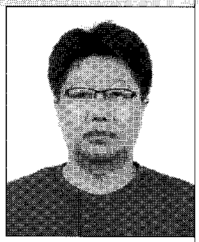
MATLAB을 이용한 복합재료 보의 단면해석

Cross-Sectional Analysis of Composite Beams using MATLAB



김 준 식*

*금오공과대학교 지능기계공학과 조교수

1. 머리말

우리가 매일 접하는 수많은 구조물 중에 많은 부재가 보의 형태를 취한다. 예를 들어 토목분야에서의 다리 구조물, 건축분야에서의 빌딩 골조 프레임, 기계분야에서의 자동차 몸체 프레임, 항공분야에서의 날개 스파(spar) 구조물 등이 그것이다. 하지만 보는 이의 관점에 따라 보는 때로 솔리드(solid) 요소로 생각되기도 하며, 판(plate)요소로 생각되어지기도 한다. 그렇다면 보 구조물이란 무엇인가? 보 구조물은 3차원적인 관점에서 슬랜더(slender) 구조물이라 불리기도 한다. 그 이유는 단면의 수치가 길이에 비해 상대적으로 매우 적기 때문이다(그림 1). 이것은 보의 기하학적 정의라 할 수 있다. 한편 수학적으로는 구조물의 특성길이(characteristic length) 또는 파장(wave length)가 단면 특성길이보다 매우 큰 구조물을 슬랜더하다고 할 수 있고, 보 구조물의 변수들을 축방향의 변수들만으로 표시할 수 있는 수학적 근거가 된다.

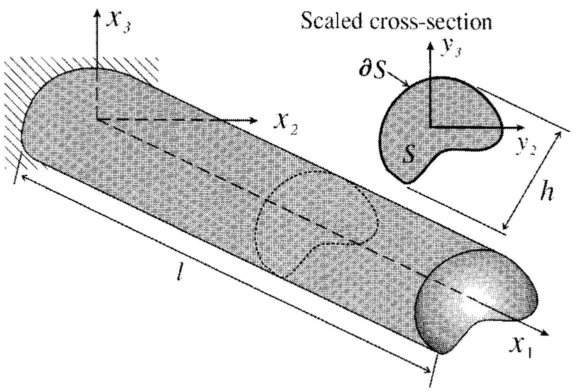


그림 1 3차원 보의 특성 길이 및 단면

본 기사에서는 이러한 보 구조물들의 해석을 위한 보 이론의 간단한 역사적 배경과 최근에 개발된 시작한 보 구조물의 단면 워핑함수의 계산방법, 유한요소법과 MATLAB기반 단면해석 프로그램인 BCSA(Beam Cross-Sectional Analysis)를 소개하고자 한다.

2. 역사적 배경과 발달과정

머리말에서 소개한 것처럼 여러 분야에서 쓰이는 보 구조물을 위한 해석은 매우 오래전부터 시작되어 왔다. 정확한 시작의 기원은 알 수 없으나, 현대 보 이론의 기초는 잘 알려진 바와 같이 오일러(Leonard Euler, 1707~1783)와 베르누이(Jacob Bernoulli, 1654~1705)에 의해서 확립되었다. Galileo(1564~1642)와 Mariotte(1620~1684)는 보의 강성에 관심을 가졌던 반면, Jacob Bernoulli는 보의 처짐 계산에 관심이 있었다. Mariotte의 보의 중립축(neutral axis) 위치에

대한 가정에 기초하여 보 단면경계에서의 접선이 하중방향에 직교하다는 가정을 하였다. Jacob Bernoulli의 가정을 원문에서는 "The curvature of an elastic beam at any point is proportional to the bending moment at that point"라고 기술하고 있다.[1] Euler는 Jacob Bernoulli의 가정을 받아들여 보에 관한(현대의 보 이론의 기초가 되는) 미분관계식을 유도하였다. 이후 19세기 후반에 이르러서는 에펠타워 등의 구조물 설계에 실제로 근대 보 이론이 적용되기 시작한다.

