한국초등수학교육학회지 14(2) 401-420. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(2) 401-420.

공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 문제해결력과 수학적 태도에 미치는 효과

신근미[1)] · 신항균[2)]

본 연구는 공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 문제해결력과 수학적 태도에 미치는 효과를 알아보는데 목적이 있다. 이러한 연구 목적을 규명하기 위하여 서울특별시 소재의 초등학교 6학년 2개 반을 연구대상으로 선정하여 실험집단에는 공간추론활동을 통한 기하학습을, 비교집단에는 일반적인 기하학습을 실시하였다. 학습내용은 6학년 1, 2학기 단원에서 선정하였으며 이를 바탕으로 실험집단과 비교집단에 적용할 지도안, 활동지를 작성하여 4주 동안 11차시를 적용하였다. 그 결과, 공간추론활동을 통한 기하학습을 한 실험집단과 일반적인 기하학습을 한 비교집단의 사후 수학적 문제해결력에서 통계적으로 유의미한 차이가 존재하였다. 수학적 태도에서는 유의미한 차이는 보이지 않았지만 실험 집단 내에서는 실험 전에 비하여 실험 처치 후에 수학적 태도가 유의미하게 향상되었음을 알 수 있었다. 이와 같은 결과로부터, 공간추론활동을 통한 기하학습은 학생들의 분석력, 공간감각능력, 논리력을 향상시켜 이를 종합적으로 발휘해야 해결할 수 있는 수학적 문제해결력을 신장시키고 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

[주제어] 공간추론활동, 기하학습, 수학적 문제해결력, 수학적 태도

Ⅰ. 서 론

우리는 3차원 공간 속에서 사물의 형태를 시각적으로 인식하며 살아간다. 어린이가 자고 일어나 눈을 뜨면 공간에 놓여 있는 물체들을 인지하고 공간적 위치를 지각한다. 우리가 얻는 정보의 대부분이 시신경체계를 통하여 들어오고, 태어날 때부터 보고, 듣고, 만지는 움직임을 통해 공간적인 경험을 하며 공간에 대한 많은 직관적인 생각을 갖게 된다. 이러한 공간 속에서 여러 사물들 간의 관계를 파악하고 원활한 활동을 하기 위해서는 공간에 대한 직관력이 필요하고 이러한 직관력을 바탕으로 시각화하고 분석하며 체계적으로 추론하는 기하적 사고 또한 중요하다(Baroody & Coslick, 1998). 여러 수학자들이 수학적으로 사고할 때보다 공간적으로 사고할 때 가장 창조적인 작업이 일어나고, 공간 추론을 통하여 얻은 통찰력을 수나 기호적 표현으로 바꾼다고 주장하였다(Riedesel, C. A. 외, 1996). 공간적 추론은 기하학과 다른 수학 분야에서 문제해결을 위한 도구를 다양하게 제공하고, 학생들에게 그들이 교실 안팎에서 공부하였던 기하학적 구조에 대해 더 나은 감각을 제공한다(박선화, 2003).

---

1) [제1저자] 서울 난우초등학교
2) [교신저자] 서울교육대학교 수학교육과

이러한 공간 추론의 중요성은 기하 교육의 중요성과도 일맥상통한다. 시각적으로 보고 경험하는 사물들은 기하 모양으로 구성되어 있기 때문에 학생들은 기하에 대한 풍부한 비형식적 지식을 가지고 있으며 기하영역에 대해 흥미를 갖고 접근하기 쉬우므로 기하영역의 중요성이 더 강조된다. 기하 영역이 중요한 또 다른 이유는 이 영역이 초등학교 수학의 다른 영역과 구분되지만 다른 영역을 이해하는 열쇠가 되기 때문이다. 기하적 아이디어는 수의 다른 영역과 일상생활에서 문제를 해결하고 표상하는데 유용하다(Freudental, 1973; NCTM, 2000).

그러므로 다양하고 체계적인 공간 추론 활동을 통하여 기하영역을 학습하는 것은 학생들의 수학적 사고력과 수학적 태도를 향상시키는 데에 중요한 역할을 할 것으로 생각된다. 따라서 본 연구에서는 공간 추론 활동 중심 교수 · 학습 모형을 구안하여 실질적인 수업에 적용시킬 수 있도록 하고 공간 추론 활동을 통한 기하학습을 실행하여 학생들의 수학적 문제 해결력과 수학적 태도에 미치는 효과를 분석함으로써 수학적 문제해결력을 신장시키고 수학적 태도를 긍정적으로 향상시키는 교수·학습 방안을 모색하고자 하는데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Van Hiele(1986)의 기하학적 사고 수준 이론

Van Hiele의 기하학적 사고 수준은 Pierre van Hiele와 Diana van Hiele이 교사로 재직할 때, 학생들이 기하학습에 곤란을 겪는 것을 관찰하고 그 원인을 분석하면서 학생들의 기하적 사고 수준을 1수준에서 5수준까지 나누고 각 수준에서의 특징을 다음과 같이 설명하였다.

· 1수준(시각화) : 이 수준의 학생들은 일반적인 외형을 보고 도형을 인식하여 도형의 성질에는 주목하지 못한다. '이 도형이 왜 직사각형인가요?'라는 질문에 대해 '이유는 없다', '직사각형처럼 보이기 때문에 직사각형이라고 대답한다'(van Hiele 1986, p. 83). 즉 이 수준의 학생들은 '네 각이 모두 직각이기 때문이다'라는 직사각형의 성질과 관련하여 사고하지 못하는 것이다.

· 2수준(분석) : 이 수준의 학생들은 도형의 성질 또는 속성을 분석할 수 있다. 속성은 특별한 예가 가지고 있는 특징이지만 그 개념의 모든 예가 그 특징을 가지고 있는 것은 아니다. 예를 들어 학생들은 직사각형을 긴 변 2개와 짧은 변 2개인 4개의 변으로 이루어져 있는 도형이라고 말할 수도 있다. 4개의 변이라는 것은 모든 직사각형의 특징이지만 긴 변 2개와 짧은 변 2개인 도형이 직사각형이라면 정사각형은 직사각형이 아니라고 잘못 생각할 수 있다. 즉 이 수준의 학생들은 분석 능력을 통해 도형의 속성들을 잘 찾아내지만 이것들이 어떻게 관련되는지는 알지 못한다.

· 3수준(비형식적 추론) : 이 수준의 학생들은 관계를 고려한다. 도형의 핵심적인 속성들(그 개념의 모든 예가 포함하는 특징들)을 발견하고 이를 토대로 두 개의 개념 사이의 관계를 추론하게 된다. 예를 들어 정사각형, 직사각형의 핵심적인 속성들을 인식하면, 정사각형도 직사각형의 속성을 모두 가지고 있으므로 정사각형이 직사각형도 된다는 추론을 할 수 있다.

· 4수준(형식적 추론) : 이 수준의 학생들은 연역적 추론을 이해하며 형식적 증명을 구

성할 수 있다. 즉 한 명제에서 다른 명제로 연역해 나가기 위해 명제들을 엮을 수 있으며 어떤 명제가 참인지를 증명할 수 있다.

