한국초등수학교육학회지 14(2) 241-262. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(2) 241-262.

분수 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석

김미영1) · 백석윤2)

초등학생의 분수 덧셈·뺄셈 계산 과정의 분석을 통해서 다양한 인지적 장애 현상의 유형을 확인할 수 있었다. 이러한 분수 계산에서 나타나는 인지적 장애 현상의 원인을 인식론적, 심리적 요인으로 구분하여 분석하였다. 인식론적 요인으로는 과잉 일반화, 직관의 영향, 언어적 표현의 영향, 부분에만 주목하는 경향을, 심리적 요인으로는 도구적 이해, 오류적 개념 이미지, 자연수 계산에 대한 집착, 문제 조건 변형을 통한 개인적 이해 등을 확인할 수 있었다.

앞의 분석 결과를 바탕으로 학생들이 분수 계산에서 겪는 인지적 장애 극복을 위한 방안과 관련하여 다음의 결론을 얻었다. 첫째, 학생들 스스로 분수 덧셈과 뺄셈에 대한 잘못된 인식을 깨닫고 올바른 이해를 도울 수 있는 지도 방안의 고려가 필요하다. 둘째, 알고리즘과 형식화에 치중하기보다 다양한 활동을 통해 원리를 이해하도록 지도하는 활동이 무엇보다 중요하다. 인지적 장애는 선행 지식과의 관련성 외에 인식론적, 심리적 요인들의 복합적인 작용에 기인하므로 선행지식을 재지도하는 방식을 넘어 다양한 인지적 장애 원인을 고려한 수업 연구가 이루어져야 할 것으로 생각한다.

[주제어] 분수의 덧셈, 뺄셈, 인지적 장애

Ⅰ. 서 론

초등수학의 내용 중 분수는 일상생활에서 자주 접하는 수학 내용이다. 즉, 분수는 수학적 문제 상황에 대한 합리적이고 편리한 사고를 위해 초등수학에서 핵심이 되는 개념으로, 그 중요성은 다음 세 가지 입장에서 찾아 볼 수 있다. 첫째, 분수 개념을 효과적으로 취급하기 위한 능력은 실생활에서의 수량적 상황과 문제를 이해하고 처리하는 능력을 크게 개선시킬 수 있다는 실용적 입장이다. 둘째, 학생의 지속적인 지적 개발을 위해 필요한 지적 구조를 개발하고 확장시켜 풍부한 영역을 제공할 수 있다는 학습심리적 입장이다. 셋째, 분수의 이해가 초등 대수 연산의 바탕이 될 수 있는 기초를 제공할 수 있다는 수학적 입장이다(Behr 외, 1983; 김진식, 1995, 재인용).

하지만 분수 학습시 많은 학생이 분수의 개념과 원리 이해에 어려움을 겪고 있으며, 분수의 연산에서 선행 지식인 분수의 개념이나 원리를 연산과 연결시켜 이해하지 못한 채 단순 암기에 의한 알고리즘에 의존하여 문제를 해결하려 하기 때문에 많은 오류를 보이고 있음을 알 수 있다(조병윤, 1992; 김진식, 1995; 김선영, 2003; 추은영, 2003).

이처럼 초등학생이 분수 개념이나 연산과 관련하여 인지적으로 어려움을 겪고 그 결과

1) 서울 양재초등학교
2) 서울교육대학교 수학교육과

오류를 범하는 원인으로는 분수가 전체-부분의 비교(관계), 소수, 몫, 측정, 비율, 연산자 등의 여러 가지 의미를 가지고 있는 것과 무관하지 않다(Ohlsson, 1988). 또한, 분수를 이해할 때에는 분자와 분모의 관계에 주목해야 하고, 이미 학습한 자연수와 연산이 분수 개념과 그 연산을 학습하는데 방해가 되기 시작 하는 것으로부터 분수 학습의 어려움의 원인을 찾기도 한다.

분수 개념 및 연산과 관련한 인지적 장애는 분수 자체에 의한 것이기도 하지만 분수 교수학적 측면에서도 그 원인을 찾을 수 있다. 김옥경, 권성룡, 류희찬(1995)은 지금까지의 분수 수업은 개념의 이해보다는 기호 중심으로 이루어져 왔으며, 분수의 개념을 이해하지 못한 상태에서 곧바로 형식화된 연산으로 진행함으로써 분수 연산의 의미도 이해할 수 없었다고 지적하였고, 유현주(1995)는 학교수업 중 상당 부분이 근본적인 이해보다 절차적 기능과 계산적 측면을 강조하고 있는 데 기인한다고 하였다.

한편, Kieren(1980)은 분수의 하위 구조의 발달을 사회적 상호작용의 영향에도 불구하고 꽤 많은 부분이 인지적 성숙에 의존하고 있다고 하였다. 즉, 분수 개념에 대한 전형적인 인식의 발달 순서(가역적 스키마 능력, 결론 내리는 능력, 두 가지를 동시에 비교하는 능력, 비율의 능력)를 거쳤을 때만 올바른 분수의 스키마가 형성된다는 것이다. Piaget에 의하면, 앞의 두 가지 능력은 구체적 조작기 후반(9~11세)에 발달되는 반면 뒤의 두 가지는 형식적 조작기(11~14세)에서 발달된다. 그러므로 개인의 발달심리적인 측면도 분수 학습에 영향을 주는 요인이라고 할 수 있겠다.

이러한 여러 가지 요인의 복합적인 작용으로 인해 학생들은 분수 학습의 초기 단계에서부터 어려움을 겪고 있다. 특히, 수학 과목이 계통적이고 단계적인 내용적 속성을 갖는 특성상 선행 지식인 분수 개념이 분명하게 형성되지 않거나 오개념이 형성될 경우, 분수의 연산과 같은 후속 학습 또한 불가능하게 되고 오개념과 단순 알고리즘의 암기를 통하여 문제를 해결함으로써 여러 가지 오류가 발생하게 된다. 그리하여 분수 연산에서 오류와 관련한 지금까지의 연구는 대부분 오류의 유형을 분석하고, 그 원인을 주로 선행 지식과의 관련성에 초점을 맞추어 선행 지식과 개념을 올바르게 형성하도록 교정지도하는 형태로 이루어졌다. 그러나 학생이 분수의 연산에서 오류를 보이는 원인은 위에서 언급했듯이 단지 분수 자체의 어려움으로 인한 선행 지식의 개념이 불분명하거나 오개념이 형성되어 있기 때문으로만 단정 지을 수는 없다. 학생들이 보이는 오류의 원인은 선행 지식과의 관련 이외에도 개인의 비형식적 경험, 발달 정도 및 경험한 교수·학습 방법 등의 복합적인 인지적 장애 요인이 종합적으로 작용하여 발생하기 때문이다.

이에 본 연구에서는 초등학교 분수의 덧셈, 뺄셈에서 학생들에게 어떠한 인지적 장애 유형이 나타나는지에 대하여 고찰하고, 분수의 덧셈과 뺄셈의 이해를 방해하는 소위 인지적 장애를 일으키는 요인을 인식론적 요인, 심리적인 요인의 두 측면에서 파악하고자 한다. 이는 물론 분수의 덧셈과 뺄셈에서 보이는 오류적인 현상의 교정적 지도를 위한 교수학적 방법론 구상에 구체적인 도움이 될 것으로 생각한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 학습 과정에 나타나는 인지적 장애

인지적 장애는 학습 과정에서 학습자가 겪는 어려움을 알아내고, 적절한 수업 전략을

설계하는 데 필요한 개념으로 학습자의 개인적 발달 과정에서 생기는 발생적 또는 심리적 장애, 교수 방법과 교사의 속성 때문에 생기는 교수학적 장애, 수학 개념 자체의 속성으로 인한 인식론적 장애 등으로 구분할 수 있다(Cornu, 2003).

