한국수학사학회지 제23권 제3호 (2010년 8월) 91–106

사각뿔대 부피를 구하는 다양한 방법에 대한 탐구

경상대학교 윤대원
dwyoon@gsnu.ac.kr

청구고등학교 김동근
x-file-9513@hanmail.net

고대 이집트인들은 나일강의 범람으로 토지의 넓이 측정이 필요했으며, 또한 사각뿔 모양의 피라미드를 건설하였다. 이 피라미드는 실제 계단식으로 만들어져 있고 각각의 계단을 이루는 모양을 보면 사각뿔대의 모양임을 알 수 있다. 즉 사각뿔대의 부피의 합으로 피라미드가 건설되었다고 볼 수 있다.

따라서 본 논고에서는 사각뿔대의 부피를 구하는 공식이 역사발생적으로 어떻게 변천되었는지 우선 고찰하여 보고, 둘째, 모스크바 파피루스의 14번 문제에 기록되어 있는 사각뿔대 부피의 계산방법으로 추정되는 것을 Prasolov의 연구를 중심으로 살펴본 뒤 중학교 교과서에 제시된 풀이 방법을 살펴본다. 마지막으로 각뿔대의 부피에 대한 다양한 풀이 방법과 그 일반화에 대해 고찰한다.

주제어: 수학사, 각뿔대의 부피, Simpson의 공식, 일반화

1 도입

고대 이집트의 수학적 지식들은 린드 파피루스와 모스크바 파피루스에 기록된 내용을 중심으로 축적되었으며 특히 모스크바 파피루스에는 25문제의 풀이가 기술되어 있는데 그 중 윗면과 아랫면이 모두 정사각형인 각뿔대의 부피가 정확히 계산되어 있다. 그 계산의 결과는 놀라울 정도로 정확하다.

기원전 20세기 전쯤 모스크바 파피루스에는 실제로 아래 <그림 1>과 같이 기록되어 있다. 그 내용을 간략하게 소개하면 '$16 = 4^2$(밑면의 넓이), $8 = 4 \times 2$(아랫변과 윗변의 곱),

$4 = 2^2$(윗면의 넓이)이다. 이 16, 8, 4를 더해서 28을 얻는다. 6의 $\frac{1}{3}$을 해서 2를 얻는다. 28과 2를 곱하면 56을 얻는다. 이것은 56이다. 당신이 찾은 답은 옳은 답이다.'

실제로 사각뿔대의 부피를 어떻게 알았는지는 알 수 없지만 위 내용은 사각뿔대의 부피 즉, $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$을 이미 알고 있는 상태에서 수치를 대입하여 적용하는 것으로 추측된다. 여기서, a, b는 각각 윗면과 아랫면의 변의 길이이다. 예를 들어 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$의 근의 공식 $x\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$을 알고 $2x^2 - 3x + 1 = 0$의 근을 구하는 것과 일맥상통하다고 볼 수 있다.

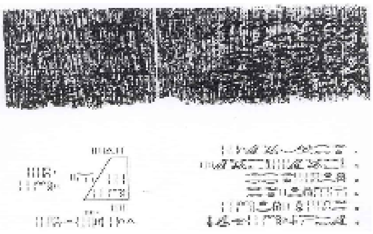


그림 1: 모스크바 파피루스

기원전 18～19세기경 바빌로니아인들은 원뿔대와 각뿔대의 부피도 가끔 윗면과 아랫면의 넓이의 산술평균에 높이를 곱하여 구하고 있다. 즉 윗면이 a^2, 아랫면이 b^2인 각뿔대의 공식을 $V = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h$을 사용했으며, 또한 $V = \left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\} h$를 이용하여 각뿔대의 부피를 구했다고 제시하고 있다([2]).

18세기의 Simpson(1710～1761)은 f는 2차 다항식이고 구간 a에서 b까지의 넓이를 적분을 이용하여 다음과 같이 계산하였으며

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

또한 그는 입체도형에 대한 부피 공식도 발견하였다.

$$V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_2 + G_3)$$

여기서, 입체도형에서 h는 높이, G_1은 입체도형의 아랫면의 넓이, G_2은 입체도형의 중간단면의 넓이, G_3은 입체도형의 윗면의 넓이이다.

