

인장-압축 비대칭성을 고려한 AZ31 판재의 항복함수 구성

윤종현[#] · Oana Cazacu¹ · 이정환²

Construction of Yield Criterion for AZ31 Sheet Alloy by Considering Tension-Compression Asymmetry

J. H. Yoon, O. Cazacu, J. H. Lee

(Received July 29, 2011 / Revised October 27, 2011 / Accepted November 10, 2011)

Abstract

In order to take into account the strong anisotropy and the tension-compression asymmetry of AZ31 sheet alloy, the Cazacu-Plunkett-Barlat yield criterion(Cazacu, 2006), CPB06, was adopted in the present material modeling. The variation of anisotropic coefficients which describe the yield surface evolution of AZ31 is optimized using an interpolation function based on specific calibration results. It generates continuous yield surfaces, which makes it possible to describe the different hardening rates in tension and compression as well as tension-compression asymmetry of magnesium alloys. The ability of the CPB06 yield criterion to predict experimental results was demonstrated and compared with that of the Hill(1948) yield criterion.

Key Words : AZ31, Tension-compression Asymmetry, Anisotropy, Yield Criterion, CPB06, Hill

1. 서론

에너지 고효율화를 위한 수송기기의 경량화 요구에 따라 비강도와 비강성이 높은 마그네슘 합금의 연구가 활발히 진행되고 있다. 일반적으로 마그네슘 합금의 경우, 낮은 성형성과 강한 이방성 등의 소재특성으로 인하여 대체소재로서 상용화가 어려운 실정이며 최종 성형을 위하여 고온 성형 등을 수행해야 하는 단점이 있다. 마그네슘 합금은 조밀육방구조로 인하여 적은 수의 슬립시스템을 갖고 있으며 압축 변형 시 쌍정(twinning)이 발생하게 된다. 이러한 쌍정의 발생으로 인하여 마그네슘 합금은 소성 변형 시 압축과 인장의 물성이 크게 다른 압축-인장 비대칭성을 보이게 된다. 마그네슘 합금의 이방성 및 압축-인장 비대칭을 동시에 모델링하기 위하여 Walde et al.[1]; Yi et al.[2]; Lévesque et al.[3] 등은 결정소성학에 기반

한 물리적 모델의 적용을 시도하였다. 그러나 결정소성학 모델의 경우 초기 결정의 방위분포를 비롯하여 재료의 미시적 상수 등이 필요할 뿐만 아니라 방대한 해석시간으로 인하여 실제적인 성형해석을 수행하기 어렵다. Li et al.[4]는 마그네슘 합금의 인장-압축 비대칭성을 고려하기 위하여 평면응력 모델인 TWINLAW를 제안하여 변형률 상태에 따라 twinning과 untwining의 효과를 실제적으로 구현하였다. 현상학적 접근 방법으로서, Cazacu-Plunkett-Barlat(CPB06, Cazacu et al.[5])는 마그네슘 및 타이타늄 합금 등의 소성 비대칭성을 고려할 뿐만 아니라 알루미늄 및 스틸 계열에 적용 가능한 항복함수를 제안하였다. Ertürk et al.[6]는 Cazacu-Barlat의 항복함수를 수정하여 상용해석 프로그램인 ABAQUS/Explicit에 적용하였으며 이를 이용하여 마그네슘 합금의 열간 성형공정을 해석하였다. 본 논문에서는 마그네슘 합금(AZ31)의

1. University of Florida, Mechanical and Aerospace Engineering

2. 한국기계연구원 부설 재료연구소

교신저자: 한국기계연구원 부설 재료연구소,

E-mail:jhyoon@kims.re.kr

소성 비대칭성과 이방성을 동시에 고려하기 위하여 항복함수를 구성하였으며 이를 이용하여 인장 및 압축변형의 비대칭 경화를 동시에 연속적으로 표현할 수 있는 방법을 제안하였다.

