

변분법에 의한 탄성지반 해석

이승현¹, 한진태^{2*}

¹선문대학교 토목공학과, ²서울대학교 건설환경공학부

Application of Variational Method to the Elastic Foundation

Seung-Hyun Lee¹ and Jin-Tae Han^{2*}

¹Dept. of Civil Engineering, Sunmoon University

²Dept. of Civil & Environmental Engineering, Seoul National University

요약 평면 변형을 상에 있는 탄성지반의 해를 변분법을 적용하여 유도하여 보았다. 변분법 적용시 종방향 변위분포 함수는 선형함수를 고려하였다. 탄성지반상에 작용하는 하중조건은 집중하중과 분포하중을 고려하였는데 집중하중 작용시 탄성지반의 종방향 변위분포양상은 하중 작용점에서 멀어질수록 변위가 급격하게 감소하는 양상을 나타내었다. 등분포하중 작용시 지표면 변위는 압축층 두께에 대한 재하폭의 반의 비(B/H)값이 클수록 하중재하부분 아래에서 보다 균등하게 발생하였다. 또한 하중재하부분을 벗어난 영역에서는 B/H 값이 커질수록 하중재하 모서리 부분으로부터 짧은 거리에서 변위가 0에 수렴하였다.

Abstract Solution for elastic foundation of plane strain state was derived by the application of variational method. Functions of the transverse distribution of the displacements for the analysis were chosen as linear functions. Loading conditions considered for the analysis were concentrated load and distributed load. Under the loading condition of the concentrated load, surface displacement was decreased drastically as the distance from the point of the loading increased. Under the loading condition of the distributed load, surface displacements were more uniformly distributed beneath the loading area when the ratio of the half of the loading width to the depth(B/H) of the compressible layer was greater. The surface displacement was more quickly converged from the edge of the loading area as the ratio(B/H) increased.

Key words : Plane strain state, Variational method, Function of the transverse distribution of the displacement, Surface displacement

1. 서론

탄성지반 해석은 지반에 작용하는 외력에 의해 지표면 또는 지반내에 발생하는 응력과 변위를 규명하는 작업이라 할 수 있다. 탄성지반 해석방법은 주로 탄성론에 의한 방법(Timoshenko and Goodier, 1987; Winkler, 1867)에 의해 수행되는데 본 연구에서는 탄성지반에 대해 변분법(Scott, 1981; Vlasov and Leontiev, 1966)을 적용하는 방법에 대해 고찰하였다. 특히, 지반공학과 관련하여 자주

등장하는 평면변형을 문제에 있어서 탄성지반의 지표면에 집중하중과 등분포하중이 작용하는 경우의 지표면 변위를 중점적으로 살펴보았다.

2. 변분법의 기초

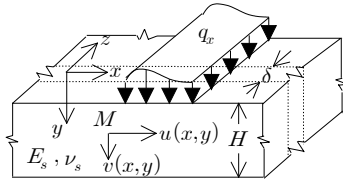
그림 1과 같이 기저암반위에 놓인 두께 H 인 압축성 지반을 고려한다.

*교신저자 : 한진태(jimmy76@snu.ac.kr)

접수일 11년 07월 29일

수정일 11년 08월 30일

게재확정일 11년 10월 06일



[그림 1] 탄성지반
[Fig. 1] Elastic foundation

그림 1에 대하여 평면 변형률 상태를 가정하면 길이 δ 인 얇은 판에 대하여 응력과 변형률은 각각 식 (1) 및 식 (2)와 같다.

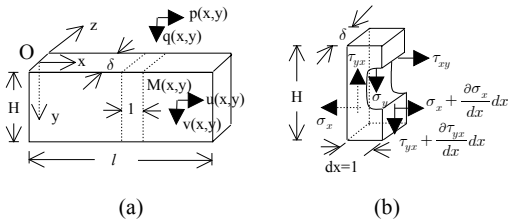
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_y &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2}(\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1)에서 E_0 와 ν_0 는 식 (3)과 같다.

$$E_0 = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \quad (3)$$

그림 1과 식 (3)에서의 E_s 와 ν_s 는 탄성지반의 탄성계수와 포아송비를 나타낸다. 그림 1에서 길이 δ 인 얇은 판을 고려하여 나타내면 다음의 그림 2(a)와 같다.