· 5수준(엄밀성) : 가장 엄밀한 사고 수준으로 다양한 전제를 사용하여 다양한 기하학을 개발할 수 있다. 비유클리드 기하와 같은 다양한 공리 체계에서 공부할 수 있고 서로 다른 체계들을 비교할 수 있으며 기하를 추상으로 여긴다.

초등학교 학생들은 Van Hieles의 기하적 사고 수준 중에서 1-3수준에 해당한다(Baroody & Coslick, 1998). 그리고 중학교 기하 단원에서 다루어지고 있는 증명들은 4-5수준에의 사고가 필요하다(나귀수, 1998). 기하적 사고는 단계를 거쳐 발달하므로 시각화 단계의 학생들은 형식적인 증명을 이해할 수 없다. 이와 같이 Van Hiele의 이론은 기하를 지도할 때 학생들의 사고 수준을 고려하여 지도해야 한다는 중요한 시사점을 제공하며, 높은 수준으로의 기하적 사고의 발달을 꾀하기 위해서 학생들의 구체적인 공간추론능력을 살펴볼 필요가 있다.

2. 공간추론능력

공간추론은 공간 과제를 해결하기 위하여 기하적 아이디어를 추측하고 추측된 아이디어를 탐구하며 논리적으로 추측을 평가하는 과정이다. 즉 공간 대상, 관계, 변환을 위한 정신적 표현이 구성되고 조작되는 일련의 인지과정이라 할 수 있다(Clements, 1998). 그러므로 공간추론능력은 공간 과제를 해결하기 위한 사고 과정과 관련이 깊다. 학생들이 변환, 회전, 방향, 위치 등과 같은 공간 과제를 해결하려면 그 동안 쌓아온 모양에 대한 직관적인 경험과 함께 기하적인 물체를 분석하고, 변형하고, 비교하고, 시각화하고, 측정하고, 관계를 조사함으로써 공간적 추측을 작성하고 논리적으로 정당화하는 공간추론능력이 필요하다.

도형과 관련하여, "만약, ~을 한다면, 무슨 일이 일어날까?(What would happen if ~)"와 같은 질문으로 시작되는 문제에 답을 하려고 노력하는 과정은 논리(logic)와 시각화(visualization)의 조합을 요구한다(Kutz, 1991; 김유경, 2007 재인용). 논리는 답을 확신시킬 때 사용되고 시각화는 답을 맞는 것으로 보이게 할 때 필요한 것이다.

예를 들면 [그림 1]에서 보듯이 직사각형을 접고 모서리를 잘랐을 때 펼친 모양이 어떻게 될지를 추측해 보고 추측한 기하적 아이디어에 대해 주의깊게 생각하고 탐구하는 과정이 공간 추론이다. 실제 펼쳤을 때 모양을 직접 구현해 보거나 머릿속으로 그려낼 수 있는 능력이 시각화와 관련되며 사고과정에서 이루어지는 공간추론활동은 공간 시각화 능력을 향상시킬 수 있다. 공간추론능력은 공간 시각화와 관련된 문제뿐만 아니라 공간 방향화와 관련된 문제에서도 활용되는데 대상의 부분을 종합하여 전체를 재조직하거나 관찰자가 다양한 방향과 위치에서 대상을 바라볼 때 그들 사이 관계를 인식하게 하는데도 이용된다.

[그림 1] 공간 추론 능력의 예

공간 추론 능력의 중요한 요소 중 하나가 공간 구조화이다. 공간 구조화는 대상을 파악하기 위하여 조직이나 모양을 구성하는 정신적 조작으로 정의한다. 특히 대상을 구성하는 것은 공간적 구성요소를 확인하고, 구성요소를 공간의 합성으로 연결하고, 구성요소와 합성 사이의 관계를 세우는 것을 통해 대상의 본질이나 형태를 결정한다. 구조화는 우리가

마음으로 선택하고, 조정하고, 통합하고, 정신 항목이나 관심 분야에서 나타나는 행동의 조합을 기억 장치에 저장하는 추상의 한 형태이다. 항목이나 행동의 추론에는 여러 가지 수준이 있다. Steffe & Cobb(1988)와 von Glasersfeld(1995)는 항목이나 행동을 실험적 흐름에서 분리 (b) 행동이나 항목의 자기화 - 기억 장치에 저장하여 실물이 없을 때 다시 떠올리거나 "재생" (c) 항목이나 행동의 내면화 - 항목이나 행동 원래의 감각의 내용의 항목을 자기화한 것을 정리하여 기발한 상황에서도 활동하도록 할 수 있다고 보았다(Battista & Clements, 1998). 반성적 추상의 한 형태로서, 구조화는 항목을 내용으로 추상화나 구조화 전에 일어나고, 그것을 새로운 구조를 만들기 위해 통합하며, 추상이나 구조화의 더 많은 행동에서 스스로 내용을 받아들인다(von Glasersfeld, 1995). 구조화는 견고한 패턴으로 결합되고 특별한 감각의 입력이 아닌 개인이 감각 경험의 작은 부분을 연결하는데 사용하는 정신적 행동이다. 실제로 Piaget와 Inhelder(1967)은 모양의 추상이 사물을 관련시키는 활발한 과정에 의지하고, 따라서 그것은 추상이 아동 자신의 행동에 기초하고 그들의 단계적인 공동작용을 통해 일어난다고 하였다.

일반적으로 학생들은 물리적인 대상을 감각적으로 인식하고, 만지고 접촉함으로써 대상에 대한 지식을 얻게 된다. 이러한 지식의 축적은 물리적 대상의 유무에 관계없이 대상을 내적으로 표상하고 외적으로 표현하는 지적 능력을 획득하도록 한다(Clements & Battista, 1992). 이렇게 심상 기하적인 관점에서 살펴보았을 때, 공간 추론은 '참조물→심상→표현'의 순으로 진행된다(한기완, 2002).

이와 같이 공간 추론은 정신적 과정이지만 체계적으로 대상에 접근하고 분석 · 종합하며 추측에 대해 논리적으로 정당화하는 등의 구체적인 활동을 포함한다. 또한 다양한 공간 추론의 경험은 공간추론능력을 향상시키며 궁극적으로 물리적 대상 없이 공간에 대한 사고만으로 심상에 의해서 대상에 대한 외적 표현이 가능하도록 한다. 그러므로 본 연구에서는 학생들이 이러한 공간 추론을 다양하게 경험할 수 있도록 공간추론활동을 구체적으로 구안하고 수업에 적용하여 학생들의 수학적 사고력을 신장시키고자 한다.

3. 3차원과 관련된 공간추론활동

많은 공간추론활동 중에서 3차원과 관련된 공간추론활동으로 De Moor(1990)는 분석과 종합, 연역적 추론, 시각화방법의 개발과 적용, 체계적 접근, 변환의 인식과 사용을 제시한다. 본 연구에서는 De Moor(1990)가 초등학교 수준의 3차원 공간 과제를 해결할 때 사용되는 인지 능력으로 제시한 내용을 바탕으로 공간추론활동을 분석과 종합, 연역적 추론, 시각화 방법의 개발과 적용, 체계적 접근, 변환의 인식과 사용으로 규정한다.

