자(Projection operator)이다.

회전함수 중에서 가중 함수 u를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 w를 취하여, 식 (3)과 (4)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

교신저자 김진환: 부산광역시 부산진구 가야동 산 24, 051-890-1646, kimjw@deu.ac.kr

$$(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t}\underline{u}) = -(\underline{v}, \underline{u} \bullet \nabla \underline{u}) - (1/Re)(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u}) + (\underline{v}, \underline{f}^S) \quad (5)$$

$$(\underline{w}, \nabla p) = -(\underline{w}, \underline{u} \bullet \nabla \underline{u}) - (1/Re)(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u}) + (\underline{w}, \underline{f}^I) \quad (6)$$

여기서, 식 (5)와 (6)을 각각의 요소에 적용하면, 우리는 갈러킨(Galerkin) 유한 요소법을 수행하게 된다. 그러나 요소 내에서 속도 벡터 함수를 구하기 위한 유동함수 $\underline{\psi}$의 보간을 어떻게 정의해야 하는지는 분명하지가 않았다.

최근 Holdeman(2002)은 Hermite 함수를 요소 내의 유동 함수의 보간 함수로 제안하였고, 따라서 Hermite 함수의 Curl을 이용한 함수를 속도 함수의 보간 함수로 제안한 바 있다. 이리하여 자연스럽게 요소 내에서 연속 방정식을 만족시킬 수가 있었으며, 이러한 기저 함수들을 이용하여 무발산 요소를 구성하게 되었다. Holdeman(2002)은 초기 무발산 요소로 Hermite 단순 3차 함수의 사용을 제안한 바 있으나, 추후 연구에서 이는 요소 경계에서 속도의 접선 성분이 연속적이지 못함이 밝혀졌었고, 적어도 겹 3차 Hermite 함수가 사용되어야 속도 함수의 연속성을 유지할 수 있었다.

본 연구는 이차원 유동에 국한된 연구이며, Hermite 겹 3차, 4차 및 5차 함수로부터 유도된 회전 및 비회전 기저 함수들을 이용하여 세 가지 Benchmark 문제에 적용하여 정확성과 수렴성을 살펴보기로 한다. 첫 번째 문제는 Ghia et al.(1982)에서 제안된 덮개 움직임에 따른 공동 유동(Lid-driven cavity flow)이고, 두 번째 문제는 잘 알려진 채널(Channel) 유동으로 Gartling(1990)에 의하여 풀이된 후향 계단 위의 유동(Flow over a backward-facing step)이며, 세 번째 문제는 속도장과 온도장의 연성 문제로 De Vahl Davis(1983)가 제안한 정사각형 공동 내의 부력에 의한 유동(Buoyancy-driven flow within a square cavity)이다. Hermite 4차 함수는 Gopalacharyulu(1973)의 판 굽힘(Plate bending) 연구에서 찾을 수 있고, Hermite 5차 함수는 Watkins (1976)의 판 요소 연구에서 찾을 수 있다. 회전 보간 함수는 Hermite 함수로부터 유도되며, 편의상 Hermite 겹 3차 함수로부터 유도된 회전 보간 함수를 S3416이라 부르고, Hermite 4차 함수에 의한 회전 보간 함수는 S4424, 그리고 Hermite 5차 함수에 의한 보간 함수는 S5424라 부르기로 한다. S3416은 Solenoidal Cubic degree (3차) on 4 node element with 16 degrees-of- freedom을 의미하고 S4424 및 S5424의 의미도 유사하다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 비회전 보간 함수

Hermite 겹 3차 함수를 이용한 무발산 보간 함수의 유도 과정을 보기로 한다. Hermite 겹 3차 함수의 자유도는 미지수 그 자신과 x 및 y 방향에 대한 도함수들 및 교차 도함수로 구성된다. Hermite 겹 3차 함수는 단순 3차 함수에 비하여 교차 도함수의 자유도가 첨가되었으며, 이는 일차 도함수의 자유도들이 요소 경계를 따라서 연속성을 유지하게 한다(김진환, 2008). $\phi^e(x,y)$를 사변형 요소 내에서 정의된 스칼라 포텐셜 함수 $\phi(x,y)$의 근사값이라 하고, 임의 절점 i에 대한 Hermite 겹 3차 함수를 $\underline{g}_i$라 하면, $\phi^e(x,y)$는 다음과 같이 보간된다.