한편 19세기에 이르러 굽힘 변형 이외에 전단변형의 효과를 고려하기 시작하였다. 현재까지 알려진 바로는 W.J.M. Rankine(1820~1872)이 처음으로 전단변형에 관한 식을 유도하였는데, 전단변형에 의한 부가적인 처짐을 다음과 같이 계산하였다.

$$w_{shear} = \frac{6}{5}\frac{E}{G}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (1)$$

여기서 E와 G는 각각 탄성계수와 전단강성계수를 나타내고, h와 l은 보의 높이와 길이를 나타낸다. 그 당시에 Rankine은 실제 응용분야에서는 이 부가적인 처짐은 무시할 수 있다고 생각하였다. 1921년에 Stephen P. Timoshenko (1878~1972)는 일차전단변형이론(FSDT; First-order Shear Deformation Theory) 또는 TBT(Timoshenko Beam Theory)로 알려지게 되는 보 이론을 전단수정계수(shear correction factor)에 관한 문제를 다루었다. 이 일차전단변형이론은 전단응력에 의한 전단변형을 포함하고 있고, 응용분야로는 짧은 보의 정적해석, 샌드위치 보의 해석, 그리고 고주파수 진동해석에서 널리 사용되고 있다. 이렇게 해서 현대 보이론의 근간이 되는 E-B(Euler-Bernoulli)이론과 R-T (Rankine-Timoshenko) 이론이 20세기 초반에 확립되었고, 현재까지 널리 사용되고 있다. 전단수정계수의 필요성과 복합재료(전단변형이 등방성 재료에 비해 상대적으로 큼) 사용의 증대는 보 이론에서 워핑함수(warping function)의 중요성이 커지게 되는 계기가 되었다. 전단수정계수는 워핑함수(그림 2)에 의해 결정되어지기 때문이다.

보의 굽힘 문제와 더불어 뒤틀림(torsion) 문제는 현대 공학에서 매우 중요한 부분을 차지하고 있다. 고전 보 뒤틀림 이론은 19세기 중반 Barre de Saint-Venant(1797~1886)에 의해 정립되었다. 이 시기에 생브낭(Saint-Venant)은 원형 보의 뒤틀림문제에 대한 해를 구하였는데, 같은 방법을 사각단면을 가지는 보에 적용하였으나, 실험결과와 차이를 보이는 것에서 torsional warping을 생각하였다. 원형보의 뒤틀림에서는 면외 방향의 변위가 0이나, 보 단면이 원형이 아닌 경우 면외 방향 변위 성분이 0이 아님을 실험을 통해 발견하였다. 그는 워핑함수를 고려하여 보의 뒤틀림 강성 계산을 성공적으로 수행하였고, 이는 현재 Saint-Venant warping function으로 잘 알려져 있다. 생브낭의 뒤틀림 이론은 생브낭의 원리(Saint-Venant's principle)와 밀접한 관련이 있다. 기본적으로 등가의 정적하중을 가정하여 문제를 풀기 때문에 워핑이 제약되어 있는 경우(예, 보의 고정단) 적용이 어렵다. 이 고정단에서의 워핑 제약효과가 큰 개단면(open cross-section)을 가지는 보에서는 뒤틀림이 실제보다 크게 예측된다. 이에 1940년에 V.Z. Vlasov는 공학적인 관점에서 이 문제를 해결하였다. 보 단면의 워핑에 저항하는 bi-moment를 보 이론에 고려함으로써 새로운 뒤틀림이론을 제안하였고, 현재 Vlasov이론으로 알려져 있다.