Heath([5])는 윗면과 아랫면이 정사각형이 아닌 즉 아랫면의 변의 길이가 각각 a, b이고, 윗면의 길이가 각각 c, d이고, 높이가 h일 때, 사각뿔대의 부피를 다음과 같이 제시하고 있다.

$$\left\{\frac{1}{4}(a+c)(b+d) + \frac{1}{12}(a-c)(b-d)\right\}h$$

이처럼 역사적 흐름에 따라 사각뿔대의 부피를 구하는 공식이 다양하게 구해졌지만 학교수학에서는 정사각뿔대의 부피를 구하는 것에만 제한되어 있으며 그 풀이 방법 또한 대부

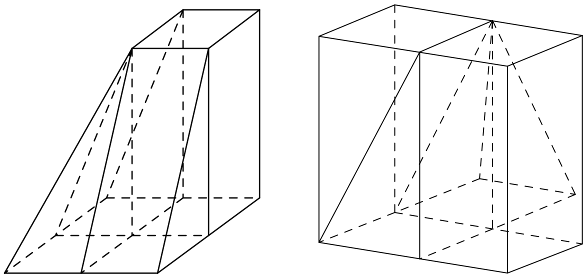
분의 중학교 교과서에서는 닮음만을 이용하여 구하고 있다.

2 본론

2.1 학교수학에서 사각뿔대 부피

이 절에서는 모스크바 파피루스의 14번 문제에 기록되어 있는 사각뿔대 부피의 계산방법으로 추정되는 것을 Prasolov의 연구([1])를 중심으로 살펴본 뒤 중학교 교과서에 제시된 풀이 방법을 살펴본다.

파피루스에는 윗면과 아랫면의 길이가 각각 $a=2$, $b=4$이고, 높이가 $h=6$인 각뿔대의 부피를 $\frac{6}{3}(2^2+2\cdot 4+4^2)$으로 즉, $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$으로 정확히 계산되어 있다.



(a) (b)

그림 2

<그림 2(a)>에서와 같이, 각뿔대를 직육면체 1개, 삼각기둥 2개, 사각뿔 1개로 분할할 수 있고, 이렇게 분할된 삼각기둥 2개를 합쳐서 <그림 2(b)>와 같이 직육면체로 만들 수 있다. 이때, 이들의 부피를 각각 구하여 더하면,

$$a^2h+(b-a)ah+(b-a)^2\frac{h}{3}=abh+(b-a)^2\frac{h}{3}$$

그리고 분모를 통분하고 $\frac{h}{3}$을 앞으로 묶어내면 $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$와 같이 식을 대수적으로 나타낼 수 있다. 하지만 당시 이집트인들이 그러한 변형을 추측하는 것은 매우 어렵기 때문에, 다음과 같은 기하학적 접근을 취했을 것으로 Prasolov는 추측한다([1]).

삼각기둥과 사각뿔의 부피[1)]와 같은 직육면체로 각각 변형시키면 <그림 3(a)>을 얻을 수

1) <그림 3(a)>와 같이 네 부분 즉, 부피 a^2h인 직육면체, $\frac{a(b-a)h}{2}$인 삼각기둥 두 개, $\frac{(b-a)^2h}{3}$인 사각뿔

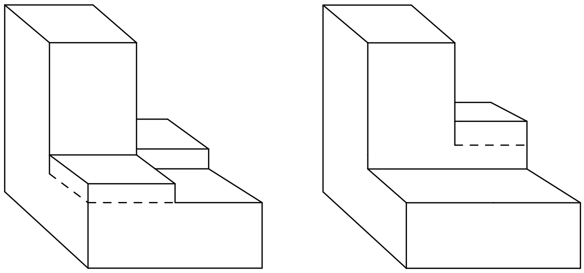


그림 3

있었다. <그림 3(a)>에서 점선 부분을 잘라내어 <그림 3(b)>와 같이 붙일 수 있다. 이때, <그림 3(b)>는 밑면이 정사각형(변이 b)이고 높이가 $\frac{h}{3}$인 직육면체, 변의 길이가 a, b인 직사각형이 밑면이고 높이가 $\frac{h}{3}$인 직육면체, 한 변이 a인 정사각형이 밑면이고 높이가 $\frac{h}{3}$인 정육면체로 이루어지게 된다. 이들 각각의 부피를 계산하면 $\frac{b^2h}{3}$, $\frac{abh}{3}$, $\frac{a^2h}{3}$이며, 이들을 합하면 구하는 각뿔대의 부피를 얻을 수 있다.