$$\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \underline{g}_i^t \underline{\Phi}_i^e = \sum_{i=1}^{4} (g_0 \; g_x \; g_y \; g_{xy})_i \underline{\Phi}_i^e \quad (7)$$

여기서 임의 절점 i에 대한 자유도 $\underline{\Phi}_i^e$는 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i, \Phi_{i,x}, \Phi_{i,y}, \Phi_{i,xy})^t \quad (8)$$

비회전 벡터 함수들은 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 기울기($\nabla\phi$)로부터 얻을 수 있다. 즉, 비회전 기저 함수 $G_i(x,y)$는 스칼라 포텐셜 $\phi^e(x,y)$의 구배를 취하여 구하면 된다. 따라서

$$\nabla\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \nabla (g_{0i} \;\; g_{xi} \;\; g_{yi} \;\; g_{xyi}) \underline{\Phi}_i^e$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \;\; g_{xi} \;\; g_{yi} \;\; g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \;\; g_{xi} \;\; g_{yi} \;\; g_{xyi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \quad (9)$$

요소 내에서 $\nabla\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{G}_i^t(x,y)\,\underline{\Phi}_i^e$ 로 보간되기 때문에 비회전 기저 함수 $\boldsymbol{G}_i(x,y)$는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{G}_i^t(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \;\; g_{xi} \;\; g_{yi} \;\; g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \;\; g_{xi} \;\; g_{yi} \;\; g_{xyi}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.2 회전(Solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x,y)$를 요소 내의 유동 함수라면 $\psi^e(x,y)$는 벡터 포텐셜(유동함수)의 기저 함수 $\underline{s}_i$ 및 요소 절점 i의 자유도 $\underline{\Psi}_i^e$에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\psi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \underline{s}_i^t(x,y)\,\underline{\Psi}_i^e \quad (11)$$

여기서

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, \; U_i, \; V_i, \; \Psi_{i,xy})^t \quad (12)$$

이며, 이를 Hermite 겹 3차 함수에 대한 자유도와 비교하면 아래와 같이 된다.

$$\underline{\Psi}_i^e = \left(\Psi_i, \; \partial\Psi_i/\partial y, \; -\partial\Psi_i/\partial x, \partial^2\Psi_i/\partial x \partial y\right)^t \quad (13)$$

따라서 $\underline{s}_i(x,y)$는 $\underline{g}_i(x,y)$를 재배열하여 다음과 같이 두면 된다.

$$\underline{s}_i = (g_{0i} \;\; g_{yi} \; -g_{xi} \;\; g_{xyi})^t \quad (14)$$

속도 벡터 $\underline{u}^e(x,y)$는 유동함수 $\psi^e(x,y)$에 $curl$을 적용함으로써 얻어진다. 따라서

$$\underline{u}^e(x,y) = \nabla \times \psi^e(x,y)\hat{k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)\underline{s}_i^t \\ -(\partial/\partial x)\underline{s}_i^t \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \quad (15)$$

따라서 속도 벡터 $u^e(x,y)$에 대한 보간 함수 $S_i(x,y)$, $i=1,\cdots,4$는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{S}_i(x,y) = \left((\partial/\partial y)\underline{s}_i \quad -(\partial/\partial x)\underline{s}_i \right) = \left(\underline{S}_{1i} \;\; \underline{S}_{2i} \right) \tag{16}$$

요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x,y)$, 속도 기울기 $\partial \underline{u}^e/\partial x$와 $\partial \underline{u}^e/\partial y$는 아래와 같이 보간하여 구할 수 있다.

$$\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{S}_i^t(x,y)\underline{\Psi}_i^e \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{S}_i^t(x,y)\underline{\Psi}_i^e \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{S}_i^t(x,y)\underline{\Psi}_i^e \tag{19}$$

Hermite 4차 및 5차 함수를 이용한 회전 및 비회전 기저 함수들도 Hermite 겹 3차 함수를 이용한 경우와 유사하게 구할 수 있다.