2. AZ31 판재의 모델링

마그네슘 합금의 압축 유동응력 곡선을 살펴보면, 소성변형 초기에 압축 항복응력이 인장 항복응력에 약 0.5배 크기를 보이며 쌍정의 발생으로 인하여 변형률이 증가함에 따라 경화율이 급격하게 증가한다. 따라서 압축 유동응력 곡선은 인장 유동응력 곡선과는 다르게 아래로 볼록한 형태를 보이게 된다. 반면, 인장 유동응력 곡선은 변형률이 증가함에 따라 경화율이 작아지면서 위로 볼록한 형태의 일반적인 경화곡선을 갖는다. Fig. 1은 상온에서 AZ31 (3wt%Al, 1wt%Zn, Mg bal.) 판재의 RD(rolling, 0°), TD(transverse, 90°), DD(diagonal direction, 45°) 방향의 인장, 압축 유동응력 곡선을 나타낸다(Khan et al.[7]). 압연 방향의 인장 유동곡선은 다음과 같이 Voce-type 경화식으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_0^T(\bar{\epsilon}_p) = 300.4 - 134.2 \exp(-17.483 \bar{\epsilon}_p) \quad (MPa) \quad (1)$$

2.1 항복함수 구성

해석에 적용된 항복함수, CPB06[5], 는 다음과 같은 형태를 갖는다.

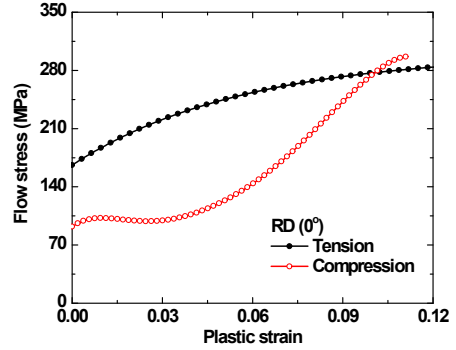
$$F = \phi(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = \left(|\Sigma_1| - k\Sigma_1 \right)^a + \left(|\Sigma_2| - k\Sigma_2 \right)^a + \left(|\Sigma_3| - k\Sigma_3 \right)^a \quad (2)$$

$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 는 변형된 주응력을 나타내며 k 는 재료 상수로서 인장과 압축의 소성 비대칭성을 고려하기 위하여 도입되었으며, a 는 항복함수의 균일도 (degree of homogeneity)를 의미한다. 변형된 응력 텐서는 다음과 같이 표현할 수 있다.

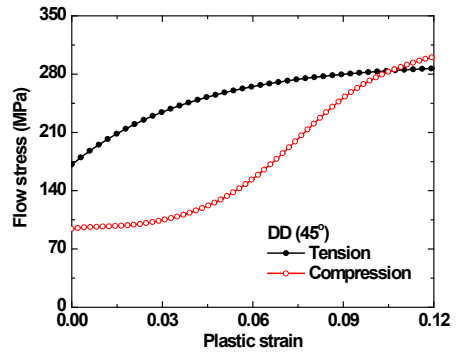
$$\Sigma = C : s \quad (3)$$

s 는 편차응력을 나타내며 C 는 4차 변형텐서를 의미한다. 3차원 상에서 C 는 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

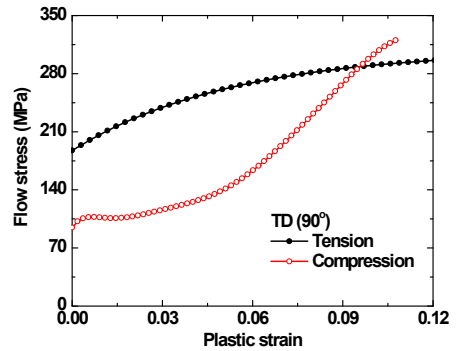
$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 1 Experimental stress-strain curve of AZ31sheet alloy: (a) RD (90°), (b) DD (45°), (c) TD (90°) (Khan et al., 2010[7])

CPB06 항복함수는 $C_{ii} = 1, C_{ij} = 0 (i \neq j), a = 2$, 그리고 $k = 0$ 조건일 경우, von Mises 항복함수로 변환된다. 판재의 압연 방향을 x 축, 수직방향을 y 축이라 가정하고 압연 방향으로부터의 각을 θ 로 가정했을 때, 방향 별 인장, 압축 응력은 σ_0^T, σ_0^C 으로 표현할 수 있으며 항복함수 (2)를 이용한 이론적인 응력 값은 다음과 같다.