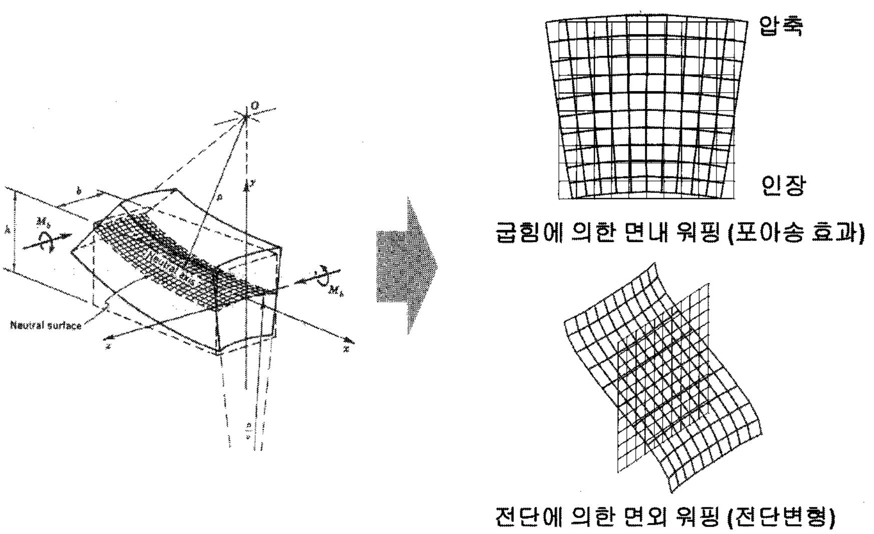


그림 2 보 단면에서의 포아송 효과와 전단변형에 의한 워핑

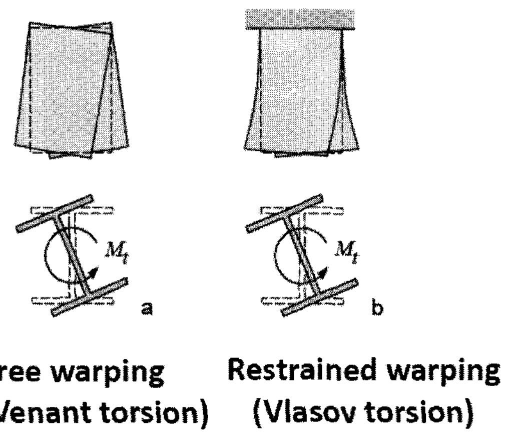


그림 3 보의 뒤틀림; (a)Saint-Venant, (b)Vlasov.

그림 3에 보이는 것처럼 보의 고정단에서 등가 정하중으로 대체한 뒤틀림문제와 워핑이 제한된 경우는 다른 형상을 보인다. 물론 보의 길이가 매우 길어지면 이 효과는 매우 작아지게 된다. 하지만 보의 전단변형과 비교하여 보면 상대적으로 워핑 제한효과가 보의 길이가 긴 경우에도 나타나게 된다. 따라서 현대 공학에서는 전단변형과 함께 워핑 제한효과는 보 이론에서 기본적인 항으로 자리잡고 있다. 이 워핑 제한효과를 고려하기 위해서는 먼저 생브낭의 워핑 함수를 찾아야 한다. 단순한 단면 형상에 대해서는 쉽게 이 함수들을 계산할 수 있지만, 복잡한 기하학적 형상의 단면이나 이방성 재료로 구성된 단면에 대해서는 어려움이 많다. 현재는 유한요소법에 기초하여 워핑함수를 계산하는 방법이 잘 개발되어 있다. 그림 4에 대표적인 개단면 보인 I-beam에 대한 뒤틀림 (자유단에서의)워핑함수와 (고정단에서의)bimoment의 관계를 나타내었다.