3. 무발산 요소의 정식화

임의 사변형 요소에서 식 (5)와 (6)에 대하여 Galerkin 잔여법을 적용하기로 한다. 식 (5)의 시간 항 $(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t}\underline{u})$에 대한 요소 행렬을 M^e, 대류항 $(\underline{v}, \underline{u}\bullet\nabla\underline{u})$에 대한 요소 행렬을 C^e, 소산항 $(1/Re)(\nabla\underline{v}, \nabla\underline{u})$에 대한 요소 행렬을 D^e, 그리고 외력의 회전(Solenoidal) 성분을 $\underline{f}^s$라 하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^t \, d\Omega_e \tag{20}$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i \left(u\frac{\partial \mathbf{S}_j^t}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{S}_j^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \tag{21}$$

$$\mathbf{D}^e = \int_{\Omega_e} (1/Re) \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{S}_j^t}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{S}_j^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \tag{22}$$

$$\underline{\mathbf{f}}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i \underline{f}^S d\Omega_e \,, \tag{23}$$

여기서 위첨자 t 및 S는 각각 전치 행렬과 회전 성분을 의미한다. S3416의 경우, 요소 행렬의 크기는 16 x 16이며, 회전 보간 함수 행렬, S의 크기는 16 x 2이다. 식 (6)은 압력식에 대한 변분식으로 이의 유한 요소 전개는 다음과 같이 한다. 압력항 $(\underline{w}, \nabla p)$에 대한 요소 행렬을 $\overline{\boldsymbol{M}}^e$, 대류항 $(\underline{w}, \underline{u}\bullet\nabla\underline{u})$에 대한 요소 행렬을 $\overline{\mathbf{C}}^e$, 소산항 $(1/Re)(\nabla\underline{w}, \nabla\underline{u})$에 대한 요소 행렬을 $\overline{\mathbf{D}}^e$, 그리고 외력의 비회전 성분 $(\underline{w}, \underline{f}^I)$를 $\overline{\underline{\mathbf{f}}}^e$ 라 하면 다음과 같다.

$$\overline{\mathbf{M}}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}\mathbf{G}^t d\Omega_e \tag{24}$$

$$\overline{\mathbf{C}}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}\left(u\frac{\partial \mathbf{S}^t}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{S}^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \tag{25}$$

$$\overline{\mathbf{D}}^e = \int_{\Omega_e} (1/Re) \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{S}^t}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{S}^t}{\partial y} \right) d\Omega_e \tag{26}$$

$$\overline{\underline{\mathbf{f}}}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_i^t \underline{f}^i \, d\Omega_e \tag{27}$$

식 (20)~(27)을 이용하여 개별 요소에 대한 무발산 요소의 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 격자점들에 대한 행렬 방정식을 구성하게 된다.

4. 수치 계산

4.1 덮개 움직임에 의한 공동(Lid-driven cavity) 유동

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia et al.(1982)이 제안한 "덮개 움직임에 의한 공동 유동"에 대한 수치 결과들을 Benchmark 해와 비교하여 종종 검증된다. 본 연구에서도 이 문제에 대하여 먼저 살펴보기로 하였으며, 격자는 32 x 32 요소로 하고 경계에는 좀 더 세분화되도록 구성하였다. 먼저 레이놀즈(Re) 수가 1000일 경우, 수평 중심선과 수직 중심선을 따라서 와도(Vorticity)와 압력 값들에 대하여 최근 Botella and Peyret (1998)에 의하여 보고된 값들과 비교하여 보았다. Table 1에는 와도의 값들을, 그리고 Table 2에는 압력 값들을 나타내었다. 이 Table들의 값들을 살펴보면 S4424의 값들이 대체로 Botella and Peyret(1998)이 제시한 값들에 가장 근접하였다. 아마도 그 이유는 좌측 상단의 특이점의 영향으로 S5424의 값들이 더 불안정해진 것으로 보인다.