[그림 2] 하중을 받는 사각형판
[Fig. 2] Rectangular plate under loading

편의상 x 방향을 횡방향, y 방향을 종방향으로 한다. 따라서 점 $M(x,y)$ 에서 $u(x,y)$ 는 횡방향 변위가 되고 $v(x,y)$ 는 종방향 변위가 된다. 식 (2)에 나타난 변위를 변분형태로 표현하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{i=1}^m U_i(x)\psi_i(y) \quad (i=1,2,3,\dots,m) \\ v(x,y) &= \sum_{k=1}^n V_k(x)\phi_k(y) \quad (k=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 함수 $\psi_i(y)$ 와 $\phi_k(y)$ 는 기지함수로 가정하고 함수 $U_i(x)$ 와 $V_k(x)$ 는 미지함수가 된다. $\psi_i(y)$ 와 $\phi_k(y)$ 는 무차원 함수로 하는 것이 편리한데 이 때 $U_i(x)$ 와 $V_k(x)$ 는 길이의 차원을 갖게 된다. 함수 $U_i(x)$ 와 $V_k(x)$ 를 일반화된 변위(generalized displacement)라 부른다. $x = const.$ 인 단면에 대한 횡방향 및 종방향 변위분포는 함수 $\psi_i(y)$ 와 $\phi_k(y)$ 에 의해 표현되므로 $\psi_i(y)$ 와 $\phi_k(y)$ 를 종방향 변위분포 함수(function of the transverse distribution of the displacement)라 부른다. 일반화된 변위는 그림 1(b)에 나타난 $dx=1$ 인 얇은 띠에 대하여 평형 조건을 고려하여 결정할 수 있다. 가상일의 원리에 의해 평형조건식을 얻을 수 있는데 가상 변위에 대하여 띠에 작용하는 외력에 의한 일과 내력에 의한 일이 같게 됨을 이용한다. [그림 2(b)]에 나타난 얇은 띠에 작용하는 외력은 수직응력인 σ_x 와 $\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx$, 전단응력인 τ_{yx} 와 $\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial x)dx$ 그리고 x,y 방향으로의 단위 높이당 작용하는 분포하중 성분인 $p(x,y)$ 와 $q(x,y)$ 이다. 얇은 띠에 작용하는 내력은 수직응력인 σ_y 와 전단응력 τ_{xy} 에 의한 힘이다. $m+n$ 개의 가상변위에 대하여 얇은 띠에 대하여 외력과 내력에 의한 일은 식 (5) 및 식 (6)과 같이 주어진다($dx=1$).

$$\int \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\psi_j dF - \int \tau_{xy}\psi_j' dF \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (5)$$

$$+ \int p(x,y)\psi_j dy = 0$$

$$\int \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}\phi_h dF - \int \sigma_y\phi_h' dF \quad (h=1,2,\dots,n) \quad (6)$$

$$+ \int q(x,y)\phi_h dy = 0$$

식 (5), (6)에서 $dF = \delta dy$ 로 나타나며 띠 측면의 미소 면적을 나타낸다. 식 (5)와 식 (6)의 마지막 항은 분포하중에 의한 가상일을 나타낸다. 식 (2)와 식 (4)를 식 (1)에 적용하면 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\sum_{i=1}^m U_i' \psi_i + \nu \sum_{k=1}^n V_k \phi_k' \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\sum_{k=1}^n V_k \phi_k' + \nu \sum_{i=1}^m U_i' \psi_i \right] \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\sum_{i=1}^m U_i \psi_i' + \sum_{k=1}^n V_k' \phi_k \right] \quad (7)$$