가. 분석과 종합

분석과 종합은 문제를 해결하기 위하여 그 하위 요소별로 풀이 방법을 발견하여 그 방법을 통합적으로 실행하는 과정으로 분석적 사고 활동을 통하여 단서를 찾고 종합하는 과정을 통하여 확인하며 이를 반복하여 문제를 해결하는 상호 보완적 추론 능력이다. 예를 들어, 위, 앞, 옆에서 본 모양을 알고 이를 결합해서 쌓기나무를 구성하는 것과 그 역에 관련된 활동이다. 이것은 부분의 모양을 보고 전체 모양을 추측하고, 추측한 모양이 맞는지를 확인하기 위하여 다시 부분으로 나누어 검토하는 과정을 논리적으로 반복하게 된다.

나. 연역적 추론

연역적 추론은 타당한 추론 패턴을 이용하여 전제로부터 참일 결론을 이끌어내는 추론을 말한다. 3차원 공간에서 입체물의 모습이 오른쪽에서 본 모양인지, 왼쪽에서 본 모양인지를 추측하고 직접 시행해 보거나 기존의 공간 시각화 능력과 공간 방향화 능력을 활용하여 논리적으로 증명하는 과정은 연역적 추론과 관련된다. 이는 'if- then'의 논리를 사용하고 있는 것으로 '왼쪽일 것이다' 또는 '오른쪽일 것이다' 등으로 가설을 세우고 가설들을 반박하거나 입증해 보이는 과정을 포함하고 있으며 기존에 알고 있는 참인 전제들로부터 연역적 연결을 통해 결과를 도출해내기 때문이다.

다. 시각화 방법의 개발과 적용

쌓기나무로 쌓은 모양이나 3차원 물체들을 시각적으로 표현하기 위해서 전개도, 겨냥도를 그리거나 위, 앞, 옆에서 본 모양으로 나타내는 것, 위에서 본 모양에 층수를 적는 것 등은 시각화 방법의 개발에 해당한다. 이들 각각의 시각화 방법은 장단점을 가지고 있는데 입체의 전체적인 모양을 알려고 할 때는 겨냥도, 전체적인 모습은 알 수 없지만 겨냥도에서 보이지 않는 부분을 나타내려 할 때는 전개도가 필요하다. 이렇듯 목적에 따라 입체를 표현하는 방법이 달라진다. 그러므로 상황에 따라 시각화 방법을 다르게 할 필요성이 있으며 이와 관련하여 추측하고 탐구하는 추론 활동이 시각화 방법의 개발과 적용이다. 이는 공간 시각화 능력과 밀접하게 연관되어 있는 추론 활동이다.

라. 체계적 접근

체계적 접근은 문제를 해결하기 위해 단계적으로 문제에 접근하는 것으로 각각의 경우에 따른 방법을 구하거나 문제의 조건을 하나씩 검토하면서 접근하는 추론 활동이다. 예를 들면 위, 옆에서 본 모양을 보고 쌓기 나무의 개수가 최대 또는 최소가 되도록 하는 경우를 알아보거나 일정한 수의 쌓기 나무로 쌓을 수 있는 모든 경우를 구하는 방법은 쌓은 모양이 1층인 경우, 2층인 경우 등으로 단계적으로 사고하는 과정이 필요하다.

마. 변환의 인식과 사용

변환의 인식과 사용은 변환을 통해 변화되는 개념과 보존되는 개념을 인식하고 변환을 실제로 사용하는 과정에서 행해지는 추측하고 탐구하는 추론 활동이다. 쌓기 나무로 쌓은 여러 가지 모양이 서로 같은지 다른지를 알아보기 위해 직접 또는 머릿속으로 밀기, 돌리기, 뒤집기를 통하여 쌓기 나무 모양을 비교하는 것이 변환의 인식과 사용에 해당된다고 할 수 있다.

4. 선행 연구 분석

지금까지 공간추론과 문제해결력, 수학적 태도에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔다. 이와 관련된 선행연구를 살펴보면 공간 추론 능력은 수학에서 창의적 사고에 필수적이며, 공간 추론은 기하학과 다른 수학 분야에서 문제 해결을 위한 도구를 많이 제공하고, 학생들에게 그들이 교실 안팎에서 공부했던 기하학적 구조에 대해 더 나은 감각을 제공하므로

(박선화, 2003) 학생들의 사고를 활성화시키는 지도를 통해 다양한 공간추론능력을 신장시킬 필요가 있으며 학생들의 기하적 사고 수준에 맞는 활동을 고려하여 공간추론활동이 정확히 활용되도록 지도할 필요가 있다고 주장하였다(김유경, 2007). 또한, 수학적 문제해결력과 추론 능력은 아동의 정의적 요소와 유의한 상관을 보이므로, 아동의 수학에 대한 정의적 특성을 긍정적으로 향상시킬 필요가 있으며(박경옥, 2003), 수학과 추론 활동은 문제해결력과 자기효능감 신장에 긍정적인 효과를 미친다고 주장하였다(진성범, 2008).

이상의 선행연구에서 살펴보듯이, 기하학습에서 공간 추론의 중요성을 강조하고 공간추론을 지도하여야 한다고 주장하고 있지만 대부분의 연구가 공간추론에 대한 정의나 상관관계에 대한 분석에서 그치고 있으므로 공간추론활동을 기하학습에 적용시키는 방안을 구체적으로 구안하여 공간추론활동을 현장에 적용하였을 때 미치는 효과에 대해 검증해 볼 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 서울특별시 K구에 위치하고 있는 N초등학교 6학년 10개 학급 중에서 수학적 문제해결력 검사와 수학적 태도 검사 실시 후 검사 결과가 통계적으로 동질성이 있는 2개 학급을 선정하였다. 이들 2개 학급 중 한 학급은 공간추론활동을 통한 기하학습을 적용하는 실험집단으로, 다른 한 학급은 일반적인 기하학습을 적용하는 비교집단으로 선정하였으며, 실험집단의 구성은 남학생 15명, 여학생 15명으로 총 30명이며, 비교집단의 구성은 남학생 16명, 여학생 15명으로 총 31명이이다.

2. 연구 설계

공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 문제해결력과 수학적 태도에 미치는 효과를 검증하기 위하여 공간추론활동을 적용한 실험집단과 일반적인 기하학습을 적용한 비교집단에 사전 검사와 사후 검사를 실시하였다.