이 장에서는 보의 굽힘과 뒤틀림 이론에 관한 간략한 역사와 현대 보 이론의 근간이 되는 일차전단변형이론과 Vlasov

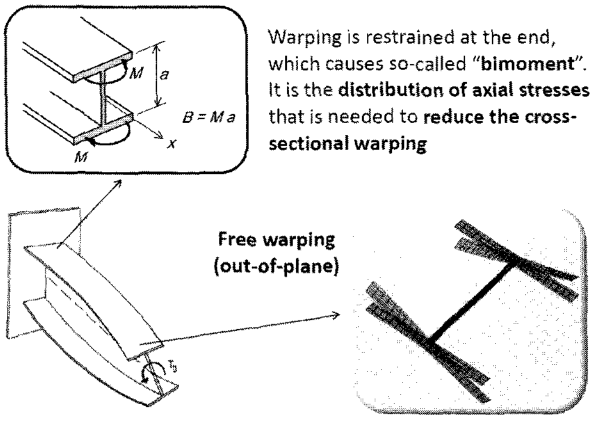


그림 4 보의 자유단의 워핑과 고정단의 bi-moment

뒤틀림 이론에 대하여 알아 보았다. 현재까지 이 두 이론을 수학적으로 정확하게 만족하는 보 이론은 개발되어지지 않았으며, 많은 보 이론들은 공학적 관점에서 예제를 중심으로 그 타당성을 입증하고 있다. 따라서 일반적인 보의 형상에 따른 보 이론은 아직까지는 요원하다고 할 수 있다. 많은 보 이론의 존재에도 불구하고, 수학적 또는 점근적으로 타당한 보 이론의 개발이 중요한 이유는 다음과 같다. 첫째, 모든 공학적 보 문제에 대하여 개발된 보 이론을 검증을 하기는 불가능하다. 둘째, 일반적인 보의 단면의 워핑함수는 면내-면외 강성간의 연성(coupling)을 포함하고 있기 때문에 그 정확도를 수학적인 방법에 기반을 두지 않고는 담보할 수 없다. 현재 이러한 문제점을 모두 해결할 수는 없으나, 그 첫 걸음으로써 점근적으로 정확한 보 단면의 워핑함수를 계산하는 방법과 Matlab 프로그램을 소개하고자 한다.

3. 보 단면 해석 프로그램: BCSA

이 장에서는 일반적인 보의 단면형상에 대한 워핑함수를 계산하는 방법을 소개하고, Matlab에 기반을 둔 단면해석 프로그램인 BCSA(Beam Cross-Sectional Analysis)를 간략하게 정리한다. 먼저 3차원 유한요소 해석을 통하면, 워핑함수를 계산함이 없이 정확한 응력분포 및 변위를 알 수 있다. 일반적으로 3차원 유한요소법의 차용은 많이 시간과 비용을 초래함으로 반복계산이 많이 필요한 최적 설계 등의 문제에는 1차원 보 이론의 적용이 바람직하다. 이때 1차원 보 이론의 정밀도를 결정하는 주요 인자로는 1차원 등가 강성이다. 이 등가강성은 보 단면의 워핑함수와 직접적으로 관련이 있다. 따라서 고정밀 1차원 보이론의 정립에서 가장 중요한 요소라 할 수 있다.

워핑함수와 1차원 보 이론은 가상일의 원리로부터 모두 유도되어질 수 있다. 먼저 변위장을 기본 변위장과 섭동항으로 다음과 같이 분리한다.

$$U = U^{EB} + U^{PB} \tag{2}$$

여기서 첫 번째 항은 기본 변위 장으로써 보통 Euler-Bernoulli 보 이론의 그것에 해당한다. 두 번째 항은 섭동항으로 계산되어져야 하는 변위장이고, 워핑함수를 내포하고 있다. 가상일의 원리는 변위의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$\int \sigma(U)\delta\varepsilon(U)dV - \int p\delta U dS = 0 \tag{3}$$

여기서 p는 외력이다. 식 (3)에 식 (2)를 대입하고 정리하

면, 2차원 단면 해석 방정식과 1차원 보 방정식에 관련한 가상일들로 분리할 수 있다.

$$\int \sigma(U)\delta\varepsilon(U^{PB})dV - \int p\delta U^{PB}dS = 0 \tag{4a}$$

$$\int \sigma(U)\delta\varepsilon(U^{EB})dV - \int p\delta U^{EB}dS = 0 \tag{4b}$$