$$\sigma^T(\theta) = X^T \left\{ \frac{1}{\left[|A_1| - kA_1 \right]^a + \left[|A_2| - kA_2 \right]^a + \left[|A_3| - kA_3 \right]^a} \right\}^{\frac{1}{a}}$$

$$\sigma^C(\theta) = X^T \left\{ \frac{1}{\left[|A_1| + kA_1 \right]^a + \left[|A_2| + kA_2 \right]^a + \left[|A_3| + kA_3 \right]^a} \right\}^{\frac{1}{a}} \quad (5)$$

식(5)에서 X^T 는 압연방향($\theta=0^\circ$)의 인장 항복응력을 나타내며,

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(A_{xx} + A_{yy} + \sqrt{(A_{xx} - A_{yy})^2 + 4A_{xy}^2} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(A_{xx} + A_{yy} - \sqrt{(A_{xx} - A_{yy})^2 + 4A_{xy}^2} \right)$$

$$A_3 = A_{zz}, \quad (6)$$

$$A_{xx} = \phi_1 (\cos \theta)^2 + \psi_1 (\sin \theta)^2, \quad A_{yy} = \phi_2 (\cos \theta)^2 + \psi_2 (\sin \theta)^2,$$

$$A_{zz} = \phi_3 (\cos \theta)^2 + \psi_3 (\sin \theta)^2, \quad A_{xy} = C_{66} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\phi_1 = \frac{2}{3}C_{11} - \frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{13}, \quad \phi_2 = \frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{23},$$

$$\phi_3 = \frac{2}{3}C_{13} - \frac{1}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{33}, \quad \psi_1 = \frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{11} - \frac{1}{3}C_{13},$$

$$\psi_2 = \frac{2}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{23}, \quad \psi_3 = \frac{2}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{13} - \frac{1}{3}C_{33}$$

또한, CPB06를 이용한 AZ31의 모델링 결과를 비교하기 위하여 일반적으로 많이 사용되고 있는 Hill(1948)[8] 항복함수를 이용하여 결과를 비교하였다. Hill(1948) 항복함수는 직교 좌표계에서 식(7)과 같이 표현된다.

$$F(\sigma) = \left\{ F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L(\sigma_{yz}^2) + 2M(\sigma_{zx}^2) + 2N(\sigma_{xy}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

F, G, H, L, M, 그리고 N 은 각기 다른 방향으로 부터 측정된 인장시험 값을 이용하여 계산된 재료상수로서 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

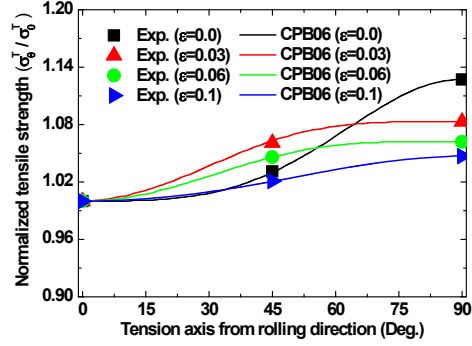
$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_{90}^T)^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{(\sigma_0^T)^2} \right), \quad G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{(\sigma_0^T)^2} - \frac{1}{(\sigma_{90}^T)^2} \right)$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_0^T)^2} + \frac{1}{(\sigma_{90}^T)^2} - \frac{1}{Z^2} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{(\sigma_{45}^T)^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \quad (8)$$

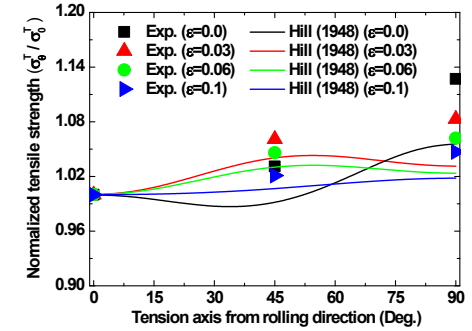
식(8)에서 Z는 두께 방향(ND)으로의 항복응력을 나타낸다.

2.2 항복함수 계수 결정

항복함수의 계수는 식(9)와 같이 정의된 오차함수를 최소화하는 방법으로 계산한다.