<표 1> 실험 설계

G1	O1 O2	X1	O3 O4
G2	O1 O2	X2	O3 O4

G1 : 실험집단
G2 : 비교집단
O1 O2 : 사전 검사(수학적 문제해결력 검사, 수학적 태도 검사)
X1 : 공간추론활동을 통한 기하학습
X2 : 일반적인 기하학습
O3 O4 : 사후 검사(수학적 문제해결력 검사, 수학적 태도 검사)

가. 실험 절차

공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 문제해결력과 수학적 태도에 미치는 효과를 알아보기 위하여 공간추론활동 중심 교수·학습 모형과 지도안, 활동지를 개발하였으며 수학적 문제해결력과 수학적 태도 사전 검사를 실시하여 비교 집단을 선정하였다. 실험집단에는 공간추론활동을 통한 기하학습을, 비교 집단에는 일반적인 학습을 11차시 적용한 후 사후 검사를 실시하여 그 결과를 분석하였다. 본 연구의 실험 절차를 요약하여 제시하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 실험 절차

절차	기간
공간추론활동을 통한 기하학습 수업모형 및 지도안, 활동지 개발	2009. 08. 08 ~ 2009. 09. 25
사전 검사 실시	2009. 10. 02
공간추론활동을 통한 기하학습 적용	2009. 10. 05 ~ 2009. 10. 31
사후 검사 실시	2009. 11. 02
가설 검증 및 결과 분석	2009. 11. 03 ~ 2009. 12. 15

나. 검사 도구

본 연구에 사용된 사전·사후 수학적 문제 해결력 검사는 2003년~2008년도에 시행된 국가수준 학업성취도 평가의 문항을 재구성하여 사용하였으며 사전·사후 동형을 사용하였다. 수학적 태도 검사는 한국교육개발원(1992)에서 제작한 검사지를 사용하였으며 사전·사후 동형을 사용하였다.

다. 단원의 선정

초등학교 수학과 교육과정 6학년 1, 2학기 수학 교과서를 분석하고 공간 추론 활동에 적합한 단원으로 1학기 4단원 쌓기나무, 2학기 2단원 입체도형을 선정하였다. 각 단원을 재구성하여 공간 추론 활동 중심 교수·학습 모형을 적용한 지도안을 작성하고 지도안에 알맞은 학습지를 개발하여 10월 5일부터 10월 31일까지 4주 동안 적용하였다. 실험집단과 비교집단의 학습 내용 차시별 계획은 <표 3>과 같다.

<표 3> 학습 내용 차시별 계획

월	주	차시	주제
10	1	체계적 접근 1	위, 앞, 옆에서 본 모양을 보고 입체도형 알아보기
		체계적 접근 2	다양한 모양으로 만들기
		분석과 종합 1	쌓기나무로 만든 입체도형의 위, 앞, 옆에서 본 모양 알아보기

10	2	분석과 종합 2	쌓기나무의 모양을 설명하는 말을 듣고 쌓기나무로 똑같이 쌓아보기
10	2	연역적 추론 1	전개도 보고 겨냥도 찾기
10	2	연역적 추론 2	쌓기나무의 배열 추측하기
10	3	시각화 방법의 개발과 적용 1	원기둥의 전개도 알아보기
10	3	시각화 방법의 개발과 적용 2	입체물의 위, 앞, 옆에서 본 모양 나타내기
10	3	시각화 방법의 개발과 적용 3	쌓기나무의 개수 세기
10	4	변환의 인식과 사용 1	회전체 찾기
10	4	변환의 인식과 사용 2	회전체 단면 알아보기

3. 실험 처치

가. 공간추론활동을 통한 기하학습 과정

교수 · 학습 모형과 관련하여, Van Hiele은 기하에 대한 학생들의 통찰력을 돕기 위해 사고 수준을 다루는 실험과 이론을 발전시켰다. 공간추론활동을 통한 기하학습 집단의 수학적 문제해결력을 신장시키기 위하여 문제해결 단계에서 Van Hiele이 제시한 학습수준 비약을 위한 5단계 교수 학습법 곧, 안내-제한된 탐구-명확화-자유로운 탐구-통합의 단계를 적용하여, 공간추론활동 중심 교수 · 학습 모형을 구안하였다. 공간 추론 활동 중심 교수 · 학습 모형은 [그림 2]와 같다.

문제 제시
⇩
문제 탐색
⇩
공간추론활동
⇩
추론의 형식화
⇩
적용 및 발전

[그림 2] 공간 추론 활동 중심 교수 · 학습 모형

각 단계에서 주요 교수 · 학습 활동 내용은 다음과 같다.

1) 문제 제시: Van Hiele이 제시한 5단계에서 '안내'에 해당하는 단계로 본 차시의 학습 문제를 확인하고 문제 해결 의욕을 상기시킨다.

2) 문제 탐색: 문제에 관한 학생의 선행지식을 파악하고 학생 스스로 문제 해결을 위한 요소를 분석하여 해결 방안을 탐색한다.

3) 공간추론활동: 이 단계는 Van Hiele이 제시한 5단계 중 '제한된 탐구'에 해당하는 단계로 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동 자료를 보며 학생은 자기 나름대로 과제를 탐구한다. 이 단계에서는 공간 추론 활동(분석과 종합, 연역적 추론, 시각화방법의 개발과 적용, 체계적 접근, 변환의 인식과 사용)을 전개하여 원리를 이해하고 탐구하여 문제를 해결한다. 구체적 조작활동을 통해서 뿐만 아니라 구체물을 사용하지 않고 심상을 형성하여 문제를 해결할 수 있도록 한다. 공간추론활동의 내용은 다음과 같다.

가) 분석과 종합

분석과 종합은 문제를 해결하기 위하여 그 하위 요소별로 풀이 방법을 발견하여 그 방법을 통합적으로 실행하는 과정으로 분석적 사고 활동을 통하여 단서를 찾고 종합하는 과정을 통하여 확인하며 이를 반복하여 문제를 해결하는 상호 보완적 추론 능력이다.

예를 들어, 위, 앞, 옆에서 본 모양을 알고 이를 결합해서 입체물을 구성하는 것과 그 역에 관련된 활동이다. 이것은 부분의 모양을 보고 전체 모양을 추측하고, 추측한 모양이 맞는지를 확인하기 위하여 다시 부분으로 나누어 검토하는 과정을 논리적으로 반복하게 된다. 즉, 입체물의 부분들(점, 선, 면, 무늬 등) 중 문제해결에 필요한 부분만을 선택하여 분석하거나 종합을 위하여 분할하여 분석하고 다시 종합하는 과정을 반복한다.

나) 연역적 추론

연역적 추론은 타당한 추론 패턴을 이용하여 전제로부터 참일 결론을 이끌어내는 추론을 말한다. 3차원 공간에서 입체물의 모습이 오른쪽에서 본 모양인지, 왼쪽에서 본 모양인지를 추측하고 직접 시행해 보거나 기존의 공간 시각화 능력과 공간 방향화 능력을 활용하여 논리적으로 증명하는 과정은 연역적 추론과 관련된다. 이는 'if- then'의 논리를 사용하고 있는 것으로 '왼쪽일 것이다' 또는 '오른쪽일 것이다' 등으로 가설을 세우고 가설들을 반박하거나 입증해 보이는 과정을 포함하고 있으며 기존에 알고 있는 참인 전제들로부터 연역적 연결을 통해 결과를 도출해내기 때문이다.

본 연구에서는 가설을 설정하여 성립하지 않는 이유의 설명을 통하여 부정에 의한 증명을 하거나 성립하는 이유를 입증하여 정당화한다. 또는 참인 몇 개의 전제를 엮어서 새로운 결론을 얻어내거나 몇 가지 경우에 나타난 규칙을 유사한 상황에 적용하여 결과를 도출한다.