인식론적 장애라는 용어는 Bachelard(1994)가 처음으로 사용하였다. 이 개념은 Brousseau (1997)에 의해 수학교육에 도입되었으며, 그는 수학 교수학적 상황론의 핵심 개념의 하나인 인식론적 장애(epistemological obstacle)를 어떤 활동 영역에서는 제대로 작동되지만 어떤 상황에서는 잘 작동되지 않고 모순이 생기며, 결국은 실패하게 되는 지식이라고 정의한다(Cornu, 2003).

박선화(1998)는 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인으로 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유의 영향 등을 제시하였다. 수학에는 '집합', '극한', '무한' 등과 같은 여러 가지 일상적인 언어가 그와 똑같은 의미는 아니라고 하더라도 자주 사용되고 있다. 따라서 수학적 용어와 관련된 자생적 관념이 수학적 사고에 적지 않은 영향을 미치게 된다. 그러한 자생적 관념인 용어의 일상적인 의미는 생존력이 매우 강하여 다른 수학 내용을 학습하면 사라지는 것이 아니라 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학학습에 장애로서 작용하게 된다. 또한 사고할 때 우리는 주관적 또는 경험적으로 확실해 보이는 직관에 의존하게 된다. 실제적인 여러 가지 수학적 사고는 직관적으로 이루어지지 않을 수 없다 하더라도, 수학은 직관을 배제하고 논리적, 형식적으로 전개되는 사고 패턴으로 특히 직관은 무한 개념이나 극한 개념의 학습에 장애가 된다고 한다.

심리적 근원에 따른 장애는 학습자가 새로운 개념을 자신의 인지 구조의 일부로서 적절하게 동화, 조절, 재구성시키는 과정에서 나타나는 장애이다. 이는 새로운 개념과 학생의 인지 구조 간의 차이로 인해 학생이 자신의 기존 인지 구조에 새로운 개념을 적절히 동화시키지 못할 때 나타난다. 학생은 자신의 학습활동과 일상생활의 경험을 통해 선행 지식을 가지고 있으며 이러한 선행 지식은 새로운 지식을 받아들이는데 부적합한 기존의 인지 구조에 대하여 조절작용을 가해야 하나 기존의 인지 구조의 변화는 쉽게 일어나지 않는데서 장애가 발생할 수 있다.

심리적인 장애는 학습자의 인지 구조가 지닌 자기 영속적 특징으로부터도 나타날 수 있다. 학습자는 형식적인 수학적 개념을 배우기 전에 선행 학습 내용이나 경험에 기반한 개념 이미지를 형성하게 되는데, 이 때 잘못 형성된 개념 이미지는 이후 올바른 개념 정의를 활성화시키지 못할 뿐 아니라 개념 이미지에만 의존한 문제 해결이라는 오류를 낳게 된다 (이종희 외, 2002).

교수학적 원인을 가진 장애는 교육체계 내에서의 어떤 선택이나 행위에 기인하는 듯이 보이는 장애들이다. 수학적 개념을 비수학적인 개념이나 다른 수학적 개념과 관련지어 설명하는 데에서 비롯되거나, 특정한 내용이 강조되는 교육과정의 영향으로 형성되는 장애 등을 생각해 볼 수 있으며, 이 또한 학습에서 피할 수 없는 장애이다. 예를 들어, 초등학교 수준에서의 현재와 같은 소수의 지도 문제를 생각해 볼 수 있다. 소수는 그 유용성 때문에 많은 사람들에게 가르쳐지게 되었고, 측정 체계와 결합되고, 자연수의 계산법과 밀접히 관련지어졌다. 결과적으로 오늘날 소수는 학생들에게는 '단위가 바뀐 자연수'이고 따라서 '소수점이 있는' 자연수이며 측정수이다. 그리고 연습에 의한 자동화에 의해 뒷받침된 이러한 소수의 개념구성은 대학 수준에서까지도 실수에 대한 진정한 이해에 장애가 되고 있다(우정호, 2000).

하지만 이처럼 다양한 요인들로 인해 발생하는 학습자의 인지적 장애와 그 결과인 오류는 부정적인 것만이 아니라 학생들이 그러한 지식을 어떻게 구성하는 지에 대한 정보를

제공해주는 긍정적인 관점에서 살펴볼 필요가 있을 것이다.

2. 분수의 학습과 지도

가. 분수의 개념

분수의 개념은 부분-전체 의미, 몫의 의미, 연산자의 의미, 비의 의미, 측정의 의미로 나누어 살펴볼 수 있다(English & Halford, 2003).

부분-전체의 의미는 학생들에게 전형적으로 '부분/전체'의 방식을 통해 유리수를 소개하는데 활용한다. 이는 연속적인 양이나 또는 같은 크기의 하위부분이나 집합체의 비연속적인 대상들의 한 집합을 분할하는 능력을 요구한다.

몫 구성(quotient construct)은 아이들에게 매우 다른 분수를 보여주며 '부분/전체' 구성보다 더 많은 복잡한 사상들을 포함한다. 이 구성은 a와 b가 정수이고, a는 0이 아닐 때, ax=b 형태의 방정식을 푸는 과정에서 나타난다(Kieren, 1980).

유리수의 연산자 구성(operator construct)은 대수적 해석을 도입해서 이루어진다. 예를 들어, $\frac{m}{n}$은 주어진 집합을 모든 원소에 $\frac{m}{n}$배하여 다른 집합으로 변형시키는 함수로 간주할 수 있다. 또한 기하학적 도형을 닮은꼴 도형으로 $\frac{m}{n}$배 변환하는 함수의 관점으로 생각할 수 있다.

비(ratio)는 사물을 비교할 때 사용하는 개념으로, 비교에 대한 학생의 경험은 비를 포함하는 경우가 종종 있다. 예를 들면, 분수 $\frac{3}{5}$은 여자 아이 5명에 대한 남자 아이 3명과 같은 비율 상황을 나타낼 수도 있다.

마지막으로, 양의 크기를 어떤 단위를 기준으로 표현하고자 할 때, 선택된 단위로의 측정에서 남는 영역이 단위보다 더 작으면 단위가 보다 세분되고 이와 같은 과정에서 분수의 개념이 필요하게 된다. 물 $\frac{1}{2}\ell$, 끈 $\frac{2}{3}$m 등이 이 경우이다.

나. 분수의 연산

단지 알고리즘에 따라 기호를 다루기만 한다고 분수 연산을 할 수 있다고 보기는 어렵다. 보다 효과적으로 연산을 가르치기 위해서는 개념 개발을 위해 충분한 시간을 가지고, 조작물을 통해 의미 이해를 도모하고 연습을 효과적으로 활용해야 한다. 연습은 간단하고 규칙적이며 체계적이고 이해를 바탕으로 해야 하며, 관련 개념, 의미, 기본 지식이 적절히 조화를 이루어 지필 알고리즘의 타당성을 뒷받침해 주어야 한다. 학생들이 분수 계산을 잘하지 못하는 것은 기초적인 분수의 개념에 대한 이해보다는 계산 규칙을 성급히 강조하기 때문이다. 분수 연산 수업은 분수의 개념, 연산의 의미를 더 잘 이해하도록 하는 데 중점을 두어야 한다(김정식, 2005).