(a)



(b)

Fig. 2 Comparison between experimental tensile yield strengths and theoretical predictions using CPB06 and Hill yield criteria at specific plastic strain: (a) CPB06, (b) Hill(1948)

$$\omega = \sum_i^n \alpha_i \left(1 - \frac{(\sigma_0^T)_i^{th}}{(\sigma_0^T)_i^{exp}} \right)^2 + \sum_j^m \beta_j \left(1 - \frac{(\sigma_0^C)_j^{th}}{(\sigma_0^C)_j^{exp}} \right)^2 \quad (9)$$

n, m은 방향 별 인장시험과 압축시험의 개수를 의미하며(n, m=3, for $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$) th, exp는 이론 값과 실험 값, 그리고 α_i, β_j 는 가중치를 나타낸다.

Fig. 2는 유효 소성변형률 0.0, 0.03, 0.06, 그리고 0.1에서 식(9)의 오차함수를 최소화하여 얻어진 항복함수 계수를 적용하여 인장 항복응력 값을 예측하고 이를 인장실험에서 얻어진 인장 항복응력 값과 비교한 결과이다. Fig. 3은 Fig. 2와 같은 유효 소성 변형률 영역에서 이론적인 압축 항복응력 값과 실험적인 압축 항복응력 값을 비교한 결과이다. CPB06와 Hill(1948)의 항복함수를 이용하여 이론적인 인장 항복응력을 예측할 경우, 두 항복함수 모두 이론적인 인장 항복응력 예측 치가 실험값을 정확하게 묘사하고 있지만 CPB06 항복함수를 이용한 예측이 Hill(1948)의 항복함수를 이용

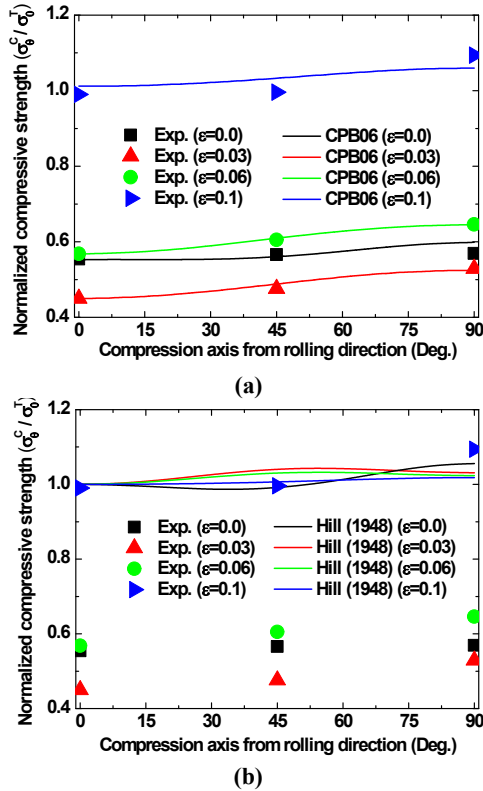


Fig. 3 Comparison between experimental compressive yield strengths and theoretical predictions using CPB06 and Hill yield criteria at specific plastic strain: (a) CPB06, (b) Hill(1948)

한 인장 항복응력의 예측보다 높은 정확도를 보이고 있다. 그러나 압축 항복응력을 비교한 결과에서는 CPB06 항복함수를 이용한 예측 결과가 실험적인 압축 항복응력을 정확하게 예측하고 있는 반면 Hill(1948)의 항복함수를 이용한 압축 항복응력 예측은 큰 오차를 보이고 있다. 따라서 인장-압축의 소성 비대칭성을 보이는 HCP 소재를 이용한 성형해석의 경우, 기존의 Hill(1948)의 항복함수를 이용한 해석결과의 신뢰도가 낮음을 알 수 있으며 CPB06와 같이 인장-압축 비대칭성을 고려할 수 있는 항복함수의 적용이 요구된다.