다) 시각화방법의 개발과 적용

3차원의 물체들을 시각적으로 표현하기 위해서 전개도, 겨냥도를 그리거나 위, 앞, 옆에서 본 모양으로 나타내는 것, 위에서 본 모양에 층수를 적는 것 등은 시각화 방법의 개발에 해당한다. 이들 각각의 시각화 방법은 장단점을 가지고 있는데 입체의 전체적인 모양을 알려고 할 때는 겨냥도, 전체적인 모습은 알 수 없지만 겨냥도에서 보이지 않는 부분을 나타내려 할 때는 전개도가 필요하다. 이렇듯 목적에 따라 입체를 표현하는 방법이 달라진다. 그러므로 상황에 따라 시각화 방법을 다르게 할 필요성이 있으며 이와 관련하여 추측하고 탐구하는 추론 활동이 시각화 방법의 개발과 적용이다. 이는 공간 시각화 능력과 밀접하게 연관되어 있는 추론 활동이다.

문제 해결에 적합한 다양한 시각화 방법(위 모양에 층수 쓰기, 대략적 평면 표현, 입체 표현, 유사한 모양의 실물 등)을 개발하고 적용하거나 문제가 의미하는 바를 시각화하여 나타내거나 경험과 관련한 시각적 이미지를 형상화하여 나타낸다.

라) 체계적 접근

체계적 접근은 문제를 해결하기 위해 단계적으로 문제에 접근하는 것으로 각각의 경우에 따른 방법을 구하거나 문제의 조건을 하나씩 검토하면서 접근하는 추론 활동이다. 예를 들면, 꼭지점을 중심으로 층별로, 부분으로 나누는 등 문제해결의 기준을 설정하고 그 기준에 입각하여 문제에 접근하여 각각의 경우를 차례대로 나열한다. 주어진 자료를 검토하고 여러 가지 조건을 종합하는 과정을 순서를 정하여 엄밀하게 정리한다.

마) 변환의 인식과 사용

변환의 인식과 사용은 변환을 통해 변화되는 개념과 보존되는 개념을 인식하고 변환을 실제로 사용하는 과정에서 행해지는 추측하고 탐구하는 추론 활동이다.

기존의 경험(밀기, 돌리기, 뒤집기 등)으로부터 얻은 변화되는 개념과 보존되는 개념을 인식하고, 대상물이나 관찰자의 방향, 각도의 변화에 따른 변환을 보조적인 수단으로 그림을 그리거나 심상을 형성하여 문제를 해결한다. 예를 들어, 쌓기나무로 쌓은 여러 가지 모양이 서로 같은지 다른지를 알아보기 위해 직접 또는 머릿속으로 밀기, 돌리기, 뒤집기를 통하여 쌓기나무 모양을 비교하는 것이 변환의 인식과 사용에 해당된다고 할 수 있다.

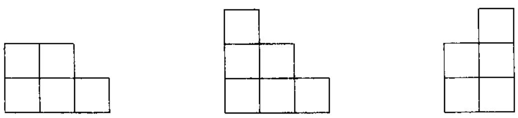
4) 추론의 형식화: Van Hiele이 제시한 5단계 중 '명확화'에 해당하는 단계로 이 단계에서는 공간추론활동을 통하여 발견한 사실을 적절한 언어나 그림 등을 통하여 표현하고 다른 사람의 의견을 들으면서 수학적 원리나 사실을 명료화한다.

5) 적용 및 발전: Van Hiele이 제시한 '자유로운 탐구'와 '통합'의 단계로 자신이 경험한 추론과정을 적용하여 새로운 문제를 해결하고, 학생 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미한다.

나. 공간추론활동을 통한 기하학습 교수·학습 과정안 작성

공간추론활동을 통한 기하학습 집단은 공간 추론 활동 중심 교수 · 학습 모형을 바탕으로 하여 교수 · 학습 과정안을 작성하여 수업을 전개하도록 한다. 실험집단에 적용한 교수 · 학습 과정안의 예는 <표 4>와 같다.

<표 4> 공간추론활동을 통한 기하학습 교수 · 학습 과정안의 예

차시		체계적 접근 1
주제		위, 앞, 옆에서 본 모양을 보고 입체도형 알아보기
학습목표		위, 앞, 옆에서 본 모양을 보고 입체도형을 알 수 있다.
학습 단계	문제 제시	위, 앞, 옆에서 본 모양이 다음 그림과 같을 때 완성된 입체도형에 대하여 알아보자.
	문제 탐색	 위 앞 옆(오른쪽) 주어진 그림을 보고 문제의 해결 방법에 대하여 생각해 본다.

	공간 추론 활동 (체계적 접근)	1. 위에서 본 모양을 관찰한다. 2. 1층만 머릿속으로 쌓아본다. 3. 몇 개의 쌓기나무가 필요한지 알아본다. 4. 앞에서 본 모양을 보면서 2층을 머릿속으로 쌓아본다. 5. 앞에서 본 모양을 바탕으로 옆에서 본 모양을 보면서 2층의 모양을 수정한다. 6. 2층을 바탕으로 앞에서 본 모양을 보면서 3층을 머릿속으로 쌓아본다. 7. 앞에서 본 모양을 바탕으로 옆에서 본 모양을 보면서 3층의 모양을 수정한다. 8. 완성된 모양을 머릿속에 그려본다. 9. 모두 몇 개의 쌓기나무가 필요한지 결정한다. 10. 자신이 생각한 입체도형을 학습지에 그린다.
	추론의 형식화	1. 자신이 그린 입체도형과 입체도형을 완성하는데 필요한 쌓기나무의 개수에 대하여 모둠원끼리 해결한 방법대로 설명하고 논의한다. 2. 주어진 그림을 보고 직접 쌓은 입체도형과 그린 입체도형의 모양을 비교한다. 3. 실제로 쌓은 입체도형과 그린 입체도형의 전체 개수를 확인한다. 4. 수정할 부분은 수정·보완하여 완성한다.
	적용 및 발전	체계적으로 순서를 정하여 접근하면서 학습지의 문제를 해결한다.
유의점		자신만의 체계적인 순서를 정하여 접근하도록 한다. 보이는 부분만으로 해결할 수 있는 문제가 아니라 보이지 않는 부분에 대한 추론이 필요한 문제들을 제시함으로써 공간추론의 기회를 더 많이 경험하도록 한다.

다. 일반적 기하학습 과정

일반적 기하학습 집단은 문제 파악, 해결방안 탐색 및 문제해결, 적용 발전의 단계를 통하여 수학 교과서에 제시된 내용과 순서들을 재구성하여 교사가 설명하고 학습자는 그것을 토대로 문제를 해결하도록 한다.

라. 사후 수학적 문제해결력 및 수학적 태도 검사 실시

공간추론활동을 통한 기하학습을 적용한 후인 2009년 11월 2일에 수학적 문제해결력 검사와 수학적 태도 검사를 실시하였다.