식 (4a)는 단면해석 가상일이고, 이것으로부터 워핑함수 즉 U^{PB}를 U^{EB}의 항으로 계산할 수 있다. 이 결과를 식 (4b)에 대입하고 정리하면 워핑함수를 고려한 등가강성을 가지는 1차원 보 방정식을 얻을 수 있다. 식 (4a)는 일반적으로 해석해가 존재하지 않으므로 유한요소법을 차용하여야 한다. 섭동변위를 4절점 유한요소를 이용하여 이산화하면, 보 단면의 워핑함수를 4절점 유한요소의 형상함수와 기본변위로 표시할 수 있다. 이산화된 식 (4a)를 풀면 최종적으로 워핑함수를 계산할 수 있는데, 이때 보 단면에 대한 경계조건을 고려하여야 한다. 보 단면에서의 물리적 변위 경계조건은 존재하지 않지만, 4개의 강체모드(그림 5)가 있으므로 이들을 제거하고 풀어야 한다. 강체모드를 제거하는 방법은 몇 가지의 방법이 존재하는데 여기서는 라그랑지 승수법(Lagrange's multiplier)을 적용하였다. 라그랑지 승수법의 장점으로는 복잡한 과정을 거치지 않고 강체모드를 제거할 수 있다는 것이다. 부과되는 4개의 자유도는 문제가 없지만 행과 열 방향이 0이 아니게 되므로 결과적으로 풀고자 하는 행렬의 bandwidth를 증가시키는 단점이 있으나, column solver 등을 차용하면 필요한 메모리를 크게 줄일 수 있다.

E-B변위를 기본 변위로 했을 때 보 단면의 워핑함수는 인장, 2개의 굽힘, 뒤틀림 등 총 4개의 워핑함수로 표현되어진다. 이는 고전적 보 이론이 4개의 변형률(axial strain, two curvatures, torsional strain)로 표시되기 때문이다.[3] 고전 보 이론에서 1차원 보의 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

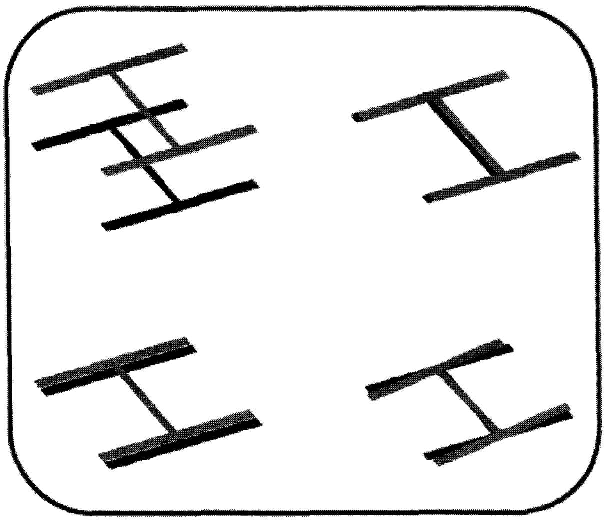


그림 5 I-beam에서의 4개의 강체모드

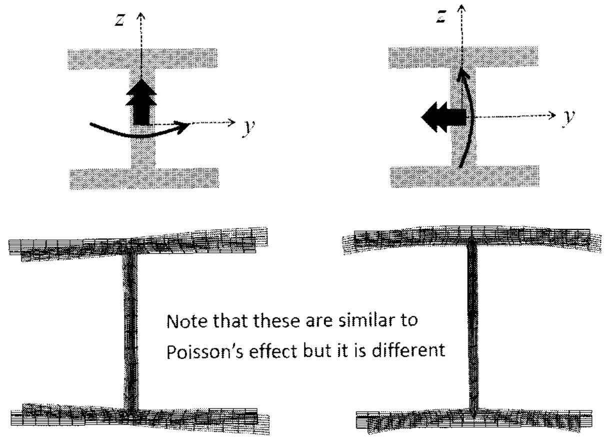


그림 6 I-beam에서의 굽힘관련 워핑함수

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w'' \\ v'' \\ \phi' \end{Bmatrix} \tag{5}$$