Table 1 Vorticity along vertical centerline

y	*w(0.5, y)*			
	S3416	S4424	S5424	Botella and Peyret (1998)
1.0	-16.346	-14.747	-14.667	-14.753
0.96875	-8.8991	-9.4880	-9.4432	-9.4950
0.95313	-5.1966	-4.8554	-4.8002	-4.8575
0.73438	-2.0950	-2.0913	-2.0900	-2.0912
0.5	-2.0711	-2.0676	-2.0658	-2.0672
0.28125	-2.2788	-2.2676	-2.2692	-2.2677
0.10156	1.6351	1.6356	1.6323	1.6344
0.06250	2.2761	2.3156	2.3027	2.3179

Table 2 Vorticity along horizontal centerline

x	*w(0.5, y)*			
	S3416	S4424	S5424	Botella and Peyret(1998)
0.07031	1.5153	1.5002	1.4989	1.5031
0.09375	0.7780	0.8246	0.8262	0.8240
0.22656	-2.0054	-2.0019	-1.9941	-2.0017
0.5	-2.0711	-2.0676	-2.0658	-2.0672
0.85938	-3.4317	-3.4372	-3.4239	-3.4302
0.94531	6.4949	6.5294	6.4433	6.5087
0.96094	8.2637	8.2563	8.1700	8.2462

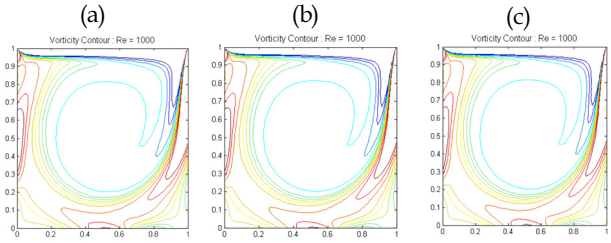


Fig. 1 Vorticity contours at *Re*=1000: (a) S3416, (b) S4424, (c) S5424

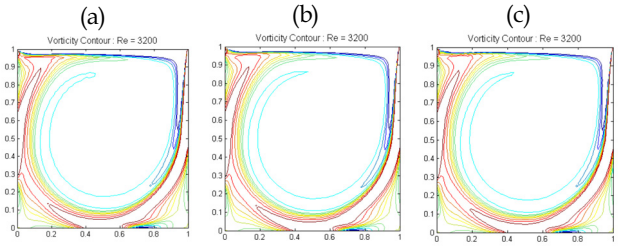


Fig. 2 Vorticity contours at *Re*=3200: (a) S3416, (b) S4424, (c) S5424

유선의 경우는 나타내지는 않았으나, *Re*=1000과 3200의 경우, S3416, S4424 그리고 S5424의 유선들의 형태는 Benchmark 해에 거의 일치하여 구분이 어려웠다. Fig. 1에는 *Re*=1000에 대하여, S3416, S4424 그리고 S5424에 의한 와도의 등고선 형태를 보여준다. 이 등고선도에 의하면 세 방법 모두 육안으로 보기에는 거의 일치하였고, Ghia et al.(1982)이 제시한 등고선도와도 상당히 유사함을 확인할 수 있었다. Fig. 2에는 *Re*=3200에 대한 와도의 등고선도를 보여준다. 이 경우, S4424와 S5424의 와도가 Ghia et al.(1982)이 제시한 형태에 가장 근접한 것으로 보인다.

4.2 후향 계단 위의 유동(Flow over a backward-facing step)

"후향 계단 위의 유동"도 새로운 수치 기법의 검증에 종종 사용되는 문제이다. Gartling(1990)은 이 문제를 단순화하기 위하여 입구 채널 영역을 없애고 채널의 폭 H를 H = 1로 하여 계단 한쪽 끝의 좌표를 (0, 0)으로 두었으며, 채널 길이 L은 입구 폭 H/2의 60배로 정하고, 입구 속도 형상은 포물선 형상인 $u(y)$ = $24y(0.5\text{-}y)$, $v(y)$ = 0로 하였다.