또한, 의미 있는 분수의 덧셈과 뺄셈 지도를 위해 일반적으로 비형식적인 탐구가 알고리즘 지도에 선행되는 것이 바람직하다(John, 1998). 예를 들어, $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$의 합을 구하기 위해 모형을 사용하였다고 할 때, 면적과 길이 모형을 가지고 충분히 탐구해 보도록 해야 한다. 이때 문제는 학생들이 이용할 수 있는 재료를 가지고 활동적으로 고찰할 수 있는 것이

어야 한다. 모델을 가지고 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때 가장 처음으로 결정해야 할 것이 두 분수를 모형화 할 수 있는 전체를 결정하는 것이다. 모형을 가지고 덧셈이나 뺄셈을 탐구할 때, 어려운 문제에 대해 두려움을 가져서는 안 되므로 다른 공통분모, 1보다 훨씬 큰 분수, 그리고 대분수들의 계산을 연습한다. 가령 뺄셈에 있어서, $3\frac{1}{8}-1\frac{1}{4}$과 같이 전체가 분모 8로 전환될 수 있는 문제에서 학생이 문제를 해결할 수 있는 공식화된 완전한 방법을 가지고 지도하는 것을 피해야 한다. 두 모형을 사용하여 결합하여 문제해결에 접근하는 것은 학생들이 관계를 발전시키는데 도움을 줄 것이다. 다른 모형을 사용하여 해보고 문제 해결과정을 논의해야 한다. 이러한 비형식적인 탐구를 통해 의미 있게 공통분모에 접근함으로써 알고리즘을 발견하도록 해야 할 것이다(김춘화, 2004).

Ⅲ. 연구 문제 및 연구 방법

본 연구에서 초등학생의 분수 덧셈, 뺄셈에 대한 인지적 장애 분석을 위하여 다음을 연구 문제로 설정하였다.

첫째, 초등학생의 분수 덧셈, 뺄셈 과정에 어떠한 인지적 장애 현상의 유형이 나타나는가?

둘째, 초등학생의 분수 덧셈, 뺄셈 과정에서 나타나는 인지적 장애의 원인은 무엇인가?

위의 연구 문제에 대한 답을 구하기 위하여 서울 서초구에 위치한 Y초등학교 6학년 중 세 학급을 선정하여 분수의 덧셈, 뺄셈과 관련한 인지적 장애 현상의 유형을 파악할 수 있는 검사 문항지를 적용하였다. 문항지는 선행연구를 바탕으로 분수의 덧셈과 뺄셈을 식으로 계산하는 '알고리즘 학습지' 40문항과 분수의 덧셈과 뺄셈을 그림으로 그려 설명하거나 식을 보고 문제를 만드는 형태의 '원리 학습지' 5문항으로 구성하였다. 이를 바탕으로 검사 문항지에서 체계적 오류를 보이는 학생 18명을 선정하여 인지적 장애의 유형과 그 원인을 분석하고자 풀이과정에 대한 면담을 실시하였다. 면담은 자유로운 분위기 속에서 1:1로 이루어졌으며, 녹음을 통해 면담 내용을 다시 확인할 수 있도록 하였다.

첫 번째 연구 문제에 대한 답을 얻기 위하여 알고리즘 학습지와 원리 학습지를 사용하여 체계적 오류를 보이는 학생의 인지적 장애 현상의 유형을 분석하였고, 두 번째 연구 문제의 답을 얻기 위하여 면담 내용을 녹음하여 정리 및 분석한 후 반응들을 분류하여 범주화하였다.

Ⅳ. 연구 결과 분석

1. 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 인지적 장애 현상 유형 분석

가. 알고리즘 학습지

진분수, 가분수, 대분수가 포함된 분수 덧셈, 뺄셈식을 계산하는 과정을 바탕으로 장애 현상 유형을 분석하였으며 분석틀은 김춘화(2004)의 연구를 참고하여 동분모 계산에서 보이는 장애 유형, 이분모 계산에서 보이는 장애 유형, 동분모, 이분모 계산 모두에서 공통적으로 보이는 장애 유형으로 나누어 살펴보았다.

1) 공통적 장애 유형

▶ 분자와 분모를 합하여 자연수처럼 계산하는 경우

- 덧셈 : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5+5}=\frac{4}{10}=10+4=14$

- 뺄셈 : $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{6-5}=\frac{1}{1}=1+1=2$

▶ 나눗셈처럼 계산하는 경우

- 덧셈 : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{\cancel{5}_1}+\frac{\cancel{5}_1}{1}=3$

- 뺄셈 : $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{3}{\cancel{2}_1}-\frac{\cancel{4}_2}{5}=\frac{6}{5}$

▶ 대분수에서 가분수로 변환하지 못하는 경우

- 사례 : $2\frac{3}{4}=\frac{2\times4+3}{2\times4}=\frac{11}{8}$

▶ 가분수를 자연수로 변환하지 못하는 경우

- 사례 : $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=\frac{7}{7}=7$

▶ 공약수가 있는 수끼리 무조건 약분하는 경우

- 덧셈 : $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{\cancel{3}_1}{5}+\frac{\cancel{3}_1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$

- 뺄셈 : $\frac{4}{8}-\frac{2}{8}=\frac{\cancel{4}_2}{\cancel{8}_1}-\frac{\cancel{2}_1}{\cancel{8}_1}=1$

2) 동분모 계산 장애 유형

▶ 자연수를 분자와 계산하는 경우

- 덧셈 : $5+\frac{5}{9}=\frac{5+5}{9}=\frac{10}{9}$

- 뺄셈 : $\frac{16}{3}-3=\frac{16-3}{3}=\frac{13}{3}$

▶ 순서와 관계없이 큰 수에서 작은 수를 빼는 경우

- 뺄셈 사례 1 : $\frac{13}{4}-1\frac{3}{4}=1\frac{10}{4}$

- 뺄셈 사례 2 : $3-1\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

▶ 받아내림을 잘못하는 경우

- 뺄셈 사례 1 : $1\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=\frac{10+1}{5}-\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$

- 뺄셈 사례 2 : $3\frac{2}{9}-1\frac{5}{9}=2\frac{10+2}{9}-1\frac{5}{9}=1\frac{7}{5}$

3) 이분모 계산 장애 유형

▶ 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 계산하는 경우

- 덧셈 사례 : $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{4+2}=\frac{2}{6}$
- 뺄셈 사례 : $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{6-5}=1$

▶ 공통분모를 구하나, 분자를 잘못 구하는 경우

- 덧셈 사례 :

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=\frac{2+2}{5\times2}+\frac{5+5}{2\times5}=\frac{4}{10}+\frac{10}{10}=\frac{14}{10}$$

- 뺄셈 사례 :

$$\frac{5}{9}-\frac{5}{18}=\frac{5+2}{9\times2}-\frac{5+1}{18\times1}=\frac{7}{18}-\frac{6}{18}=\frac{1}{18}$$

▶ 공통분모가 10의 제곱수가 아니면 공통분모를 구하지 못하는 경우

- 공통분모를 찾는 사례 : $\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=\frac{4}{10}+\frac{25}{10}=\frac{29}{10}$
- 공통분모를 찾지 못하는 사례 : $\frac{3}{5}+\frac{4}{3}=?$

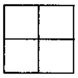
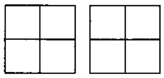
나. 원리 학습지

분수 덧셈, 뺄셈식을 그림이나 표로 나타내거나 문제를 만들어보는 과정을 바탕으로 장애 유형을 분석하였으며 문항별로 반응을 범주화하여 살펴보았다.