하지만 대부분의 중학교 1학년 교과서(7-나 포함)에서는 각뿔대의 부피나 원뿔대의 부피([6], [7], [8])를 구하는데 있어서 단순히 전체 부피에서 작은 부피의 차를 이용해 부피를 구하고 있다. 예를 들어, 아랫면이 정사각형(변이 b), 윗면이 정사각형(변이 a), 높이가 h인 오른쪽 <그림 4>와 같은 사각뿔대가 있다고 하자.

그렇다면 구하는 (사각뿔대의 부피) = (큰 사각뿔의 부피)−(작은 사각뿔의 부피)이 된다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{b-a} - \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{ah}{b-a} = \frac{h}{3}\Big(\frac{b^3}{b-a} - \frac{a^3}{b-a}\Big) \\ &= \frac{h}{3}\Big(\frac{b^3-a^3}{b-a}\Big) = \frac{h}{3} \cdot \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{b-a} \\ &= \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

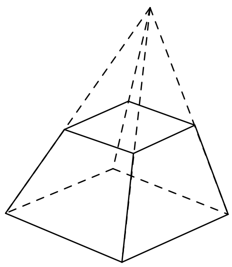


그림 4: 사각뿔대의 부피

다양한 문제해결 방법으로 탐구하는 것은 학생들의 문제해결력 신장이나 사고의 유연성 혹은 창의성을 기를 수 있으므로 사각뿔대 부피

로 나눌 수 있다. 이때 두 개의 삼각기둥은 각 길이가 a, $b-a$, h인 직육면체로, 사각뿔은 $b-a$, $b-a$, $\frac{h}{3}$인 직육면체로 생각할 수 있다.

에 대한 다양한 문제 해결 방법을 탐구하고자 한다.

2.2 다양한 풀이 방법과 그 일반화

직육면체, 삼각기둥, 사각뿔을 이용

Nelsen([4])은 직육면체 $P_1 = a^2h$, $P_2 = bah$, $P_3 = b^2h$, $P_4 = c^2h$
와 사각뿔 $P_5 = \frac{1}{3}c^2h$ 사이의 관계식을 이용하여 다음과 같이 각뿔대의 부피를 구하였다. 여기서, $b = a + c$이다.

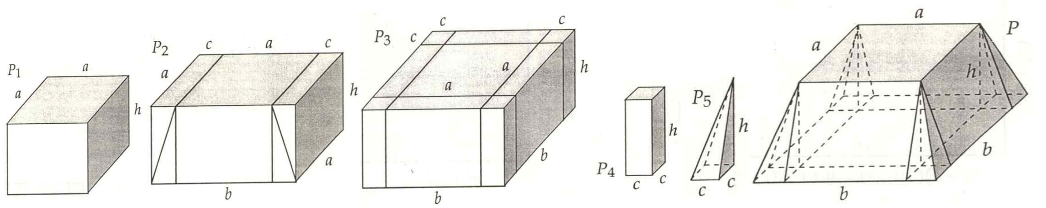


그림 5

$$P_4 = 3P_5, \quad P_1 + P_3 = 2P_2 + 4P_4,$$
$$P_1 + P_2 + P_3 = 3P_2 + 12P_5 = 3(P_2 + 5P_5) = 3P$$

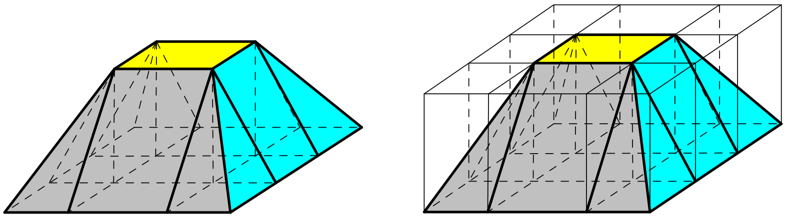
따라서 $P = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$이다. 그러므로 $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$가 된다.