작은 *Re* 수의 경우, 재순환 영역은 계단 바로 아래에서 형성되기 시작하며, *Re* 수가 400에 가까워지면 윗면에서 재순환 영역이 형성되기 시작한다. *Re* 수가 1200보다 커지면 유동은 시간에 따라 극심하게 변하기 시작하고, 6000이 넘어가면 유동은 완전 발달 난류가 된다. 관심 영역은 $0<x<10$이지만 계산 영역은 출구에서의 오차를 최소화하기 위해 $0<x<30$까지 확장한다. 본 연구에서는 *Re* 수를 800으로 하고, 요소 수는 120x16으로 하며 x가 증가할수록 성긴(Coarse) 격자가 되도록 하였다. 풀이 방법은 S3416, S4424 그리고 S5424로 하고, Fig. 3에는 유선의 형태를, Fig. 4에는 압력의 등고선을 각각 나타내었다. 모든 경우, 재순환 영역을 잘 예측하고 있으며, 압력 분포도 적절한 것으로 보인다. Table 3에는 x=7에서 수평 및 수직 방향의 속도 값들을 Gartling(1990)이 제시한 값들과 비교하고 있다. 현재의 해는 비교적 적은 수의 격자임에도 불구하고 Benchmark 해에 잘 접근하고 있음을 알 수 있다.

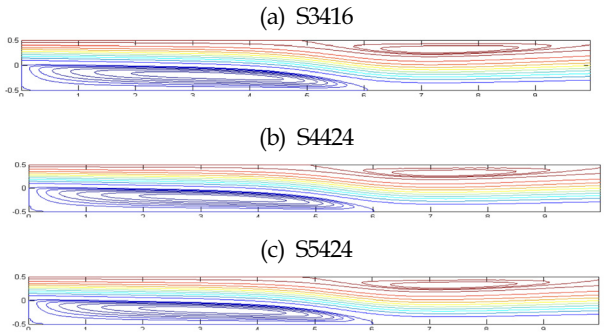


Fig. 3 Streamlines by 120 x 16 elements: (a) S3416, (b) S4424, (c) S5424.

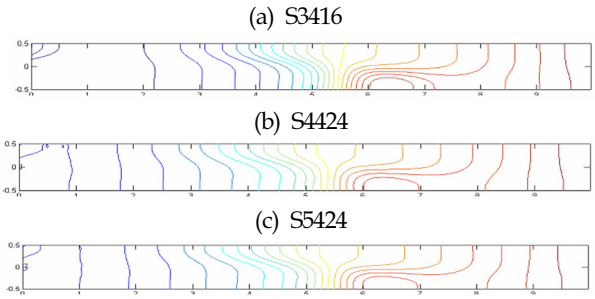


Fig. 4 Pressure contours by 120 x 16 elements: (a) S3416, (b) S4424, (c) S5424.

Table 3 Horizontal velocities along cross-channel at x = 7

y	*u*(7, *y*)			
	S3416	S4424	S5424	Gartling(1990)
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
0.3	0.0140	0.0180	0.0160	0.015
0.1	0.5201	0.5326	0.5321	0.522
0.0	0.8831	0.8950	0.8949	0.885
-0.1	1.1050	1.1106	1.1097	1.105
-0.3	0.7958	0.7894	0.7839	0.792
-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0

4.3 정사각형 공동 내의 부력 유동(Buoyancy-driven flow within a square cavity)

현재 제시된 무발산 요소법은 유동장과 온도장의 연성 문제에도 적용될 수 있다. 비압축성은 유체 밀도가 압력에 독립임을 가정하고 있으나, 온도 차이에 따른 밀도 변화는 존재한다. 이 밀도 변화가 작다면 밀도의 차이는 온도 변화에 따른 부력을 유발한다고 볼 수 있으며, 이를 Boussinesque 근사라 한다. 따라서 자연 대류 방정식에서는 운동량 방정식과 온도 방정식이 부력항에 의하여 서로 연성되어진다. 무차원화된 자연대류 운동 방정식은 Shu and Wee(2002)를 참조하고, 이들의 변분식은 다음과 같다.