Ⅳ. 분석 결과 및 논의

1. 결과 분석

가. 사전 검사 결과

1) 사전 수학적 문제해결력 검사 결과

두 집단의 수학적 문제해결력 동질성 여부를 확인하기 위하여 사전 검사를 t-검정한 결과는 <표 5>와 같다. <표 5>에서 보는 바와 같이 수학적 문제해결력에 있어서 실험집단의 평균은 4.90이고 비교집단의 평균은 4.65이다. 이러한 결과는 $p<.05$ 수준에서 통계적으로 유의한 차이가 없는 것으로 나타나 동질집단이라고 할 수 있다.

<표 5> 사전 수학적 문제해결력 검사 결과에 대한 t-검정

집단	M	N	SD	t	p
실험집단	4.90	30	2.35	.416	.601
비교집단	4.65	31	2.43		

유의수준 $p<.05$

2) 사전 수학적 태도 검사 결과

두 집단의 수학적 태도 동질성 여부를 확인하기 위하여 사전 검사를 t-검정한 결과는 <표 6>과 같다. <표 6>에서 보는 바와 같이 수학적 태도에 있어서 실험집단의 평균은 2.96이고 비교집단의 평균은 3.20이다. 이러한 결과는 통계적으로 $p<.05$ 수준에서 유의한 차이가 없는 것으로 나타나 동질집단이라고 할 수 있다.

<표 6> 사전 수학적 태도 검사 결과에 대한 t-검정

집단	M	N	SD	t	p
실험집단	2.96	30	0.59	-1.599	.960
비교집단	3.20	31	0.61		

유의수준 $p<.05$

나. 사후 검사 결과

1) 사후 수학적 문제해결력

<가설 1>

이 연구에서 설정된 가설은 '공간추론활동을 통한 기하학습을 실시한 실험집단과 일반적인 기하학습을 실시한 비교집단 간에는 수학적 문제해결력 신장에 있어서 유의한 차이가 있을 것이다'였다. <가설 1>을 검증하기 위하여 수학적 문제해결력에 대한 사후 검사의 결과를 t-검정하였다.

공간추론활동을 통한 기하학습 집단과 전통적인 기하학습 집단 사이의 수학적 문제해결력에 있어서 유의미한 차이가 있는지 검증하기 위하여 사후 검사를 t-검정하였다. 그 결과, <표 7>에서 알 수 있는 바와 같이 사후 수학적 문제해결력 검사에 있어서 유의도 $p=.040(p<.05)$로 공간추론활동을 통한 기하학습 집단과 전통적인 기하학습 집단 사이에는 통계적으로 의미있는 차이가 있는 것으로 나타났다. 또한, 평균 점수에 있어서도 실험집단의 평균 점수는 6.9이고, 비교집단의 평균 점수는 4.9로 실험집단의 평균 점수가 비교집단에 비하여 훨씬 높게 나타난 것으로 보아 공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 문제해결

력을 신장시키는데 효과적임을 알 수 있다.

<표 7> 사후 수학적 문제해결력 검사 결과에 대한 t-검정

집단	M	N	SD	t	p
실험집단	6.9	30	1.494	3.948	.040
비교집단	4.9	31	2.371		

유의수준 $p<.05$

2) 사후 수학적 태도 검사 결과

<가설 2>

이 연구에서 설정된 가설은 '공간추론활동을 통한 기하학습을 실시한 실험집단과 일반적인 기하학습을 실시한 비교집단 간에는 수학적 태도의 향상에 있어서 유의한 차이가 있을 것이다'였다. <가설 2>를 검증하기 위하여 수학적 태도에 대한 사후 검사를 t-검정하였다.

공간추론활동을 통한 기하학습 집단과 전통적인 기하학습 집단 사이에 수학적 태도에 있어서 유의미한 차이가 있는지 검증하기 위하여 사후 검사를 t-검정하였으며, 그 결과는 <표 8>과 같다. 실험집단의 수학적 태도 검사의 평균은 3.20이고 비교집단의 수학적 태도 검사의 평균은 3.04로 실험집단의 평균은 비교집단의 평균보다 높은 것으로 나타났으나 유의도 $p=.766(p<.05)$로 실험집단과 비교집단 사이에는 통계적으로 유의한 차이가 없는 것으로 나타났다.

그러나 실험집단의 사후 수학적 태도 검사의 평균은 사전 수학적 태도 검사의 평균에 비하여 높아졌으나, 비교집단의 사후 수학적 태도 검사의 평균은 사전 검사에 비하여 낮아진 것을 확인할 수 있다. 이는 공간추론활동을 통한 기하학습이 수학적 태도를 향상시키는데 긍정적인 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

<표 8> 사후 수학적 태도 검사 결과에 대한 t-검정

집단	M	N	SD	t	p
실험집단	3.20	30	.42745	1.376	.766
비교집단	3.04	31	.50484		

유의수준 $p<.05$

2. 논의

본 연구는 초등학교 6학년을 대상으로 공간추론활동을 통한 기하학습과 일반적인 기하학습이 학습자의 수학적 문제해결력과 수학적 태도에 미치는 영향을 비교·분석하는데 그 목적이 있다. 본 연구에서 나타난 결과를 중심으로 다음과 같이 논의해 본다.

첫째, <표 7>에서 제시된 바와 같이 공간추론활동을 통한 기하학습 집단과 일반적인 기하학습 집단 사이에는 수학적 문제해결력에 있어서 유의수준 $p<.05$에서 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이는 공간추론활동을 통하여 기하영역을 학습하면서 학생들은 문제

를 해결하기 위하여 기하적 아이디어를 추측하고 추측된 아이디어를 탐구하며 논리적으로 추측을 평가하는 과정을 거친다. 즉 학생들이 변환, 회전, 방향, 위치 등과 같은 공간 과제를 해결하려면 그 동안 쌓아온 모양에 대한 직관적인 경험과 함께 물체를 분석하고, 변형하고, 비교하고, 시각화하고, 측정하고, 관계를 조사함으로써 공간적 추측을 탐구하고 논리적으로 정당화하는 과정을 거치는 것으로 보인다. 이러한 과정을 통하여 구체적인 조작활동은 서서히 줄이고, 머릿속에 심상을 형성하여 구체화된 시각적인 사고로 도형과 공간에 대한 다양한 실마리를 찾아내어 위치적 관계나 모양의 변화를 이해한 것으로 보여 진다. 또한 시각적인 표현에 대한 자신의 생각을 문장으로 표현하거나 의견을 교환, 수정, 보완하는 의사소통의 기회를 제공함으로써 자신의 생각을 더욱 명료화하고 좀더 심화시킬 수 있었으며, 그로 인해 수학적 문제해결력이 향상되었다고 보여 진다. 이는 공간적 추론이 기하학과 다른 수학 분야에서 문제해결을 위한 도구를 다양하게 제공하고, 학생들에게 그들이 교실 안팎에서 공부하였던 기하학적 구조에 대해 더 나은 감각을 제공한다는 박선화(2003)의 주장과도 일치한다. 이러한 결과는 공간추론활동을 통한 기하학습이 도형 영역에서 수학적 문제해결력을 기르는데 효과적인 교수 · 학습 방법임을 시사하고 있다.