2.3 항복곡면의 발전(evolution)

항복함수의 발전(Fig. 4)을 연속적으로 묘사하기 위하여 비연속적($\bar{\epsilon} = 0, 0.03, 0.06, \text{and } 0.1$)으로 계산된 항복함수 계수의 분포를 다항식을 이용하여 연속적인 항복함수 계수로 구성하였다. Fig. 5의

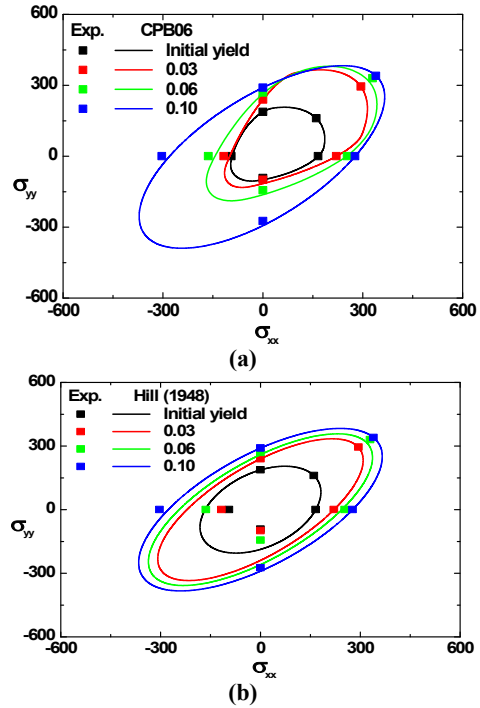


Fig. 4 Yield surface evolutions expressed with yield criteria: (a) CPB06, (b) Hill(1948)

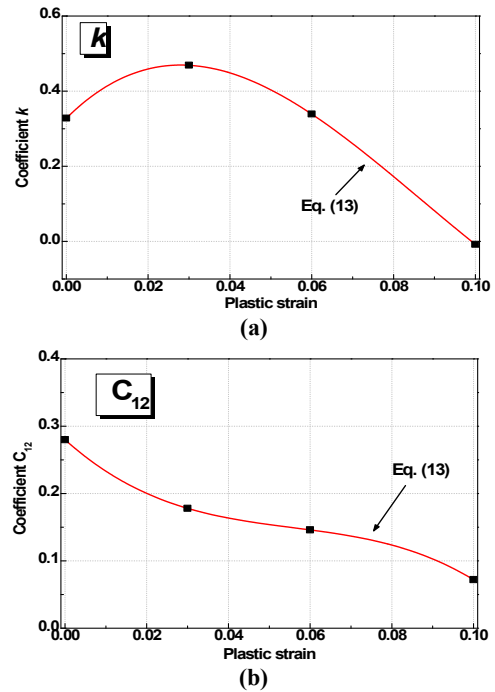


Fig. 5 Variation of anisotropic coefficients for CPB06 with increase of plastic strain: (a) k , (b) C_{12}

Table 1 CPB06 anisotropic coefficients approximated by a polynomial function (a=2)

$$Y = A + B \times (\bar{\epsilon}^p) + C \times (\bar{\epsilon}^p)^2 + D \times (\bar{\epsilon}^p)^3 \quad (10)$$

Y	A	B	C	D
k	0.328	10.811	-230.253	885.528
C_{12}	0.28	-5.468	83.96	-500.794
C_{13}	-0.152	1.6133	5.722	-205.556
C_{22}	0.98	-4.397	55.956	-90.873
C_{23}	-0.057	1.5055	-30.274	151.1905
C_{33}	-0.0049	-1.5103	24.518	-105.234
C_{66}	0.74	1.0517	-20.639	297.222

Table 2 Hill(1948) coefficients approximated by a polynomial function

$$Y = A + B \times (\bar{\epsilon}^p) + C \times (\bar{\epsilon}^p)^2 + D \times (\bar{\epsilon}^p)^3 \quad (11)$$

Y	A	B	C	D
F	0.271	-5.7081	124.571	-661.476
G	0.484	-8.5355	149.238	-751.1905
H	0.516	8.5355	-149.274	751.1905
N	1.505	-0.5836	24.734	-101.984

데이터 점들은 $\bar{\epsilon}^p = 0, 0.03, 0.06, \text{ and } 0.1$ 에서 CPB06 항복함수의 계수인 k, C_{12} 의 계산된 값을 나타내며 실선은 이를 바탕으로 연속적인 다항식으로 근사한 결과를 나타낸다. 유효소성 변형률에 대한 3차 다항식을 이용하여 기 계산된 항복함수 계수를 근사하게 되며 최적화된 다항식 계수들은 Table 1에 정리하였다. 이와 같은 방법으로 Hill의 항복함수 계수를 근사하면 Table 2와 같다.