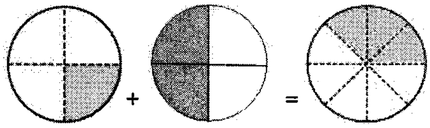
문항	문항 유형		문제
1	그림이나 표를 그려 계산하기	동분모 덧셈	$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$
2		이분모 뺄셈	$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$
3		이분모 덧셈	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$
4	문제 만들기	이분모 덧셈	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
5		동분모 뺄셈	$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$

1) 문항 1 장애 유형

① 분수를 그림으로 알맞게 나타내지 못하는 경우

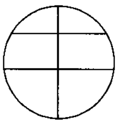
- 사례 : $\frac{1}{4}$= , $\frac{2}{4}$ = 

② '$\frac{3}{8}$'으로 응답하는 경우

- 사례 : 

2) 문항 2 장애 유형

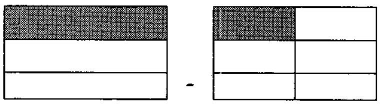
① 분수를 그림으로 알맞게 나타내지 못하는 경우

- 사례 : $\frac{1}{6}$ = 

② 부분의 전체를 다르게 나타낸 경우

- 사례 : 

③ 각 분수를 그림으로 알맞게 나타내지만, 연산 과정을 나타내지 못하는 경우

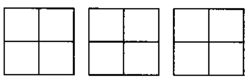
- 사례 :  = ?

④ 식으로 계산하는 경우

- 사례 : $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$

3) 문항 3 장애 유형

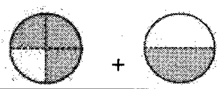
① 분수를 그림으로 알맞게 나타내지 못하는 경우

- 사례 : $\frac{3}{4}$ = 

② 부분의 전체를 다르게 나타낸 경우

- 사례 : ●●●○ + ●○

③ 각 분수를 그림으로 알맞게 나타내지만, 연산 과정을 나타내지 못하는 경우

- 사례 :  = ?

④ 식으로 계산하는 경우

- 사례 : $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

4) 문항 4 장애 유형

① 문제를 만들지 않고 계산하는 경우

- 사례 : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

② 문제를 만들지 않고 그림으로 나타내는 경우

- 사례 : 

③ 부분의 전체를 다르게 한 경우

- 사례 1 : 비둘기 3마리 중에 1마리가 죽고, 참새 2마리 중에 1마리가 죽었습니다. 새들은 몇 마리 죽었습니까?

④ 곱셈처럼 문제를 만드는 경우

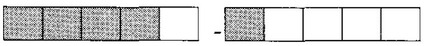
- 사례 : 민수는 용돈의 $\frac{1}{3}$을 저축하고, $\frac{1}{2}$은 군것질을 하였습니다. 받은 용돈이 9000원이면 저축과 군것질에 쓴 돈을 각각 쓰시오.

5) 문항 5 장애 유형

① 문제를 만들지 않고 계산하는 경우

- 사례 : $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

② 문제를 만들지 않고 그림으로 나타내는 경우

- 사례 : 

③ 곱셈처럼 문제를 만드는 경우

- 전체 사탕 $\frac{4}{5}$중에 동생에게 $\frac{1}{5}$을 주었습니다. 동생이 받은 사탕은 남은 사탕의 몇 배입니까?

2. 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 인지적 장애 원인 분석

가. 인식론적 요인

1) 과잉 일반화

① 분수의 곱셈/나눗셈 알고리즘을 분수의 덧셈/뺄셈에 적용하는 경우

학생들에게 발견되는 인지적 장애 현상의 유형은 분수의 곱셈과 나눗셈의 알고리즘을 분수의 덧셈, 뺄셈에 적용하는 것이다. 이러한 장애가 나타나는 원인은 분수의 곱셈과 나눗셈

의 알고리즘이 분수의 덧셈과 뺄셈에서도 성립된다고 생각하는 과잉 일반화 현상 때문이다.

T : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$을 어떻게 계산했니?
S3 : 첫 번째 분수는 가만히 있고, 뒤의 분수를 분자와 분모를 바꾸어 계산한다고 배웠어요.
(중략)
T : 곱셈과 덧셈의 계산 방식이 같다고 생각해요?
S3 : 덧셈은 어떤 수에 어떤 수가 더해지는 것이고, 곱셈은 같은 수를 2배, 3배 늘려서 여러 번 더하는 것이니까 거의 비슷하다고 생각해요.

면담에서 알 수 있듯이 학생3은 분수의 나눗셈 알고리즘을 분수의 덧셈과 뺄셈에 동일하게 적용하였다. 이는 분수의 나눗셈에서만 성립하는 알고리즘을 표면상으로 형태가 비슷한 분수의 덧셈과 뺄셈에도 성립한다고 과잉 일반화하였기 때문이다. 또한 곱셈 알고리즘과 덧셈 알고리즘은 서로 큰 차이가 없다고 생각하였다. 이는 곱셈이 동수누가로부터 도입이 되기 때문에 덧셈의 계산도 곱셈의 계산과 동일한 것으로 과잉 일반화한 것이다.

② 뺄셈에서 받아내림을 하지 않고 큰 수에서 작은 수를 빼는 경우

학생들은 자연수의 연산을 학습할 때부터 뺄셈은 큰 수에서 작은 수를 빼는 것이라고 배웠다. 이는 분수의 뺄셈에서도 같은 원리로 작용하여 큰 수에서 작은 수를 빼지만, 작은 수에서 큰 수를 빼야하는 경우 받아내림을 하여 계산해야 함에도 불구하고 받아내림을 하지 않은 채 순서와 상관없이 무조건 큰 수에서 작은 수를 빼는 것도 옳은 방법이라고 과잉 일반화하는 경향이 있다.

T : $3-1\frac{2}{3}$는 어떻게 계산했니?
S5 : 가분수로 바꿔서 $\frac{5}{3}-3$이니까 $\frac{2}{3}$가 나왔어요.

③ '자연수±분수' 문제 형태에서 자연수를 분수의 분자와 계산하는 경우

동분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 분모는 그대로 두고 분자끼리 계산하여 답을 구한다. 그 중에서 '자연수±분수'라는 문제는 자연수에 분모 1이 생략되어 있다는 점에서 동분모 분수 중 특별한 형태의 문제이다. 하지만 학생들은 자연수에 분모 1이 생략되어 있다는 점을 인지하지 못한 채 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈처럼 분모는 그대로 두고 무조건 자연수를 분자와 계산함으로써 오류를 일으키게 된다.

T : $5+\frac{5}{9}$은 어떻게 해결했니?
S9 : 5와 5를 더해서 $\frac{10}{9}$이에요.
(중략)
T : 지금까지 위의 문제에서도(동분모 분수) 분자에만 더했으니까 이것도 똑같이 풀어야 한다고 생각하니?
S9 : 네.