둘째, <표 8>에서 제시된 바와 같이 공간추론활동을 통한 기하학습을 한 실험집단은 비교집단에 비하여 수학적 태도가 향상되었으나 유의미한 차이는 보이지 않았다. 이는 교과에 대한 태도를 비교하기에는 연구 기간이 짧은 것에 기인한 것으로 보인다. 실험집단 내에서는 공간추론활동을 통한 기하학습이 진행되면서, 학생들은 수학이 단편적 지식의 습득이나 단순한 문제 풀이의 기능을 숙달하는 교과가 아니라 스스로 문제를 인식하고 가설을 세우고 반박하거나 입증하는 공간추론활동을 통하여 문제를 해결하고, 활발한 의사소통을 통하여 자신의 생각을 표현하고 명료화하여 발전시키는 교과라는 생각으로 점차 변화됨으로써 수학에 대한 긍정적인 태도가 형성되어 수학적 태도가 향상되었으나 연구 기간이 짧아 유의미한 결과를 가져오지 못하였다.

그러나 실험 집단 내에서는 실험 전에 비하여 실험 후에 수학적 태도가 유의미하게 긍정적인 방향으로 변화하였으므로 좀더 오랜 기간 공간추론활동을 통한 기하학습을 적용시킨다면 수학적 태도를 향상시키는데 효과적일 것으로 보여 진다. 이는 문제를 제시할 때에 단순한 도형 뿐만 아니라 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 사물을 제시하여 활동하게 함으로써 수학을 더욱 친숙하게 느낄 수 있도록 하였으며, 반복적인 단순한 조작활동이 아니라 스스로 생각하는 시간을 충분히 주어 수학에 대한 부담감을 줄이도록 하였다. 또한, 학습자간의 상호 보완적인 의사소통을 통하여 서로의 사고를 자극하고 공유하도록 하는 등 능동적인 학습이 이루어지도록 하였으며, 학생의 수준에 알맞은 문제를 제시하여 학생들이 수학에 대한 성공 경험을 많이 할 수 있도록 함으로써 수학적 태도를 긍정적으로 변화시킬 수 있었던 것으로 보여 진다.

V. 결 론

본 연구의 결과 및 논의로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 공간추론활동을 통한 기하학습은 학생들의 분석력, 공간감각능력, 논리력을 향상시켜 이를 종합적으로 발휘해야 해결할 수 있는 수학적 문제해결력 신장에 있어서 효과적이다. 이는 공간추론활동(분석과 종합, 연역적 추론, 시각화방법의 개발과 적용, 체계적 접

근, 변환의 인식과 사용)을 통한 기하학습을 함으로써, 학생들은 문제에 주어진 조건들과 조건들 간의 관계를 분석하고 공간적 추측을 탐구하여 자신의 아이디어를 논리적으로 표현하고 시각화함으로써 문제에 대한 해결방안을 명확히 하고 공간에 대한 감각을 키울 수 있다. 또한, 학생들 간에 서로의 아이디어를 주고받음으로써 문제를 해결하기 위한 추론 방법을 동료들에게 설명하는 과정을 통하여 그 내용을 더 잘 이해할 수 있게 되며 역으로 학습하는 효과도 얻을 수 있게 되어 그 과정을 통해 문제 해결 능력이 향상되었다고 할 수 있다.

둘째, 공간추론활동을 통한 기하학습은 문제해결에 대한 자신감과 수학에 대한 흥미를 향상시켜 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미친다. 공간추론활동을 통한 기하학습을 한 실험집단과 일반적인 기하학습을 한 비교집단 사이의 수학적 태도 검사 결과 유의한 차이를 보이지 않았지만, 실험 집단 내에서는 실험 전에 비하여 실험 처치 후에 수학적 태도가 유의미하게 긍정적인 방향으로 변화하였으므로 좀더 오랜 기간 공간추론활동을 통한 기하학습을 적용시킨다면 수학적 태도를 향상시키는데 효과적일 것으로 보여진다. 이는 공간추론활동을 통하여 문제를 해결하는 과정에서 학생의 능력에 알맞은 도전적인 상황을 다루고 어려움을 극복하여 성공하는 경험 횟수가 증가하면서 수학에 대한 불안 요인이 감소하게 되며 문제 해결에 있어서 자신감을 가지게 된다. 그리고 문제를 제시할 때에 단순히 정형화된 도형 뿐만 아니라 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 사물을 다양하게 제시하고 확산적 사고를 북돋우는 문제를 제시하여 활동하게 함으로써 수학을 더욱 친숙하게 느낄 수 있도록 하였으며, 수학이 단편적 지식의 습득이나 단순한 문제 풀이의 기능을 숙달하는 교과라는 인식에서 벗어나게 하였다. 또한, 반복적인 단순 조작활동이 아니라 공간적 추측을 통하여 논리적으로 생각하는 활동을 제공하여 도형과 공간에 대한 다양한 실마리를 찾아내고 머릿속으로 심상을 형성하여 시각적으로 표현하는 활동을 충분히 하도록 하여 수학에 대한 부담감을 덜어주어 수학에 대한 생각이 긍정적으로 변화되었다고 할 수 있다.

셋째, 공간추론활동을 통하여 기하영역을 학습하는 과정에서 수학적 문제해결력과 수학적 태도는 분리된 개념이 아니라 종합적이며 상호보완적 개념으로 작용하게 된다. 즉, 수학적 문제해결력의 향상으로 인하여 수학적 태도 또한 양호해지고 이러한 효과는 역으로도 다시 작용하게 되어 계속적으로 상호 영향을 주게 된다. 그러므로 긍정적인 방향에서의 상호 작용은 공간추론활동을 통한 기하학습에서 수학적 문제해결력과 수학적 태도 두 영역에 동반 상승 효과를 가져오게 되므로 학생 개개인의 수학적 힘을 신장시킨다고 할 수 있다.

결론적으로 수학적 문제해결력과 수학적 태도의 신장에 공간추론활동을 통한 기하학습이 긍정적인 영향을 끼친다는 것을 본 연구를 통해서 입증할 수 있었다. 따라서 교사는 공간추론활동과 같이 학생이 흥미를 보일 수 있는 활동을 학생이 성공할 수 있는 수준에 맞추어 제시함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 향상시키고, 학생이 자신의 문제 해결 과정을 인식하고 스스로 탐구하여 해결할 수 있도록 용기를 북돋우며 사고를 자극하여 수학적 문제해결력을 신장시키도록 하여야겠다.

참 고 문 헌

김유경 (2007). **초등학교 6학년 학생들의 공간감각과 공간추론능력 실태조사 - 3차원을 중심으로.** 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

나귀수 (1998). 중학교 기하 증명 지도에 관한 소고-Van Hiele와 Freudenthal의 이론을 중심으로-. **대한수학교육학회 논문집**, 8(1), 291-298.

남승인 · 류성림 (2002). **문제 해결 학습의 원리와 방법.** 서울: 형설출판사.

박경옥 (2003). **수학적 문제해결력 및 추론능력과 관련된 정의적 요소와 그 차이에 관한 분석.** 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박선화 (2003). 기하와 측정. **청람수학교육**, 11, 67-106.