$$(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t}\underline{u}) = -(\underline{v}, \underline{u} \bullet \nabla \underline{u}) - \Pr(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u}) - \Pr Ra(\underline{v} \bullet \hat{\underline{g}}, T) \quad (28)$$

$$(q, \frac{\partial}{\partial t} T) = -(q, \underline{u} \bullet \nabla T) - (\nabla q, \nabla T) + (q, Q) \quad (29)$$

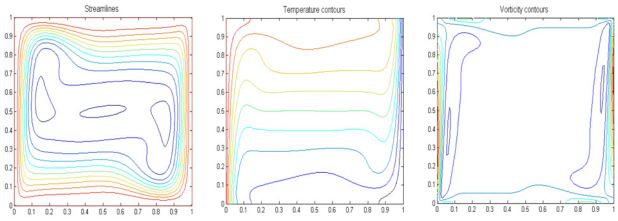
여기서 $Pr = \nu/\alpha$로 $\Pr andtl$ 수이고, $Ra = g\beta \triangle T W^3/(\nu\alpha)$는 $Rayleigh$ 수이며 모두 무차원화된 변수들이다. 또 ν는 동점성계수, α는 $k/\rho c_p$로 정의되는 열확산 계수, β는 유체의 열팽창계수, $\triangle T$는 고온 측과 저온 측 사이의 온도 차이, 그리고 W는 특성 길이이다(Christon et al., 2002). 위 변분식들은 이미 정의된 요소의 기저함수(Basis function)들을 이용하여 소 영역들 혹은 요소들에 적용되어지며 적절한 요소 연립방정식을 구성하게 된다. 이 문제는 *Ra* 수가 증가함에 따라 안정성 및 수렴성의 문제를 야기하기 때문에 많은 연구자들의 관심이었다.

Fig. 5에는 *Ra*=106에 대한 S3416의 수치 결과들을 유선, 온도 및 와도에 대한 등고선도로 나타내었으며, Table 4에는 De Vahl Davis(1983)의 해와 현재의 무발산 요소법에 의한 해와의 비교를 위하여, $u_{\max}$, $v_{\max}$, 좌측 벽면에서의 $Nsselt$ 수 ($Nu|_{x=0}$) 및 평균 $Nsselt$ 수($\overline{Nu}$)를 각각의 *Ra* 수에 대하여 나타내었다. 비교를 위하여 모두 32x32 균일 요소로 하여 수행하였다.

자연대류 유동 계산에 대한 초기 무발산 요소의 적용은 김진환(2009)에서 찾을 수 있으며, 현재의 논문에 제시된 결과들은 보다 향상된 결과들임을 알 수 있다. Fig. 5에 보인 등고선들의 형상은 De Vahl Davis(1983)의 연구에서 보인 형상들과 상당히 일치하고 있으며, Table 5의 수치적 비교를 살펴보면 현재 방법을

Table 4 Vertical velocities along cross-channel at *x*=7

y	υ(7,y) $\times 10^{-2}$			
	S3416	S4424	S5424	Gartling (1990)
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
0.3	-0.1877	-0.1744	-0.1108	-0.193
0.1	-0.4850	-0.3431	-0.2622	-0.544
0.0	-1.0641	-0.8472	-0.7223	-1.165
-0.1	-1.6553	-1.3860	-1.2529	-1.778
-0.3	-1.3566	-1.1519	-1.0760	-1.423
-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0



(a) Streamline (b) Temperature (c) Vorticity

Fig. 5 Contour plots from S3416 at *Ra* = 106

이용한 해들은 기존 연구 결과와 근접한 값들을 제시하고 있음을 알 수 있다. 이는 현재 제시하는 방법은 비교적 작은 수의 격자점들을 사용하더라도 고차 요소의 특성상 상당히 신뢰할 수 있는 결과를 줄 수 있음을 보인다.