면담을 통해 분자와 계산한 이유를 확인할 수 있었는데 지금까지 분수의 덧셈과 뺄셈에서 분자와 계산했다는 답이 많았다. 이는 자연수를 이해하지 못한 채 '분수±분수'의 문제를 해결하는 방법을 '자연수+분수'의 문제 해결 방법에 동일하게 적용하는 과잉 일반화가 영향을 미쳐 장애를 일으키는 것으로 보인다.

2) 직관의 영향

① 덧셈을 하면 수가 커진다고 생각하는 경우

학생들은 덧셈을 하면 수가 커진다는 직관을 가지고 있다. 하지만 학생들이 생각하기에 분수의 덧셈은 이러한 직관에 반하는 면이 있다. 예를 들면 $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$에서 분자의 수는 커지지만 분모의 수는 그대로인 것이다. 학생들에게 강하게 자리 잡은 기존의 개념은 분수의 덧셈에서 인지적 갈등을 겪게 되고 쉽게 변화하지 않으며 이를 바탕으로 분수를 이해하려고 하기 때문에 분수의 수학적 의미를 극복하기가 쉽지 않다. 그리하여 4조각 중에 한 조각과 4조각 중에 두 조각을 더하면 그 양은 많아져서 모두 여덟 조각이 되고, 그 중에 세 조각이 답이라고 생각한 것이다. '덧셈 문제이므로 피자의 양이 늘어난다.'는 기존의 직관이 이 문항을 해결할 때 영향을 준 것이다.

T : $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$를 그림으로 설명해볼까?

S3 : $\frac{1}{4}$은 4조각 중에 한 조각이고, $\frac{2}{4}$는 4조각 중에 두 조각이니까 모두 합하면 8조각 중에 3조각이니까 $\frac{3}{8}$이 맞는 것 같아요.

T : $\frac{1}{4}$에서도 4조각, $\frac{2}{4}$에서도 4조각이니까 양이 늘어나 모두 8조각이라는 뜻이니?

S3 : 네. 그런데 이 문제를 풀 때는 알고리즘 학습지에서의 분수+분수를 생각 못했어요. 만약 글이나 그림으로 나타내지 않고 $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$라고 문제가 나왔다면 역수를 취해서 곱하는 식으로 풀었을 거예요.

② 숫자가 클수록 양이 많다고 생각하는 경우

학생들이 지니고 있는 또 다른 직관은 '숫자가 클수록 양이 많다.'고 생각하는 것이다. 하지만 분수에서는 분자가 같을 때 분모의 숫자가 클수록 나누어지는 수가 많아져 양은 적어진다. 이는 학생들의 직관에 반하는 것으로 분수를 이해하기 어렵게 만드는 요인 중의 하나이다.

T : $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ 중에서 가장 큰 분수와 가장 작은 분수는 무엇이지?

S7 : 분모가 큰 것이 가장 크고, 분모가 작은 것이 가장 작아요.

면담에서 알 수 있듯이 학생7은 분수의 수학적 의미를 간과한 채 '숫자가 크면 그 양도 많다.'는 직관에 의해 분수를 이해하고 있다. 이러한 직관에 의한 학습은 분수를 이해하는 데에 방해의 요인이 되며, 나아가 분수의 덧셈과 뺄셈에서도 장애를 일으키는 원인이 된다.

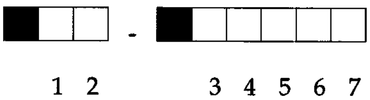
3) 언어적 표현의 영향

① 덧셈과 뺄셈에 대한 언어적 표현이 영향을 주는 경우

덧셈과 뺄셈은 여러 가지 언어적 표현을 가지고 있다. 예를 들면 ' + '는 '더하기, 합한 것, 더 주는 것, 모두 더한 것'을, ' - ' 은 '빼기, 줄어든 것, 빼고 남은 것' 등 여러 방식으로 표현된다. 이러한 여러 가지 언어적 표현은 학생들이 덧셈과 뺄셈을 이해하는데 도움이 되기도 하지만 다음과 같은 오류를 불러일으키기도 한다.

T : $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$은 어떻게 계산했니?

S5 : $\frac{1}{3}$은 3개 중의 하나고, $\frac{1}{6}$은 6개 중의 하나잖아요. 그러면 뺄셈이니까 색칠한 부분을 빼면 7개가 남아서 7이 답이에요.



T : 그렇다면 남는다는 뜻은 색칠한 부분을 뺀 나머지라는 뜻이니?

S5 : 네.

면담을 통해 알 수 있듯이 학생5에게 '뺄셈'의 언어적 표현은 '색칠한 부분을 뺀 나머지' 또는 '남아 있는 것'을 뜻한다. 이는 학생5가 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$을 계산하기 위해 분수 크기만큼 올바르게 그림으로 나타내었다 하더라도, 뺄셈은 '색칠한 부분을 빼고 남은 것'을 구한다는 언어적 표현의 영향으로 인해 그림에서 색칠한 부분을 뺀 나머지를 구함으로써 문제 해결에 장애를 일으키고 있다. 덧셈에서도 언어적 표현의 영향을 확인할 수 있었다.

T : $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$은 $\frac{3}{8}$이라고 생각하니?

S6 : 네. 피자 4조각 중 하나니까 하나만 색칠하고, 피자 4조각 중 두 개니까 두 개만 색칠하면 모두 더해서 $\frac{3}{8}$이 되었어요.

T : 모두 더해야 한다고 생각하니?

S6 : 네. 덧셈이니까 모두 더했어요.

학생6의 덧셈에 대한 언어적 표현은 '모두 더한다.'이다. 이 중 '모두' 라는 용어는 분수의 덧셈을 해결하는데 혼동을 일으켜 분수의 덧셈에서 색칠한 부분만을 더하는 것이 아니라, 그림의 모든 부분을 더하여 문제를 해결함으로써 오류가 발생하게 된다.

4) 부분에만 주목하는 경향

① 부분의 전체를 고려하지 않는 경우

분수는 전체에 대한 부분을 가리키는 숫자로서 생각할 수 있다. 같은 부분이라도 전체에 따라 서로 다른 분수로 나타낼 수 있기 때문에 부분과 전체의 관계를 고려하는 것이 무엇보다 중요하다. 특히, 분수의 덧셈과 뺄셈을 계산할 때는 각 분수의 전체를 같은 것으로 결정을 해야 한다. 하지만 학생들은 전체를 고려하지 않은 채 부분에만 주목하는 경향

이 있으며 이는 장애를 일으키는 요인이 될 수 있다.

<오답의 예> : 오렌지의 $\frac{1}{3}$과 사과의 $\frac{1}{2}$의 합은 얼마입니까?

T : 처음의 오렌지와 사과의 양은 같아요?

S16 : 아니요. 똑같다고 하면 왠지 이상해요.

면담을 통해 알 수 있듯이 학생16은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$의 전체의 크기에 대하여 고려를 하지 않고 있으며, 전체의 크기에 대한 중요성을 인식하지 못하고 있다. 이처럼 전체와 부분의 관계 속에서 분수를 이해하지 않으면 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해하는데 어려움을 겪게 될 뿐만 아니라, 생활 속에 적용하지 못하게 되어 결국 실생활과 분리된 의미 없는 수학을 학습할 뿐이다.