4개의 워핑함수 중에서 굽힘변형에 해당하는 모드 2가지를 I-beam경우에 대하여 그림 6에 나타내었다. 그림 6에서 보듯이 굽힘에 관련된 워핑함수는 사각 단면을 가지는 보의 경우와는 다르게 국소적인 굽힘이 포아송 효과를 대체하고 있음을 알 수 있다. 이러한 워핑함수의 차이가 보의 굽힘 강성에 영향을 주기 때문에 정확한 등가강성을 예측하기 위해서는 유한요소법을 통한 워핑함수의 계산이 필수적임을 알 수 있다. 특히 뒤틀림 워핑함수는 뒤틀림 강성의 예측에 있어서 매우 중요한데 자세한 사항은 수치예제에서 다루어 질 것이다.

간단한 수치예제로서 사각단면을 가지는 등방성 외팔보를 고려하였다. 하중은 보의 자유단에서 전단력이 주어졌고, 보의 제원은 길이 30cm, 폭 1cm, 높이 1cm이다. 등방성 재료의 상수들은 E=10GPa, ν=0.3이다. 보 단면 메쉬는 그림 7에 보여지고 있다. Matlab기반 프로그램인 BCSA는 일반적인 유한요소의 입력 데이터 구조를 가지고 있다. 노드 데이터는 노드 번호와 2차원 좌표를 요소 데이터는 요소 번호, 요소 연결정보, 재료카드, 복합재료를 위한 화이버 각도, 그리고 마지막으로 section orientation angle에 관한 정보를 입력 받는다. 계산된 등가강성은 해석해와 비교하여 표 1에 나타내었다. 비교적 적은 메쉬로도 등가강성을 정확하게 예측할 수 있음을 알 수 있다. 예제와 같은 단순한 사각단면의 경우 유한요소 해석이 필요하지 않으나, 복합재료나 기하학

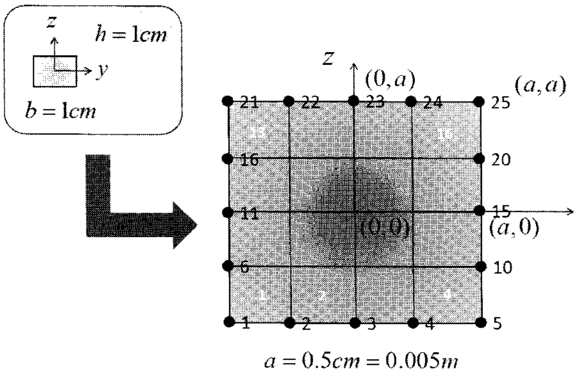


그림 7 사각단면에 대한 유한요소 메쉬

표 1 등가강성의 비교

강성 \ 메쉬사이즈	해석해	4 × 4	20 × 20
EA	10^6	10^6	10^6
EI_y	8.3333	8.4143	8.3366
EI_z	8.3333	8.4143	8.3366
GJ	5.4087	5.6891	5.4187

적으로 복잡한 단면의 경우에는 필수적이라 할 수 있다.

두 번째 예제로는 회전익기 날개 또는 자동차 차체 프레임에 많이 쓰이는 박스 보이다. 등방성 재료인 경우와 복합재료인 경우 단면 워핑함수의 차이를 보여주기 위하여 이 예제를 선택하였다. 박스 보의 제원은 폭 24.2mm, 높이 13.46mm, 월 두께 0.762mm이다. 그림 8(a)에는 등방성 보의 워핑함수를 도시하였다. 4개의 작은 그림들은 각각 tension, bending1, bending2, torsion를 나타낸다. Tension과 bending들은 면내에서의 국소적인 보(월)의 굽힘으로 나타나는 반면, torsion은 면외 변형으로 나타난다. 특히 뒤틀림 모드의 경우 해석적으로 계산하기가 일반적으로 매우 어렵다. 그림 8(b)에는 등방성 박스 보와 동일한 제원을 가지는 복합재료 박스 보의 워핑함수를 나타내었다. 등방성 보의 경우와 비교하여 보면 굽힘 워핑함수들에 반대방향으로의 굽힘 변형 효과가 들어가 있음을 알 수 있다. 이렇게 재료의 연성에 의해 생기는 변형 모드의 경우 해석적 방법의 적용은 거의 불가능에 가깝다. 본 기사에서 소개한 BCSA를 이용하면 기하학적인 형상에 관계없이 신뢰할 수 있는 워핑함수를 계산할 수 있고, 이 워핑함수들은 정확한 등가강성 예측에 직접적으로 영향을 주기 때문에 다양한 보 구조물의 응용되어 질 수 있다. 일반적인 이방성(general anisotropic) 재료에 대한 보 단면 해석을 가능하게 해주고, 입력 데이터 또한 일반 유한요소법의 그것과 유사하기 때문에 수치 실험용 프로그램으로 유용할 것으로 생각된다.