진성범 (2008). **수학과 추론활동이 문제해결력 신장에 미치는 효과.** 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

한기완 (2002). **초등학교 수학에서 공간감각지도에 관한 연구.** 단국대학교 박사학위논문.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). Fostering children's mathematical power; *An investigative approach to k-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 외 11인 공역(2005). 수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게? 서울: 경문사.

Clements, D. H. (1998). Geometry and spatial thinking in young children. *National Science Foundation.* New Delhi: Amerind Pub. Co.

Clements, Douglas H. & Michael T. Battista. (1992). "Geometry and Spatial Reasoning." *In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, edited by Douglas A.* Grouws, pp.420-464. NY: NCTM/Macmillan Publishing Co.

De Moor, E. (1990). Geometry instruction in the Netherlands(ages 4-14): The realistic approach. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 119-138). Culembog: Technipress.

Freudental, H. (1973). *Mathematics as an educational task* Dordercht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Glasersfeld, Ernst von (1995). *Die Wurzeln des 'Radikalen' am Konstruktivismus.* In: H. R. Fischer (ed.), pp. 35-45.

Kutz, R. (1991). *Teaching elementary mathematics: An active approach* New York: Allyn and Bacon.

National Council of Teachers Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* : 류희찬 외 공역 (2007). 학교 수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). *The children's conception of space* NY: W. W. Norton.

Riedesel, C. A. 외 (1996). *Teaching elementary school mathematics.* Needham Heights, MA: A Simon & Schuster Company.

Steffe & Cobb (1988). *Construction of arithmetical meaning and strategies.* NY: Springer-Verlag.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics education Orlando.* Academic press Inc.

<Abstract>

The Effect of Geometry Learning through Spatial Reasoning Activities on Mathematical Problem Solving Ability and Mathematical Attitude

Shin, Keun Mi[3]; & Shin, Hang Kyun[4]

The purpose of this research is to find out effectiveness of geometry learning through spatial reasoning activities on mathematical problem solving ability and mathematical attitude. In order to proof this research problem, the controlled experiment was done on two groups of 6th graders in N elementary school; one group went through the geometry learning style through spatial reasoning activities, and the other group went through the general geometry learning style.

As a result, the experimental group and the comparing group on mathematical problem solving ability have statistically meaningful difference. However, the experimental group and the comparing group have not statistically meaningful difference on mathematical attitude. But the mathematical attitude in the experimental group has improved clearly after all the process of experiment.

With these results we came up with this conclusion.

First, the geometry learning through spatial reasoning activities enhances the ability of analyzing , spatial sensibility and logical ability, which is effective in increasing the mathematical problem solving ability.

Second, the geometry learning through spatial reasoning activities enhances confidence in problem solving and an interest in mathematics, which has a positive influence on the mathematical attitude.

Keywords: spatial reasoning activities, geometry learning, mathematical problem solving ability, mathematical attitude

논문접수: 2010. 07. 13
논문심사: 2010. 07. 28
게재확정: 2010. 08. 06

3) rmsal@hanmail.net
4) hkshin@snue.ac.kr

<부록 1> 수학적 문제해결력 검사지

수학적 문제해결력 평가지
서울 ( ) 초등학교 6학년 ( )반 이름 ( )

1. 강강술래를 하기 위해 사람들이 일정한 간격으로 서서 원을 만들었습니다. 세 번째 사람은 열 번째 사람과 마주보고 있습니다. 모여 있는 사람은 모두 몇 명입니까?

( )명

2. 서현이는 가지고 있던 놀이카드 중에서 6장을 친구에게 주고, 남은 카드 중에서 반을 형에게 주었더니 3장이 남았습니다. 서현이가 처음에 가지고 있던 놀이카드는 몇 장입니까?

( )장

3. 지갑 속에 500원짜리 동전 1개, 100원짜리 동전 2개, 10원짜리 동전 3개가 있습니다. 그 중에서 3개의 동전을 꺼냈을 때, 나올 수 있는 금액은 모두 몇 가지입니까?

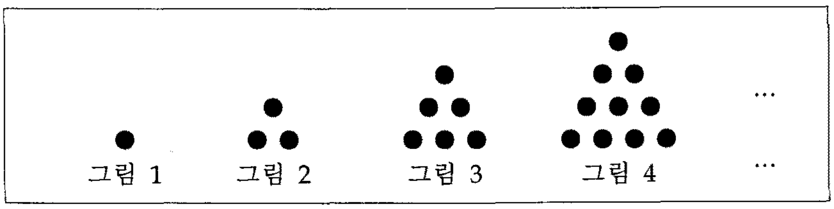
( ) 가지

4. 어떤 수에 26을 더하고 4로 나눈 후 34를 뺐더니 17이 되었습니다. 어떤 수는 얼마입니까?

( )

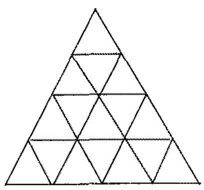
5. 다음과 같은 규칙으로 바둑돌을 계속 놓을 때, 그림 10에는 몇 개의 바둑돌이 놓이는지를 알아보려고 합니다. 그림 10에는 바둑돌이 몇 개 놓입니까?

________ 개



6. 오른쪽 그림에서 삼각형은 모두 몇 개 일까요?

( )개



7. <문제>와 그 <풀이>를 나타낸 것입니다.

<문제> 20명이 탁구경기를 하려고 합니다. 모든 사람이 빠짐없이 서로 한 번씩 경기를 한다면, 경기를 모두 몇 번 하게 됩니까? <풀이> 사람 수를 줄여서 규칙을 찾아보면, 2명인 경우는 1(번), 3명인 경우는 $1+2=3$(번), 4명인 경우는 $1+2+3=6$(번)이므로, 20명인 경우는 $1+2+3+\cdots+\boxed{㉠}=\boxed{㉡}$(번)입니다.

<풀이>에서 ㉠+㉡은 얼마입니까? (　　　)

8. 효정이네 반 학생들이 좋아하는 운동경기에 대해 조사한 것입니다. 피구와 축구를 모두 좋아하지 않는 학생은 몇 명입니까? (　　　)명

○ 축구를 좋아하는 학생은 19명입니다. ○ 피구를 좋아하는 학생은 10명입니다. ○ 피구를 좋아하지 않는 학생은 25명입니다. ○ 축구와 피구를 모두 좋아하는 학생은 7명입니다.

9. 영지네 학교의 수학 시험에 4점짜리 선택형 문제와 8점짜리 서술형 문제를 합하여 모두 20문제가 출제되었습니다. 모두 맞으면 100점이라고 할 때, 4점짜리 선택형 문제는 모두 몇 개입니까?

(　　　)개

10. 다섯 명이 아래와 같은 방법으로 한 줄로 서 있습니다. 앞에서 넷째 번에 서 있는 사람은 누구입니까?

• 주희는 맨 앞에 서 있습니다. • 정아는 민정이 앞에 서 있습니다. • 경은이는 둘째 번에 서 있지 않습니다. • 현주와 민정이는 맨 뒤에 서 있지 않습니다. • 주희와 정아 사이에는 한 명이 서 있습니다.

① 경은　　② 민정　　③ 정아　　④ 현주