식 (7)을 식 (5)와 식 (6)에 대입하면 $U_i(x)$ 와 $V_k(x)$ 에 관한 상미분방정식을 식 (8)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} U_i'' - \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^m b_{ij} U_i' + \sum_{k=1}^n (t_{jk} - \frac{1-\nu}{2} c_{jk}) V_k' \\ + \frac{1-\nu^2}{E} p_j = 0 \quad (j=1,2,3,\dots,m) \\ - \sum_{i=1}^m (t_{hi} - \frac{1-\nu}{2} c_{hi}) U_i' + \frac{1-\nu}{2} \sum_{k=1}^n r_{hk} V_k'' \\ - \sum_{k=1}^n s_{hk} V_k + \frac{1-\nu^2}{E} q_h = 0 \quad (h=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 계수들은 식 (9)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int \psi_i \psi_j dF, \quad b_{ij} = \int \psi_i' \psi_j' dF, \quad c_{jk} = \int \psi_j' \phi_k' dF \\ c_{hi} &= \int \phi_h \psi_i' dF, \quad r_{hk} = \int \phi_h \phi_k dF, \quad s_{hk} = \int \phi_h' \phi_k' dF \\ t_{jk} &= \int \psi_j \phi_k' dF, \quad t_{hi} = \int \phi_h' \psi_i dF \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)에서 p_j 와 q_h 는 식 (10)과 같다.

$$p_j = \int p(x,y) \psi_j dy, \quad q_h = \int q(x,y) \phi_h dy \quad (10)$$

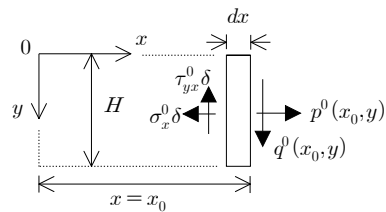
식 (8)은 U_i 와 V_k 에 대한 2계 도함수를 포함하고 있으므로 식 (8)을 만족하는 미지함수 $U_i(x)$ 와 $V_k(x)$ 는 총 $2(m+n)$ 개의 적분상수를 갖게 된다. 이들 적분상수의 수는 판의 양끝단 $x=0, x=l$ (l : 횡방향 판 길이)에서의 독립적인 기하학적 조건의 개수와 같다. 하나의 단면에 대하여 $m+n$ 개의 항을 갖는 함수에 의해 점들의 위치가 결정되므로 판의 양끝단에 대하여 독립적인 조건의 개수는 $2(m+n)$ 개가 되며 식 (8)과 관련한 적분상수의 개수와 같게 된다. 판에 있어서 임의의 단면상의 점들에 대하여 $m+n$ 개의 가상변위($U_j(x)=1, V_h(x)=1$)를 가정한 수직력 $\sigma_x dF$ 와 전단력 $\tau_{yx} dF$ 에 의한 가상일은 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T_j(x) &= \int \sigma_x \psi_j dF \quad (j=1,2,3,\dots,m) \\ S_h(x) &= \int \tau_{yx} \phi_h dF \quad (h=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서 $T_j(x)$ 와 $S_h(x)$ 는 일반화된 변위를 1로 본 것이므로 판의 단면 $x=const.$ 에서의 일반화된 횡방향 및 종방향 하중(전단력)을 나타낸다고 볼 수 있다. 식 (7)을 식 (11)에 대입하면 다음의 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} T_j(x) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} U_i' + \nu \sum_{k=1}^n t_{jk} V_k \right) \quad (i,j=1,2,3,\dots,m) \\ S_h(x) &= G \left(\sum_{i=1}^m c_{hi} U_i + \sum_{k=1}^n r_{hk} V_k' \right) \quad (h,k=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)를 이용하여 판의 양끝단 $x=0$ 와 $x=l$ 에 대하여 응력으로 나타낸 $2(m+n)$ 개의 경계조건을 부여할 수 있다. 그림 3과 같이 단면 $x=x_0$ 에 작용하는 수직 분포 하중 $p^0(x_0,y)$ 와 전단 분포하중 $q^0(x_0,y)$ 를 고려한다.