4. 맺음말

본 기사에서는 보 이론의 발달과정을 간략하게 소개하고, 보 구조물의 단면 해석의 중요성을 예제를 통하여 보였다. 현재 몇 개의 보 단면 해석 프로그램이 존재하지만, Matlab기반 단면 유한요소해석 프로그램은 소개한 BCSA가 유일하다. 이 프로그램의 장점은 Matlab기반이기 때문에 소스코드의 이해가 쉽고, 많은 응용분야에 쉽게 적용할 수 있다는 장점이 있다. 프로그램이 필요한 독자들은 저자에게 전자메일(junsik.kim@kumoh.ac.kr)로 연락하면 무료로 배포 받을 수 있다.

참 고 문 헌

1. Timoshenko, S. P., 1953, History of Strength of Materials, McGraw-Hill, New York.

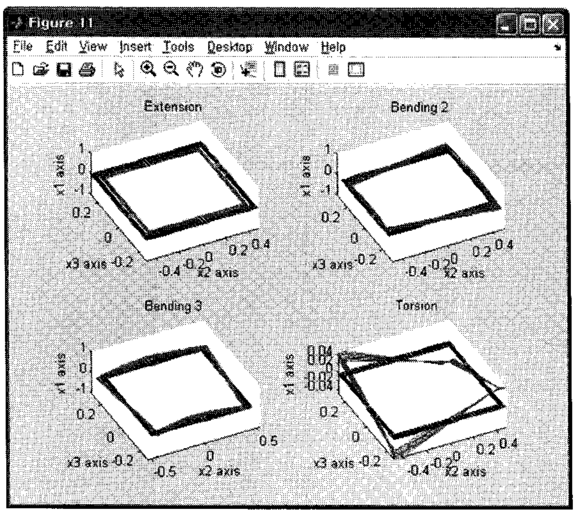


그림 8(a) 등방성 박스 보의 워핑함수

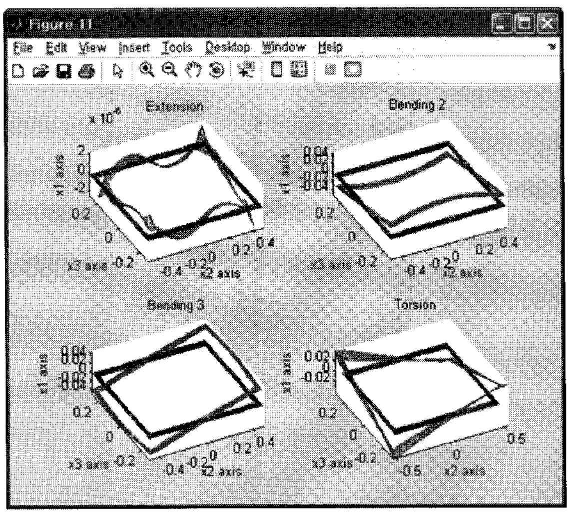


그림 8(b) 복합재료 박스 보의 워핑함수

2. Crandall, S.H., Dahl, N.C., and Lardner, T.J., 1978, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill, Singapore.
3. Kim, J.-S., Cho, M., and Smith, E.C., 2008, "An asymptotic analysis of composite beams with kinematically corrected end effects", International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, pp. 1954~1977.

[담당 : **유은종**, 편집위원]