3. 단순인장 및 압축시험의 적용

2.3절에서 제안된 방법을 검증하기 위하여 단순인장 및 압축시험에 대한 유한요소 해석을 수행하였다. CPB06 항복함수를 적용하였으며 유효소성 변형률에 따른 항복곡면의 발전을 고려하기 위하여 상용 해석 프로그램인 ABAQUS/Standard에 User subroutine (UMAT)을 구성하여 해석에 적용하였다. 해석 결과의 공정한 비교를 위하여 총 12%의 변형률을 부과하였으며 1000 steps로 해석을 진행하였다. 또한 인장, 압축 시편을 단순화하여 게이지 (gage)부만을 1/4 모델링 하였으며 총 27개의 3차원 brick 요소(C3D8RH)요소를 사용하였다.

Fig. 6~8은 단순 인장 및 압축시험에 대한 유한

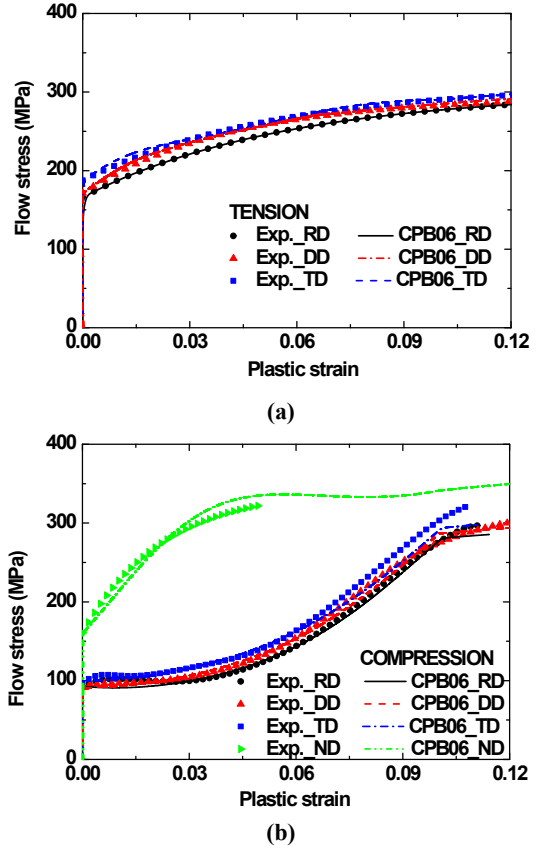


Fig. 6 FE analysis in tension and compression with CPB06 yield criterion: (a) Tension, (b) Compression

요소해석과 실제 실험의 유동응력 곡선을 비교한 결과이다. Fig. 6~8에서 데이터 점들은 인장 및 압축시험을 수행하여 얻어진 실험결과를 나타내며 실선은 유한요소 해석을 수행하여 얻어진 해석적 유동곡선을 나타낸다. CPB06 항복함수를 이용한 해석결과는 각 방향의 이방성을 고려할 수 있을 뿐만 아니라 인장-압축의 소성 비대칭성을 성공적으로 묘사하고 있다. 주목할 만한 결과로서, CPB06 항복함수 해석 결과는 Fig. 6(a)와 (b)의 확연히 다른 인장과 압축의 변형률 경화 양상을 표현하고 있다. 2장에서 언급한 바와 같이 AZ31 판재의 유동응력은 압축 시에 초기 쌍정의 발생으로 인하여 변형률이 증가함에 따라 경화율이 급격하게 증가한다. 따라서 전위(dislocation)발생이 지배적인 인장 소성변형에서 나타나는 위로 볼록한 형태의 경화곡선과는 다르게 압축 변형 시 아래로 볼록한 형태의 유동응력 곡선을 보이게 된