나. 심리적 요인

1) 도구적 이해

① 통분의 원리를 모르는 경우

많은 학생들은 이분모의 덧셈, 뺄셈에서 가장 먼저 통분을 해야 한다는 것을 알고 있다. 하지만 공통분모를 왜 만들고, 공통분모에 따라 분자는 왜 바뀌는지와 같이 통분의 원리는 이해하지 못한 채 기계적으로 덧셈과 뺄셈을 하고 있다.

T : $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$를 어떻게 계산하지?

S8 : 분모를 12로 만들었으니까 $\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$이 되요.

T : 왜 분자에 각각 4와 3을 곱했는지 설명할 수 있니?

S8 : 아니요. 잘 모르겠어요.

이러한 도구적 이해는 통분의 원리를 깨닫지 못하기 때문에 오직 암기에만 의존하여 문제를 해결해야 한다. 그렇기 때문에 통분 계산 방법과 절차를 잘못 암기한 경우 다양한 유형의 오류가 발생하게 되며, 자신의 답이 옳은 것인지 스스로 판단할 수도 없다.

② 가분수와 대분수 변환 원리를 모르는 경우

분수의 덧셈과 뺄셈 문제를 해결하다보면 가분수를 대분수로, 또는 대분수를 가분수로 변환해야 하는 경우가 있다. 가분수와 대분수 변환은 대부분의 학생이 쉽게 성공해내지만 변환 원리를 명확히 이해하지 못한 채 문제를 해결하는 도구적 이해로 인하여 장애를 일으키게 된다.

T : $1\frac{5}{6}+2\frac{5}{6}$는 어떻게 풀었지?

S5 : 1과 6을 곱해서 분모를 만들고 거기에 5를 더하면 $\frac{11}{6}$이고, 2와 6을 곱해서 분모를 만들고 거기

에 5를 더하면 $\frac{17}{12}$이 나와요.

(중략)

T : 그 이유를 설명할 수 있겠니?
S5 : 아니요.

학생5의 경우, 대분수를 가분수로 변환할 때 분자는 바르게 구하지만 분모의 값을 자연수와 곱하면서 장애를 보이고 있다. 이 또한 대분수를 가분수로 변환하는 원리를 이해하지 못한 채 도구적 이해를 바탕으로 변환 방식을 잘못 기억함으로써 장애가 발생하게 된 것이다.

③ 약분 원리를 모르는 경우

도구적 이해는 약분 과정에서도 나타난다. 학생들은 약분의 원리를 이해하지 못한 채 학습하기 때문에 공약수가 있는 수들은 모두 약분을 할 수 있다고 생각한다.

T : $3\frac{3}{4}-2$는 어떻게 계산하지?

S3 : $\frac{15}{4}$에서 분모와 2를 약분하면 $\frac{15}{2}$에요.

(중략)

T : 분수의 덧셈과 뺄셈에서 약분은 어떻게 하지?
S3 : 분자와 분모에 상관없이 약분할 수 있는 것은 모두 할 수 있어요.

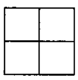
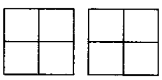
학생들은 약분이란 단순히 분자와 분모를 공약수로 나눈 것이라고 생각한다. 하지만 원리에 대한 이해가 부족하므로 공약수가 있는 수끼리는 무조건 약분을 할 수 있다고 생각하고, 이러한 도구적 이해는 분수의 덧셈과 뺄셈에서 장애를 일으키는 요인으로 작용한다.

2) 오류적 개념 이미지

① 분수의 크기만큼 그림으로 나타내지 못하는 경우

분수에서 잘못된 개념 이미지 중의 하나는 주어진 분수의 크기만큼을 그림으로 나타내지 못하는 것이다. $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 이라는 식은 올바르게 계산을 할 수 있지만 $\frac{2}{3}$가 얼마 만큼이고, $\frac{1}{4}$이 의미하는 바가 무엇인지에 대한 개념 이미지가 부족하다.

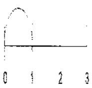
T : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$만큼 그림으로 나타내어 볼까?

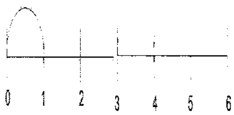
S1 : $\frac{1}{4}$은 , $\frac{2}{4}$는 

학생1은 $\frac{1}{4}$은 '전체를 4로 나눈 것 중의 하나'라는 개념 이미지가 아닌 $\frac{1}{4}$은 하나를 4로

나눈 것, $\frac{2}{4}$는 두 개를 4로 나눈 것이라는 개념 이미지를 가지고 있다. 이처럼 잘못된 개념 이미지는 단순한 식으로 문제를 해결할 때는 장애를 일으키지 않지만 분수를 정확히 이해하지 못하고 있기 때문에 새로운 문제 형태에 부딪치거나 원리 이해를 파악하는 문제에서는 장애를 일으키는 요인이 된다. 오류적 개념 이미지의 또 다른 형태는 전체를 고려하지 않은 경우이다.

T : $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$을 그림으로 설명해 볼까?

S13 : $\frac{1}{3}$은 

이고, $\frac{1}{6}$은 

이니까 통분하면 답은 $\frac{1}{6}$이에요.

학생13은 각각의 분수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{6}$에 대하여 올바른 개념 이미지를 지니고 있었다. 하지만 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$이라는 식에서는 알맞은 개념 이미지를 나타내는데 실패하였다. 각 분수의 전체를 고려하지 않은 개념 이미지를 지니고 있기 때문이다. 결국 전체를 고려하지 않은 오류적 개념 이미지가 분수의 덧셈과 뺄셈을 이해하는데 장애의 요인으로 작용한 것이다.

② 분수의 덧셈과 뺄셈 과정을 그림으로 나타내지 못하는 경우

학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈과 관련하여 개념을 이미지화 하는데 겪는 또 다른 장애 유형은 각 분수는 올바른 개념 이미지로 나타내지만 분수의 덧셈과 뺄셈 과정을 개념 이미지로 나타내지 못하는 경우이다.

T : $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$를 그림으로 설명해볼까?

(중략)

S12 : $\frac{1}{4}$은 ●○
○○ 이고, $\frac{2}{4}$는 ●●
○○ 이에요. 그리고 분모는 그대로 두고 분자끼리만 더해야 하니까 $\frac{3}{4}$이에요.

T : 더하는 과정을 그림으로 설명할 수 있겠니?

S12 : 그건, 잘 모르겠어요.

학생12의 경우 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$과 같은 분수에 대한 개념 이미지는 알맞게 나타내었다. 하지만 덧셈 과정에 대한 개념 이미지는 나타내지 못하고 있다. 그렇기 때문에 식에 의존하여 문제를 풀려고 하며 결국, 이해가 바탕이 되지 않은 문제 해결로 인해 분수의 덧셈과 뺄셈에 장애를 겪는 요인이 되는 것이다.

3) 자연수 계산에 대한 집착

① 분모와 분자를 각각의 자연수로 생각하는 경우

학생들은 새로운 지식인 분수를 학습하면서도 이전에 학습한 자연수에 대한 스키마가 강해서 분수의 덧셈과 뺄셈을 여전히 자연수 덧셈과 뺄셈처럼 해결하려는 경향이 있다. 이처럼 자연수에 대한 집착은 분수의 덧셈과 뺄셈을 해결하는데 하나의 장애를 일으키는 요인이 된다.

T : $1\frac{1}{2}-\frac{5}{4}$는 어떻게 풀었니?