다음으로 <그림 6(a)>에서처럼 각뿔대를 윗면에서 아랫면에 수직으로 절단하게 되면, 가운데에 높이를 h로 하는 한 개의 직육면체와 4개의 삼각기둥, 4개의 사각뿔로 나눌 수 있다. 그러므로 직육면체의 부피는 a^2h, 삼각기둥의 부피는 $\frac{1}{2}a\frac{b-a}{2}h = \frac{1}{4}a(b-a)h$, 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 h$가 된다. 따라서 구하고자 하는 각뿔대의 부피는 다음과 같다.

$$V = a^2h + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot a(b-a)h + 4 \cdot \frac{1}{3}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2 h = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

그리고 <그림 6(b)>와 같이, 밑면을 b로 하고 높이를 h로 하는 직육면체에서 삼각기둥과 사각뿔의 부피를 빼서 각뿔대의 부피를 구할 수 있다.

$$V = b^2h - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot a(b-a)h - 4 \cdot \frac{2}{3}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2 h = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

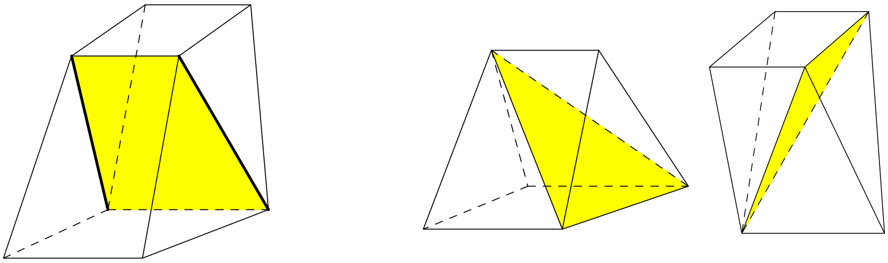


(a) (b)

그림 6

쐐기모양으로 절단

다음은 윗면에서 아랫면으로 쐐기모양이 되도록 아래 <그림 7(a)>과 같이 절단한 사각뿔대의 부피를 구하여 보자.



(a) (b)

그림 7

<그림 7(a)>를 절단하면 <그림 7(b)>와 같이 두 부분으로 나누어지고 각각은 다시 삼각뿔과 사각뿔의 모양으로 절단할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}b^2h+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}bah\right)+\frac{1}{3}a^2h+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}bah\right)&=\frac{h}{3}\left(b^2+\frac{1}{2}ba+a^2+\frac{1}{2}ba\right)\\&=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

또한, Heath([5])는 윗면과 아랫면이 정사각형이 아닌 사각뿔대의 부피를 아래 <그림 8>과 같이 쐐기 모양으로 절단하여 구한 사각뿔대의 부피를 제시하고 있다.

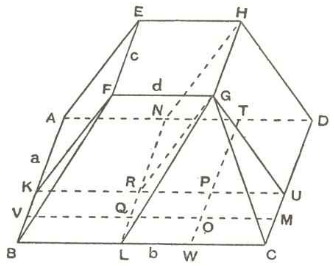


그림 8

아랫면과 윗면의 길이가 서로 다른 두 직사각형 ABCD, EFGH로 이루어진 각뿔대가 있다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$, $\overline{\mathrm{EF}}=c$, $\overline{\mathrm{FG}}=d$이다. $\overline{\mathrm{AK}}$를 $\overline{\mathrm{EF}}$와 같도록 잡고 $\overline{\mathrm{BL}}$도 $\overline{\mathrm{FG}}$와 같도록 잡자. $\overline{\mathrm{BK}}$와 $\overline{\mathrm{CL}}$의 중점을 각각 V, W라 하고 $\overline{\mathrm{AD}}$에 평행하도록 KRPU와 VQOM을 그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$에 평행하도록 LQRN과 WOPT를 그리자. FK, GR, LG, GU, HN을 각각 연결하자.

그러면 높이가 h인 각뿔대는 네 부분으로 나누어진다. (1) 아랫면이 AKRN이 되고 윗면이 EFGH가 되는 평행육면체, (2) 밑면이 KBF, RLG이 되는 각기둥, (3) 밑면이 NDH, RUG가 되는 각기둥, (4) 꼭짓점이 G가 되고, 밑면이 RLCU가 되는 사각뿔로 나누어진다. 각 입체도형의 높이는 h이다. 이것을 다시 정리하면 평행육면체 (1)은 아랫면이 AKRN이고 높이가 h가 되고, 각기둥 (2)는 밑면이 KVQR이고 높이가 h인 평행육면체와 같고, 각기둥 (3)은 밑면이 NRPT이고 높이가 h인 평행육면체와 같고, 마지막으로 사각뿔 (4)는 밑면이 RLCU이고 높이가 h인 평행육면체의 $\frac{1}{3}$과 같다.