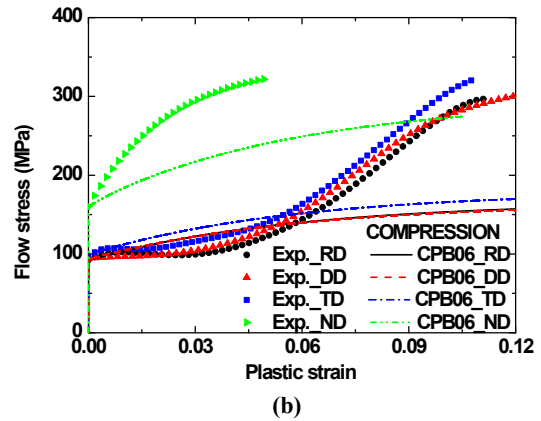
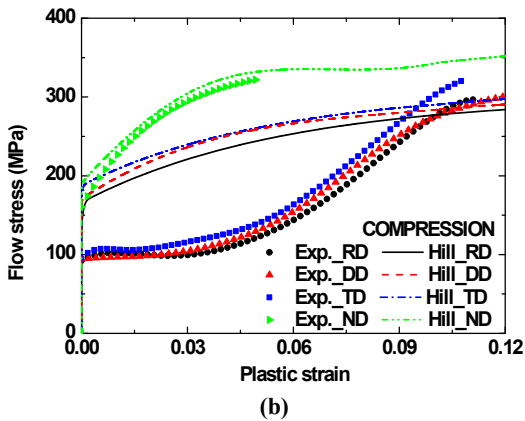
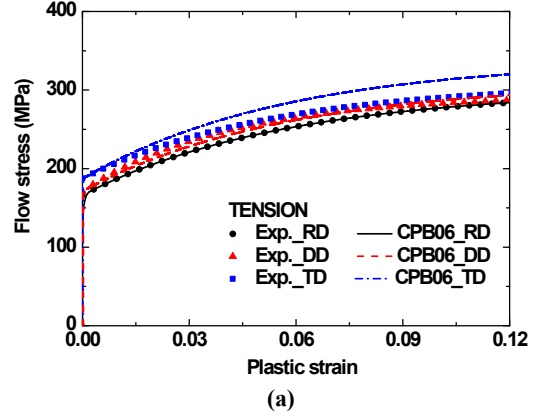
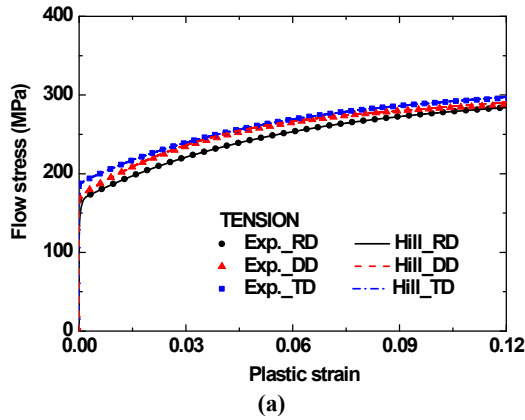


Fig. 7 FE analysis in tension and compression with Hill(1948) yield criterion: (a) Tension, (b) Compression

Fig. 8 FE analysis in tension and compression with CPB06 yield criterion without considering yield surface evolution: (a) Tension, (b) Compression

다. 2.3절에서 제안된 연속적인 항복함수 계수의 적용으로 인하여 압축, 인장 시에 다르게 나타나는 복잡한 경화현상을 해석 상에서 재현할 수 있었으며 변형률의 증가에 따른 연속적인 유동응력 곡선의 정확한 묘사가 가능한 것으로 판단된다. CPB06 항복함수의 해석결과를 비교하기 위하여 Hill(1948)의 항복함수를 이용한 해석 결과를 추가적으로 수행하였고 그 결과를 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7에서 제시된 바와 같이 Hill(1948)의 항복함수는 인장 유동곡선은 정확하게 묘사하고 있지만, Fig. 7(b)와 같이 압축 유동곡선은 인장 유동곡선과 일치하는 결과만을 제시하고 있다. 따라서 AZ31을 이용하여 인장 및 압축 변형모드가 주요하게 작용하는 해석을 수행할 경우 Hill(1948)의 항복함수 적용은 많은 오차를 발생시키게 된다.