[그림 3] 경계조건의 고려
[Fig. 3] Consideration of boundary condition

그림 3의 폭 dx 인 얇은 띠에 대하여 가상일의 원리를 적용하면 식 (13)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int (\sigma_x^0 \delta - p^0) \psi_j dy = 0 \quad (j=1,2,3,\dots,m) \\ \int (\tau_{yx}^0 \delta - q^0) \phi_h dy = 0 \quad (h=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (11)을 식 (13)에 적용하면 다음의 식 (14)을 얻는다.

$$T_j^0(x) = \int p^0 \psi_j dy, \quad S_h^0(x) = \int q^0 \phi_h dy \quad (14)$$

따라서 식 (12)의 우변과 식 (14)의 우변을 같게 놓음으로써 일반화된 하중과 $x=x_0$ 단면에 작용하는 외력에 의한 관계식을 얻을 수 있다. 식 (8)을 적분한 후에 식 (12)와 식 (14)를 적용함으로써 판에 작용하는 응력과 변형률을 결정할 수 있다.

3. 탄성지반 해석

그림 1에 나타난 길이 δ 인 얇은 판에 대해 지표면에 작용하는 하중에 의한 변위를 식 (15)와 같이 가정한다.

$$u(x,y) = 0, \quad v(x,y) = V_1(x)\phi_1(y) \quad (15)$$

식 (2)에 의해 변형률 성분은 식 (16)과 같다.

$$\epsilon_{xx} = 0, \quad \epsilon_{yy} = V_1(x)\psi_1'(y), \quad \epsilon_{xy} = V_1'(x)\phi_1(y) \quad (16)$$

식 (1)에 의해 수직응력과 전단응력은 식 (17)과 같다.

$$\sigma_y = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} V_1(x)\phi_1'(y)$$

$$\tau_{yx} = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} V_1'(x)\phi_1(y) \quad (17)$$

이 경우 식 (8)은 식 (18)과 같이 된다.

$$2t V_1'' - k V_1 + q_1 = 0 \quad (18)$$

그림 1의 분포하중 $q(x)$ 에 의한 가상일은 식 (19)와 같다.

$$q_1(x) = q(x)\phi_1(0) \quad (19)$$

식 (18)에서 계수들은 식 (20)과 같다.

$$k = \frac{E_0 s_{11}}{1-\nu_0^2}, \quad t = \frac{E_0 r_{11}}{4(1+\nu_0)} \quad (20)$$

식 (20)에서 계수들은 식 (21)과 같다.

$$r_{11} = \int_0^H \phi_1^2(y) dF, \quad s_{11} = \int_0^H \phi_1'^2(y) dF \quad (21)$$

식 (18)은 탄성지반의 연직변위를 지표면에 작용하는 하중과 관련짓는 것으로 일반화된 변위 V_1 의 2계 도함수의 존재로 인해 탄성지반에 전단응력이 생기게 된다. 전단응력의 존재로 인해 변위는 하중재하하면 아래뿐만 아니라 그에 인접한 면에서도 발생하게 되어 Winkler 모델과 차이를 나타낸다. 식 (18)을 만족하는 탄성지반의 특성은 두 개의 적분 특성값에 의해 정의된다. 특성값 k 로 인해

탄성지반내의 압축 변형률이 결정된다. 특성값 t 에 의해 탄성지반내의 전단변형률이 결정되는데 이로 인해 기초 지반내에 하중이 분산되게 된다. 식 (18)의 해를 얻기 위해서는 경계조건이 필요한데 식 (11)을 적용하면 다음의 식 (22)를 얻을 수 있다.

$$T_j = \int \sigma_x \psi_j dF = 0$$

$$S_1 = \int \tau_{yx} \phi_1 dF = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} V_1' \int \phi_1^2 dy = 2t V_1' \quad (22)$$

여기서 탄성지반의 지표면에 집중하중 P 가 작용하는 경우를 고려하고 하중 작용점을 좌표 원점으로 보면 식 (18)은 식 (23)과 같게 된다.

$$2t V_1' - k_1 V_1 = 0 \quad (23)$$

식 (23)의 해는 식 (24)와 같다.

$$V_1(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \quad (24)$$

식 (24)에서 α 는 다음의 식 (25)와 같다.