5. 결 론

본 연구는 Holdeman(2002)이 제시한 Hermite 3차 유동 함수법을 확장하여 Hermite 4차 및 5차 함수들을 비압축성 유동 계산에 적용하고자 하는 시도이며, 고차 요소에 있어서도 Hermite 3차 요소에서 적용되었던 기법들이 자연스럽게 확장될 수 있음을 확인하고자 하는 것이다. 세 가지 잘 알려진 Benchmark 문제에 대하여 살펴본 결과, 비록 상대적으로 적은 수의 격자점들을 사용하더라도 보고된 Benchmark 해들에 잘 접근하고 있음을 알 수 있었다. 따라서 무발산 요소법 혹은 Hermite 유동 함수법은 비압축성 유동 계산에서 추후 주요하게 연구되고 발전시켜야 할 유한 요소법의 한 분야로 보인다. 더욱이 현재의 방법은 어떠한 풍상 차분 기법 혹은 안정화 기법을 사용하지 않음에 주목할 필요도 있겠다.

후 기

본 논문은 2010학년도 동의대학교 학술연구조성비(과제번호: 2010AA148)의 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

김진환 (2008). "이차원 비압축성 유동계산을 위한 Hermite 겹

Table 5 Comparison of Hermite element results with those of Davis (1983) for natural convection flows in a square enclosure

	Ra = 10^4				*Ra* = 10^5				*Ra* = 10^6			
	$u_{\max}$ (y)	$v_{\max}$ (x)	$Nu\|_{x=0}$	$\overline{Nu}$	$u_{\max}$ (y)	$v_{\max}$ (x)	$Nu\|_{x=0}$	$\overline{Nu}$	$u_{\max}$	$v_{\max}$	$Nu\|_{x=0}$	$\overline{Nu}$
S3416	16.184 (0.823)	19.634 (0.119)	2.244	2.245	34.743 (0.855)	68.553 (0.064)	4.515	4.521	64.779 (0.850)	218.708 (0.038)	8.789	8.816
S4424	16.183 (0.823)	19.628 (0.119)	2.244	2.245	34.741 (0.855)	68.635 (0.066)	4.516	4.522	64.844 (0.850)	220.553 (0.038)	8.801	8.825
Davis (1983)	16.178 (0.823)	19.617 (0.119)	2.238	2.243	34.73 (0.855)	68.59 (0.066)	4.509	4.519	64.63 (0.850)	219.36 (0.0379)	8.817	8.800

3차 유동함수법," 한국전산유체공학회지, 제13권, 제4호, pp 13-23.
김진환 (2009). "Hermite 유동함수법에 의한 자연대류 유동계산", 한국해양공학회지, 제23권, 제5호, pp 1-8.
Botella, O. and Peyret, R. (1998). "Benchmark Spectral results on the Lid-driven Cavity Flow", Computers & Fluids, Vol 27, pp 421-433.
Christon, M.A., Gresho, P.M. and Sutton, S.B. (2002). "Computational Predictability of Time-dependent Natural Convection Flows in Enclosures (Including a Benchmark Solution)", Int. J. for Numer. Methods in Fluids, Vol 40, pp 953-980.
De Vahl Davis, G. (1983). "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", Int. J. for Numer. methods in Fluids, Vol 3, pp 249-264.
Gartling, D.K. (1990). "A Test Problem for Outflow Boundary Conditions-Flow over a Backward-facing Step," Int. J. for Numer. Methods in Fluids, Vol 11, pp 953-967.
Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T. (1982). "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," J. of Comp. Physics, Vol 48, pp 387-411.
Gopalacharyulu, S. (1973). "A Higher Order Conforming Rectangular Plate Element," Int. J. for Numer. Methods in Engr., Vol 6, pp 305-308.
Griffiths, D.F. (1981). "An Approximately Divergence-Free 9-Node Velocity Element (with Variationa) for Incompressible Flows", Int. J. for Numer. Meth. in Fluids, Vol 1, pp 323-346.
Holdeman, J.T. (2002). "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," USNCTAM14 Conference, Blacksburg, VA.
Shu, C. and Wee, K.H.A. (2002). "Numerical Simulation of Natural Convection in a Square Cavity by SIMPLE-generalized Differential Quadrature Method", Computers & Fluids, Vol 31, pp 209-226.
Watkins, D.S. (1976). "On the Construction of Conforming Rectangular Plate Element," Int. J. for Numer. Methods in Engr., Vol 10, pp 925-933.

2011년 7월 11일 원고 접수
2011년 8월 24일 심사 완료
2011년 10월 17일 게재 확정