따라서 전체 각뿔대의 부피는 높이가 h인 하나의 평행육면체와 같게 나타낼 수 있고 그 밑면을 $\mathrm{AR}+\mathrm{KQ}+\mathrm{NP}+\mathrm{RO}+\frac{1}{3}\mathrm{RO}$ 혹은 $\mathrm{AO}+\frac{1}{3}\mathrm{RO}$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$, $\overline{\mathrm{EF}}=c$, $\overline{\mathrm{FG}}=d$이므로

$$\overline{\mathrm{AV}}=\frac{1}{2}(a+c),\quad \overline{\mathrm{AT}}=\frac{1}{2}(b+c),\quad \overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}(a-c),\quad \overline{\mathrm{RP}}=\frac{1}{2}(b-d)$$

이 된다.

그러므로 각뿔대의 부피는

$$\left\{\frac{1}{4}(a+c)(b+d)+\frac{1}{12}(a-c)(b-d)\right\}h$$

가 된다.

그런데 여기서 밑면의 길이가 각각 같은 정사각뿔대의 부피도 구할 수 있다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{FG}} = c$이므로

$$\left\{\frac{1}{4}(a+c)(a+c) + \frac{1}{12}(a-c)(a-c)\right\}h$$

가 된다. 이것을 간단하게 정리하면

$$\left\{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\right\}h$$

이 된다. 주어진 식은 각각의 밑면의 길이만 알아도 각뿔대의 부피를 구할 수 있다.

사각뿔대를 이용

아래 <그림 9>과 같이 윗면과 아랫면이 한 꼭짓점에서 서로 수직이 되는 사각뿔대의 부피 P_1을 높이 $\frac{h}{b-a}$가 되는 사각뿔대 부피 P_2를 이용하여 구하였다([3]).

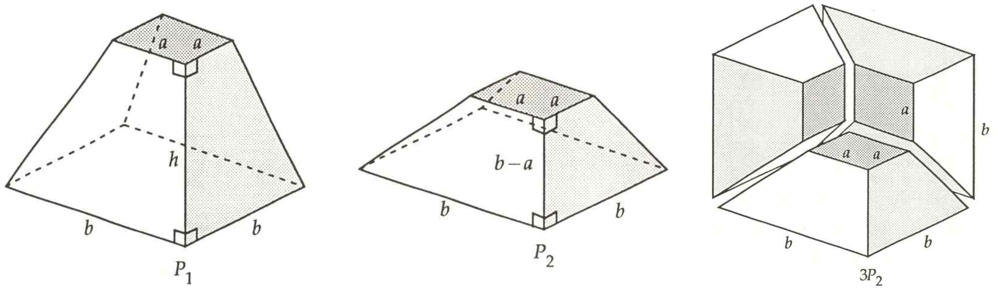


그림 9

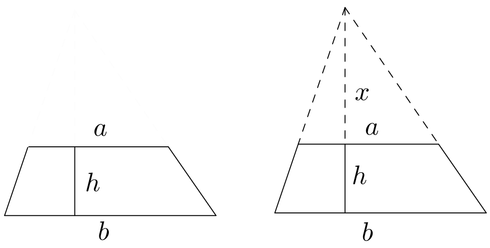
$$P_1 = \frac{h}{b-a}P_2 = \frac{h}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3) = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

이 됨을 알 수 있다.

유추를 이용

각뿔대의 부피를 구하기 위해 우선 사다리꼴의 넓이에 대해서 생각해 보자.

<그림 10(a)>에서처럼 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해서는 <그림 10(b)>와 같이, 밑변이 b이고 높이가 $x+h$인 삼각형의 넓이에서 밑변이 a이고 높이가 x인 삼각형의 넓이를



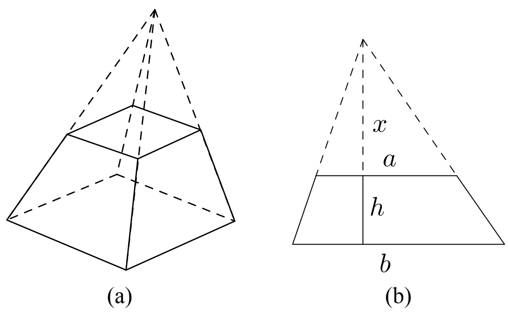
(a) (b)