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2t}} \quad (25)$$

$x \rightarrow \infty$ 인 경우 종방향 변위는 0이 되어야 하므로 식 (24)에서 C_2 는 0이 된다. 단면 $x = const.$ 에서 일반화된 전단력 $S_1(x)$ 는 $V_1(x) = 1$ 일 때 가상변위 $\bar{v}_1(x,y) = 1 \cdot \phi_1(y)$ 에 대하여 단면에 작용하는 모든 힘에 의한 일과 같다. 주어진 문제의 대칭성을 고려하고 식 (14)를 적용하면 집중하중이 작용하는 점에 대하여 식 (26)을 얻게 된다.

$$S_1(0) = -\frac{P}{2} \phi_1(0) \quad (26)$$

식 (22)와 식 (26)을 고려하면 다음의 식 (27)을 얻는다.

$$2\alpha t C_1 = \frac{P}{2} \phi_1(0) \quad (27)$$

따라서 C_1 은 식 (28)과 같다.

$$C_1 = \frac{P}{4} \frac{\phi_1(0)}{\alpha t} \quad (28)$$

따라서 탄성지반에서의 종방향 변위는 식 (29)와 같이 표현된다.

$$v(x,y) = P \frac{\phi_1(0)}{4\alpha t} e^{-\alpha x} \phi_1(y) \quad (29)$$

식 (29)에 대해 종방향 변위분포 함수를 식 (30)과 같이 선형함수로 고려한다.

$$\phi_1(y) = \frac{H-y}{H} \quad (30)$$

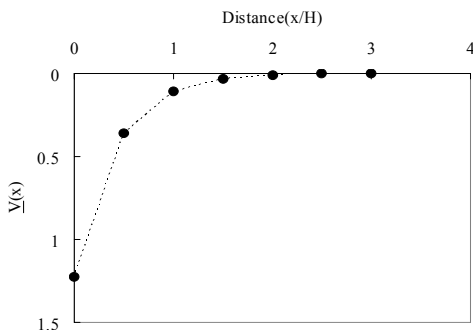
$\phi_1(0) = 1$ 이고 식 (30)의 종방향 변위분포함수를 적용하면 식 (29)는 식 (31)과 같다.

$$v(x,y) = 3(1+\nu_0) \frac{P}{E_0\delta} \sqrt{\frac{1-\nu_0}{6}} e^{-\frac{1}{H}\sqrt{\frac{6}{1-\nu_0}}x} \frac{H-y}{H} \quad (31)$$

종방향 변위분포함수가 선형인 경우 지표면에서의 종방향 변위량($V_1(x)$)을 무차원 변위($\underline{V}(x)$)로 나타내면 식 (32)와 같다.

$$V_1(x) = \frac{P}{E_0\delta} \underline{V}(x) \quad (32)$$

식 (32)에서 ν_0 를 0으로 고려하여 지표면을 따르는 무차원 변위를 나타내면 그림 4와 같다.



[그림 4] 지표면 변위 분포(집중하중)
[Fig. 4] Distribution of surface displacement (concentrated load)

그림 4를 통해 알 수 있듯이 하중 작용점에서 멀어질

수록 변위는 급격하게 감소하게 된다.

지표면에 폭 $2B$ 에 걸쳐 등분포하중 p 가 작용하는 경우의 지표면 종방향 변위를 생각한다. 지표면에서의 종방향 변위는 식 (29)를 적분하여 구할 수 있다. 식 (29)에서 x 의 함수인 $e^{-\alpha x}$ 를 적분하면 식 (33) 및 식 (34)와 같다.

$$\int_{-B}^x e^{-\alpha(x-\xi)} d\xi + \int_x^B e^{-\alpha(\xi-x)} d\xi \quad 0 < x < B \quad (33)$$

$$= \frac{1}{\alpha} (2 - e^{-\alpha(B-x)} - e^{-\alpha(B+x)})$$

$$\int_{-B}^B e^{-\alpha(x-\xi)} d\xi \quad B < x < \infty \quad (34)$$

$$= \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha(x-B)} - e^{-\alpha(x+B)})$$

식 (29)에서 ν_0 를 0으로 가정하고 식 (30)의 선형 종방향 변위분포함수를 사용하면 식 (29)는 식 (35) 및 식 (36)과 같다.