변형률 증가에 따른 항복곡면의 발전 효과를 검증하기 위하여 2.3절에서 제안된 CPB06 항복함수의 연속적인 항복함수 계수를 적용하지 않고 초기 항복(initial yielding)에서 계산된 한 셋의 항복함수 계수만을 적용하여 단순 인장, 압축 해석을 수행하였다. Fig. 8(a)와 (b)에서 유한요소 해석을 수행하여 예측된 인장, 압축 유동응력 곡선은 유일하게 초기 항복점에서만 실험 결과와 일치하는 경향을 보인다. 이러한 이유는 CPB06 항복함수를 적용하는 과정에서 초기 항복점에서 계산된 한 셋의 계수만을 적용했기 때문에 변형률 증가에 따른 변형 경화율(strain hardening rate)을 연속적으로 재현하지 못하는 것으로 판단된다. 또한, 비연속적인 항복함수 계수의 적용으로 인하여 압축 유동응력 곡선의 경향을 전혀 다르게 예측하고 있는 것을 알 수 있다(Fig. 8(b)).

4. 결론

본 논문에서는 AZ31 판재의 소성변형을 모델링하기 위하여 CPB06 항복함수를 구성하였으며, 2.3절에서 제안된 방법을 이용하여 연속적으로 항복함수 계수를 업데이트하여 항복곡면의 발전을 고려하였다. CPB06 항복함수를 적용함으로써 AZ31 판재의 인장-압축 소성 비대칭성을 유한요소 해석 상에서 표현할 수 있으며 항복함수 계수를 해석축차(iteration) 내에서 연속적으로 계산하여 인장과 압축 변형 시에 다르게 발생하는 변형률 경화 현상을 묘사할 수 있었다. 본 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) AZ31 판재와 같이 HCP 결정구조를 갖는 소재를 적용할 경우 인장과 압축의 소성 비대칭성에 대한 효과를 검증할 필요가 있다.

(2) 굽힘 변형과 같이 인장과 압축 변형모드가 동시에 작용하는 변형해석을 수행할 경우에는 이를 고려할 수 있는 항복함수를 적용하여야 할 뿐만 아니라 인장, 압축의 복잡한 변형률 경화를 동시에 고려할 수 있는 방법을 적용해야 한다.

참 고 문 헌

- [1] T. Walde, H. Riedel, 2007, Simulation of Earing during Deep Drawing of Magnesium Alloy AZ31, *Acta Mater.*, Vol. 55, No. 3, pp. 867~874.
- [2] S. Yi, J. Bohlen, F. Heinemann, D. Letzig, 2010, Mechanical Anisotropy and Deep Drawing Behaviour of AZ31 and ZE10 Magnesium Alloy Sheets, *Acta Mater.*, Vol. 58, No. 2, pp. 592~605.
- [3] J. Lévesque, K. Inal, K. W. Neale, R. K. Mishra, 2010, Numerical Modeling of Formability of Extruded Magnesium Alloy Tubes, *Int. J. Plast.*, Vol. 26, No. 1, pp. 65~83.
- [4] M. Li, X. Y. Lou, J. H. Kim, R. H. Wagoner, 2010, An Efficient Constitutive Model for Room-temperature, Low-rate Plasticity of Annealed Mg AZ31B Sheet, *Int. J. Plast.*, Vol. 26, No. 6, pp. 820~858.
- [5] O. Cazacu, B. Plunkett, F. Barlat, 2006, Orthotropic yield Criterion for Hexagonal Closed Packed Metals, *Int. J. Plast.*, Vol. 22, No. 7, pp. 1171~1194.
- [6] S. Ertürk, D. Steglich, J. Bohlen, D. Letzig, W. Brocks, 2009, Thermo-mechanical Modelling of Indirect Extrusion Process for Magnesium Alloys, *Int. J. Mater. Form.*, Vol. 2, No. 1, pp. 49~52.
- [7] A. S. Khan, A. Pandey, T. Gnäupel-Herold, R. K. Mishra, 2011, Mechanical Response and Texture Evolution of AZ31 Alloy at Large Strains for Different Strain Rates and Temperatures, *Int. J. Plast.*, Vol. 27, No. 5, pp. 688~706.
- [8] R. Hill, 1948, A Theory of Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 193, No. 1033, pp. 281~297.