그림 10

빼면 된다. 그리고 두 삼각형의 밑면이 평행하므로 두 삼각형은 서로 닮음도형이 된다. 그러므로 $x : a = x + h : b$가 성립하고 $x + h = \frac{bh}{b-a}$, $x = \frac{ah}{b-a}$가 된다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}b(x+h) - \frac{1}{2}ax &= \frac{1}{2}h\frac{b^2}{b-a} - \frac{1}{2}h\frac{a^2}{b-a}\\ &= \frac{1}{2}h\frac{b^2-a^2}{b-a}\\ &= \frac{1}{2}h(b+a)\end{aligned}$$

여기서 사다리꼴은 '윗변과 아랫변이 평행하다'는 것과 각뿔대는 '윗면과 아랫면이 역시 평행하다'는 이들의 공통된 속성으로부터 사다리꼴에서 사각뿔대로의 유추 가능성을 얻을 수 있다. 이러한 유추를 바탕으로 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해서 전체 삼각형의 넓이에서 작은 삼각형의 넓이를 뺀 것처럼 사각뿔대의 부피도 역시 다음과 같이 구할 수 있다.



(a) (b)

그림 11

이때, 큰 사각뿔과 작은 사각뿔의 닮음비가 $b : a$이므로 $(x + h) : x = b : a$에서

$x+h=\frac{bh}{b-a}$, $x=\frac{ah}{b-a}$ 이 된다.

따라서, 구하는 (사각뿔대의 부피) = (큰 사각뿔의 부피) − (작은 사각뿔의 부피)가 된다.

적분을 이용

다음은 각각의 윗면과 아랫면의 길이가 각각 같은 정사각뿔대의 부피를 적분을 이용하여 구하여 보자.

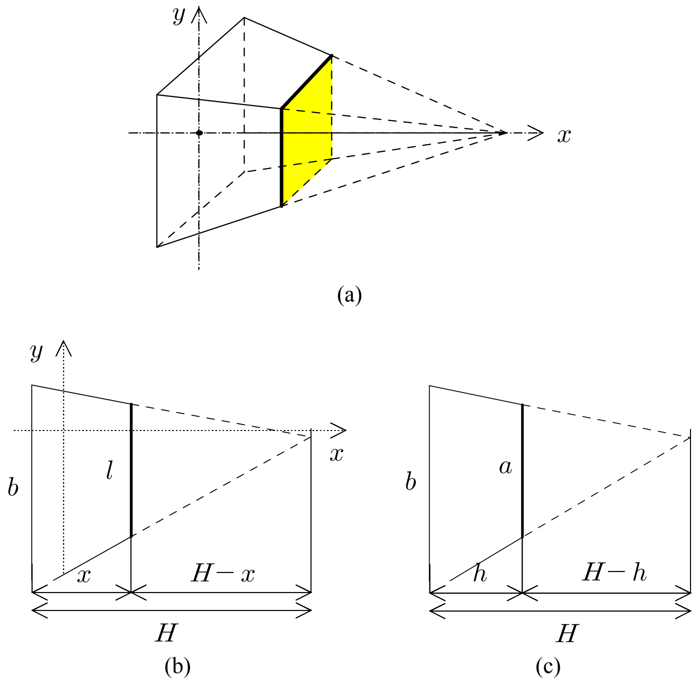


그림 12

<그림 12(a)>에서 색칠된 부분의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하고 둘레의 길이를 $l(x)$라 하면 넓이는 $S=l^2$과 같다. 그리고 둘레의 길이 l은 또한 높이 x에 따라 변하므로 이들 사이의 관계를 나타내면 <그림 12(b)>과 같다. 그리고 아랫면의 길이가 b, 윗면의 길이가 a, 높이가 h인 각뿔대의 단면을 나타내면 <그림 12(c)>와 같이 나타낼 수 있다. 먼저 <그림 12(b)> 에서 $\frac{l}{b}=\frac{H-x}{H}$의 관계가 성립하고 이 식을 l에 관한 식으로 정리하면 $l=\frac{b(H-x)}{H}=b-\frac{bx}{H}\cdots$ ①로 나타낼 수 있다. 또한 <그림 12(c)>에서 $\frac{H}{b}=\frac{H-h}{a}$의 관계가 성립하므로