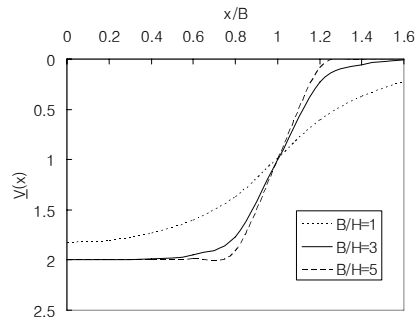
$$v(x,0) = \frac{pH}{2E_0\delta} [2 - e^{-\frac{\sqrt{6}}{H}(B-x)} - e^{-\frac{\sqrt{6}}{H}(B+x)}] \quad (35)$$

$$(0 < x < B)$$

$$v(x,0) = \frac{pH}{2E_0\delta} [e^{-\frac{\sqrt{6}}{H}(x-B)} - e^{-\frac{\sqrt{6}}{H}(x+B)}] \quad (36)$$

$$(B < x < \infty)$$

식 (35)와 (36)의 우변을 $pH/(2E_0\delta)$ 로 나눈 무차원 종방향 변위량($\underline{V}(x)$)을 B/H 값에 따라 나타내면 그림 5와 같다.



[그림 5] 지표면 변위분포(분포하중)
[Fig. 5] Distribution of surface displacement (distributed load)

[그림 5]를 통해 알 수 있듯이 지표면 변위는 B/H 값이 클수록 하중재하부분 아래에서 보다 균등하게 발생한다.

다. 또한 하중재하부분을 벗어난 영역에서는 B/H 값이 커질수록 하중재하 모서리부분으로부터 짧은 거리에서 변위가 0에 수렴한다.

4. 결론

평면 변형을 상태에 있는 탄성지반의 해를 변분법을 적용하여 유도하여 보았다. 변분법 적용시 종방향 변위분포 함수는 선형함수를 고려하였다. 탄성지반상에 작용하는 하중조건은 집중하중과 분포하중을 고려하였는데 집중하중 작용시 탄성지반의 종방향 변위분포양상은 하중 작용점에서 멀어질수록 변위가 급격하게 감소하는 양상을 나타내었다. 등분포하중 작용시 지표면 변위는 압축층 두께에 대한 재하폭의 반의 비(B/H)값이 클수록 하중재하부분 아래에서 보다 균등하게 발생하였다. 또한 하중재하부분을 벗어난 영역에서는 B/H 값이 커질수록 하중재하 모서리부분으로부터 짧은 거리에서 변위가 0에 수렴하였다.

References

- [1] Scott, R. F., Foundation analysis, Prentice-Hall Inc., pp. 88-104, 1981.
- [2] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of elasticity, McGraw-Hill Book Company, pp. 97-104, 1987.
- [3] Vlasov, V. Z. and Leontiev, N. N., Beams, plates and shells on elastic foundations, Israel Program for Scientific Translation, pp. 1-22, 1966.
- [4] Winkler, E., Theory of Elasticity and Strength, Prague: H. Dominicus, 1867.

이 승 현(Seung-Hyun Lee)

[정회원]



- 1988년 8월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1997년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2000년 3월 ~ 현재 : 선문대학교 토목공학과 부교수

<관심분야>
토질역학, 기초공학

한 진 태(Jin-Tae Han)

[정회원]



- 1999년 2월 : 서울대학교 토목공학과 (공학사)
- 2001년 2월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학석사)
- 2006년 8월 : 서울대학교 지구환경시스템공학부 (공학박사)
- 2010년 10월 ~ 현재 : 서울대학교 건설환경공학부 BK계약교수

<관심분야>
지반내진공학, 기초공학