S1 : 1과 1을 더하면 2이고, 분모 2와 빼면 0이에요. 그리고 나머지 5와 4를 더했어요.

T : 그러면 분수였는데 왜 분모인 1과 분자인 1을 더해서 답을 자연수처럼 썼니?

(중략)

S1 : 분수나 자연수나 어차피 덧셈이니까 모든 수를 더해야 한다고 생각했어요.

학생1은 분수의 덧셈과 뺄셈에서 분자와 분모를 각각의 자연수로 생각하여 나름의 방식대로 문제를 해결하였고, 모든 답을 자연수로 나타내었다. 이는 분수를 학습하였지만 자연수에 대한 스키마가 지배적이기 때문이다. 또한 분수의 덧셈과 뺄셈에서 가장 흔히 볼 수 있는 장애 유형인 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 계산하는 방식도 분수를 분모와 분자의 관계로서 이해하기보다 각 숫자를 자연수로 생각하려는 자연수에 대한 집착이 그 요인이라고 할 수 있다.

② 10으로 받아내림을 하는 경우

또 다른 자연수의 덧셈과 뺄셈에 집착하는 경향은 받아내림이 있는 분수의 뺄셈에서도 발견되었다.

T : $3\frac{2}{9}-1\frac{5}{9}$는 어떻게 풀었니?

S7 : 2에서 5를 못 빼니까 3에서 10을 빌려와요. 그러면 $2\frac{12}{9}-1\frac{5}{9}$니까 $1\frac{7}{9}$이에요.

학생7은 받아내림을 하기 위해 자연수 1이 줄어든 만큼 10을 분자에다 더해주었다. 이는 자연수에서 뺄셈을 할 때 10을 빌려오는 방법에 대한 집착이 분수의 덧셈, 뺄셈에서도 영향을 주어 장애를 일으키는 하나의 요인이 되는 것이다.

③ 분모를 10의 거듭제곱으로만 나타내려는 경우

학생들은 때로는 자연수 중에서도 특정한 수에 집착하는 경향이 있다. 특히, 현재 수체계는 십진 기수법을 사용하고 있으며, 자연수의 덧셈과 뺄셈에서도 10을 만들어 받아 올리거나, 10에서 받아내림을 하기 때문에 학생들은 10이나 100과 같은 수에 안정을 느끼면서 이러한 수에 집착하기도 한다. 이러한 경향은 학생8에게서 찾아 볼 수 있다. 학생8의 경우 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때 10의 거듭제곱이라는 숫자에 집착하려는 경향이 있었다.

T : $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$은 어떻게 계산했니?

S8 : 4를 100으로 만들기 위해 25를 분자와 분모에 곱하고, 2를 100으로 만들기 위해 분자와 분모에 50을 만들어 계산했어요.

(중략)

T : 그러면 왜 분모를 10, 100, 1000으로 만들 수 없는 분수는 계산하지 않았니?

S8 : 그냥, 잘 몰라서요.

T : 그러면 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$에서 분모를 같게 만드는 방법을 알고 있어요?

S8 : 분모를 10이나 100으로 만들 수 없으니까 분모끼리 곱해서 12로 만들면 되는데... 그 나머지 과정을 어떻게 해야 하는지 잘 모르겠어요.

면담에서 알 수 있듯이 학생8은 두 분모의 공배수를 10의 제곱으로 나타낼 수 있는 문제만 해결하고 두 분모의 공배수가 10의 제곱이 아닌 경우에는 문제를 해결하지 못하였다. 또한 이분모의 덧셈과 뺄셈을 계산하기 위해 두 분모의 최소공배수나 두 분모의 곱을 공통분모로 나타내지 않고 10의 제곱의 형태로만 나타내려고 하였다. 그 이유를 알아보기 위해 면담을 실시한 결과, 학생8에게 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$과 같이 두 분모의 공배수가 10의 제곱이 아닌 문제를 해결해보도록 요구하자 매우 불안해하는 모습을 보였다.

이를 통해 10의 거듭제곱에 대한 집착이 분수의 덧셈과 뺄셈의 장애를 일으키는 하나의 요인임을 알 수 있었다. 이처럼 특정한 수에 집착하는 학생은 다른 수에서도 다양한 성공 경험을 제공함으로써 심리적 안정을 느낄 수 있도록 하는 방법이 유용할 것으로 보인다.

4) 문제 조건 변형을 통한 개인적 이해

① 문제의 일부 조건을 삭제하는 경우

학생들은 분수의 덧셈과 뺄셈에서 학생들은 기존에 가지고 있는 인지구조에서는 설명하기 어려운 문제에 부딪쳤을 때, 자연수나 분모, 분자의 일부를 없다고 생각하고 문제를 해결하려고 하였다.

T : $1\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$는 어떻게 계산했니?

S1 : 5에서 5를 빼면 0이고, 2에서 1을 빼면 1이 나왔어요. 그 다음 앞의 1은 없다고 생각했어요. 답은 1이에요.

학생1은 분수의 덧셈과 뺄셈은 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 계산한다는 인지구조를 가지고 있다. 그런데 $1\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$나 $\frac{13}{4}-1\frac{3}{4}$와 같은 문제는 자연수가 있기 때문에 기존의 인지구조에서는 해결하기 어려운 낯선 형태의 문제이다. 그러므로 갈등을 일으키는 자연수 1을 없다고 생각하고 문제를 해결하고 있다. 기존의 인지 구조 자체가 잘못된 것이지만 이러한 제약 만족 또한 장애를 일으키는 또 다른 요인으로 작용한다.

② 새로운 내용을 추가하는 경우

분수의 덧셈과 뺄셈 실험을 하는 과정에서 반대로 문제의 일부를 추가함으로써 문제를 해결하려는 경우도 발견하였다.

T : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$라는 식을 보고 문제를 만들었는데 16조각은 어떻게 나왔니?

S10 : 그냥 만들었어요.

(중략)

T : 왜 하필 16조각이 나왔을까?

S10 : 문제를 만들어야 하니까 16조각을 넣었어요.

학생10이 만든 문제는 분수의 곱셈에서 나오는 문제 유형으로 현재 6학년에서 학습하고 있는 부분이며, 가장 뚜렷하게 자리 잡고 있는 인지구조 중 하나이다. 그러나 분수의 덧셈을 활용한 문제는 학생의 머릿속에 강하게 자리 잡은 인지구조와 갈등을 야기하는 부분인 것이다. 그러므로 이러한 갈등을 제거하기 위해 분수의 덧셈 문제에 '16조각'이라는 내용을 추가하여 분수의 곱셈과 유사한 문제 형태를 만듦으로써 자신의 해결 방법을 정당화시키려고 하는 것이다.

V. 결 론

본 연구를 통해 초등학생의 분수 덧셈·뺄셈 과정에서 이분모 계산, 동분모 계산 또는 공통적으로 나타나는 다양한 장애 현상의 유형을 확인할 수 있었다. 또한 초등학생의 분수 덧셈, 뺄셈 과정에서 나타나는 인지적 장애 현상의 원인을 인식론적, 심리적적 요인으로 나누어 살펴보았다. 인식론적 요인으로 과잉 일반화, 직관의 영향, 언어적 표현의 영향, 부분에만 주목하는 경향을, 심리적 요인으로 도구적 이해, 오류적 개념 이미지, 자연수 계산에 대한 집착, 문제 조건 변형을 통한 개인적 이해를 확인할 수 있었다.

본 연구의 분석 결과를 바탕으로 학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하면서 겪는 인지적 장애를 극복하기 위한 방안과 관련하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 인지적 장애 현상에 영향을 주는 인식론적 요인으로 과잉 일반화, 직관의 영향, 언어적 표현의 영향, 부분에만 주목하는 경향을 확인할 수 있었는데 수학자들이 극복했던 방법에 대한 연구를 통해 학생들 스스로 분수 덧셈과 뺄셈에 대한 잘못된 인식을 깨닫고 올바른 이해를 도울 수 있는 지도 방안을 고려하여야 할 것이다.

둘째, 인지적 장애 현상에 영향을 주는 심리적 요인으로 도구적 이해, 오류적 개념 이미지, 자연수 계산에 대한 집착, 제약 만족의 영향이 있었는데 이는 분수의 덧셈, 뺄셈에서 원리에 대한 이해가 부족하고 이전의 학습 내용에 집착하기 때문이다. 그러므로 알고리즘과 형식화에 치중하기보다 다양한 활동을 통해 원리를 이해하는 것이 무엇보다 중요할 것이다.

인지적 장애는 선행 지식과의 관련성 외에 인식론적, 심리적 요인들의 복합적인 작용으로 인한 것이다. 그러므로 선행 지식을 재지도하는 방식을 넘어 다양한 인지적 장애 원인을 고려한 수업 연구가 이루어 져야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

강홍규 (2005). 분수 개념과 알고리듬 지도 양상 비교 : McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 15(4)**, 375-399.

김경은 (2009). **분수에 관한 예비 초등 교사의 교수학적 내용 지식 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

김상룡 (2001). 7차 초등 수학 교과서의 문제점 및 개선점에 관한 소고. **과학수학교육연구, 24**, 71-84.

김선영 (2003). **분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 오류 유형 분석 및 효과적인 지도방안 연구**. 국민대학교 석사학위논문.

김옥경 (1997). **초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업 방안에 대한 연구**. 한국교원대 석사학위논문.

김옥경, 권성룡, 류희찬 (1995). 현행분수교육의 문제점과 개선책. **대한수학교육학회 논문집, 5(2)**, 215-226.

김정식 (2005). **초등학교 수학교과서에 나타난 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 분석**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

김진식 (1995). **국민학교 학생의 분수 계산에서 오류 유형 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

김춘화 (2004). **분수 덧셈, 뺄셈 오류 유형 진단과 처방에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박선화 (1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위논문.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

유현주 (1995). **분수개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

이종희, 김부미 (2002). 중학생의 수학적 오류 분석 및 교수학적 처방을 위한 학습지도 방법 개발. **교과교육 연구 활성화 방안 연구**. 청주: 한국교원대학교.

조병윤 (1992). **분수계산오류의 효과적인 교정 지도방안**. 한국교원대학교 석사학위논문.

추은영 (2003). **이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 오류와 원인 분석**. 춘천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Bachelard. G. (1994). **새로운 과학정신**. (김용선 역). 서울: 인간사랑.

Brousseau. G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics : Didactique des Mathematiques*. Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (2003). Limit. In D. Tall(ed.), **고등수학적 사고**(류희찬, 조완영, 김인수, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

English, L. D. & Halford G. S. (2003). *Mathematics Education : Models and Process,*

수학교육론. (고상숙 외 역). 서울: 경문사(영어 원작은 1995년 출판).

John, A. (1998). *Elementary School Mathematics : Teaching Developmentally.* Addison Wesley Longman.

Kieren, T. (1980). The rational number construct - Its elements and mechanism. In T. Kieren(Ed.), *Current Research on Number Learning*(pp.125-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert & M. Behr(eds.), *Number Concepts and Operations in the Middled Grades,* 53-92, Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

<Abstract>

An Analysis on Cognitive Obstacles While Doing Addition and Subtraction with Fractions

Kim, Miyoung[3]; & Paik, Suckyoon[4]

This study was carried out to identify the cognitive obstacles while using addition and subtraction with fractions, and to analyze the sources of cognitive obstacles.

For this purpose, the following research questions were established :

1. What errors do elementary students make while performing the operations with fractions, and what cognitive obstacles do they have?

2. What sources cause the cognitive obstacles to occur?

The results obtained in this study were as follows :

First, the student's cognitive obstacles were classified as those operating with same denominators, different denominators, and both.

Some common cognitive obstacles that occurred when operating with same denominators and with different denominators were: the students would use division instead of addition and subtraction to solve their problems, when adding fractions, the students would make a natural number as their answer, the students incorporated different solving methods when working with improper fractions, as well as, making errors when reducing fractions.

Cognitive obstacles in operating with same denominators were: adding the natural number to the numerator, subtracting the small number from the big number without carrying over, and making errors when doing so.

Cognitive obstacles while operating with different denominators were their understanding of how to work with the denominators and numerators, and they made errors when reducing fractions to common denominators.

Second, the factors that affected these cognitive obstacles were classified as epistemological factors, psychological factors, and didactical factors.

The epistemological factors that affected the cognitive obstacles when using addition and subtraction with fractions were focused on hasty generalizations, intuition, linguistic representation, portions.

The psychological factors that affected the cognitive obstacles were focused on instrumental understanding, notion image, obsession with operation of natural numbers, and constraint satisfaction.

Keywords: addition and subtraction with fraction, cognitive obstacles

논문접수: 2010. 05. 09
논문심사: 2010. 05. 23
게재확정: 2010. 07. 29

3) on0127@hanmail.net
4) sypaik@snue.ac.kr

부록1. 알고리즘 학습지(40문항)

1. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$	2. $1\frac{2}{8}+\frac{4}{8}$
3. $1\frac{5}{6}+2\frac{5}{6}$	4. $1\frac{1}{3}+\frac{7}{3}$
5. $\frac{7}{4}+\frac{2}{4}$	6. $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}$
7. $\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}$	8. $\frac{5}{6}+\frac{10}{6}$
9. $5+\frac{5}{9}$	10. $1\frac{1}{2}+2$
11. $12+\frac{11}{6}$	12. $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$
13. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$	14. $\frac{2}{5}+\frac{5}{2}$
15. $\frac{3}{5}+\frac{4}{3}$	16. $1\frac{1}{2}+\frac{2}{7}$
17. $\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}$	18. $1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
19. $2\frac{1}{9}+1\frac{1}{6}$	20. $2\frac{3}{18}+1\frac{1}{3}$

1. $\frac{4}{8}-\frac{2}{8}$	2. $1\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$
3. $3\frac{2}{9}-1\frac{5}{9}$	4. $1\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$
5. $\frac{11}{6}-\frac{2}{6}$	6. $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}$
7. $\frac{13}{4}-1\frac{3}{4}$	8. $\frac{16}{5}-\frac{8}{5}$
9. $2-\frac{2}{5}$	10. $3-1\frac{2}{3}$
11. $\frac{16}{3}-3$	12. $3\frac{3}{4}-2$
13. $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}$	14. $\frac{5}{9}-\frac{5}{18}$
15. $1\frac{1}{2}-\frac{5}{4}$	16. $3\frac{5}{12}-\frac{1}{6}$
17. $2\frac{2}{9}-\frac{3}{6}$	18. $2\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$
19. $2\frac{5}{6}-1\frac{5}{8}$	20. $2\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}$