이 식을 H에 관한 식으로 정리하면 $H=\frac{-bh}{a-b}\cdots$ ②가 된다. ②식을 ①식에 대입하면

$$\begin{aligned} l &= b-\cfrac{bx}{\cfrac{-bh}{a-b}} \\ &= b-\frac{x(a-b)}{h} \\ &= b+\frac{ax}{h}-\frac{bx}{h} \end{aligned}$$

그러므로 $S=\left(b+\frac{ax}{h}-\frac{bx}{h}\right)^2$이 된다. 따라서 구하고자 하는 부피 V는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left(b+\frac{ax}{h}-\frac{bx}{h}\right)^2 dx \\ &= \int_0^h \left(a^2+\frac{2abh}{h}-\frac{2a^2}{h}-\frac{2abx^2}{h^2}+\frac{a^2x^2}{h^2}+\frac{b^2x^2}{h^2}\right) dx \\ &= a^2x+\frac{ab}{h}x^2-\frac{a^2}{h}x^2-\frac{2ab}{3h^2}x^3+\frac{a^2}{3h^2}x^3+\frac{bx^3}{h^2}\Bigg]_0^h \qquad = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

각뿔대 부피의 일반화

바빌로니아인들은 각뿔대의 부피를 구하기 위해서 근삿값으로 산술평균을 이용해서 구했다는 흔적들이 발견되고 있다는 것은 그 당시에도 산술평균을 이용할 수 있다고 추측할 수 있으며, 아래 <그림 13(a)>는 정사각뿔대의 단면이다. 아랫변과 윗변의 길이가 각각 a, b라 할 때, 직사각형의 밑변의 길이를 산술평균을 이용하여 구하면 $\frac{a+b}{2}$이 되고, 그 각뿔대의 부피는 $V=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h$이 된다고 생각하였다.

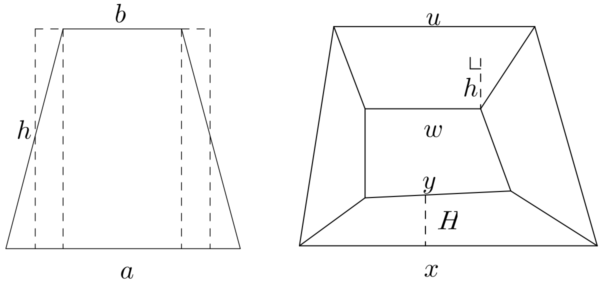
또한, <그림 13(b)>와 같이, 바빌로니아인들은 각뿔대의 부피를 계산하는 방법도 알고 있었는데, 예를 들어 다음과 같이 부등변각뿔대의 부피는 공식

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{u+w}{2}\right)\cdot\frac{H+h}{2}$$

을 이용하여 계산하였다([1]).

그렇다면 각각의 밑면의 산술평균을 이용하여 부피를 구하여 보자.

$$V=\frac{h}{6}(2a^2+2ab+2b^2)=\frac{h}{6}(a^2+(a^2+2ab+b^2)+b^2)$$



(a) (b)

그림 13

여기서 $a^2+2ab+b^2=4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 로 나타낼 수 있다. 즉 윗면과 아랫면의 길이의 산술평균에 해당하는 중간 단면은 한 변의 길이가 $\frac{a+b}{2}$ 이 되는 정사각형이 된다. 따라서 a^2+ab+b^2 은 중간 단면의 넓이의 4배와 같다.

입체도형의 부피는 밑면과 높이에 따라 변하므로 여기서 높이가 h로 일정하다면 밑면의 넓이에 따라 변한다. 즉 밑면이 다각형인 각뿔대와 원인 원뿔대의 부피도 구할 수 있으므로 이 공식은 아랫면, 중간 단면, 윗면이 정사각형이 아니라 다각형으로 확장시킬 수 있다. 따라서 입체도형에서 아랫면의 넓이 G_1, 중간 단면의 넓이 G_2, 윗면의 넓이를 G_3, 높이를 h라 할 때 주어진 입체도형의 부피를 다음과 같이 일반화 시킬 수 있다.

$$V=\frac{h}{6}(G_1+4G_2+G_3) \tag{1}$$

로 나타낼 수 있다. (1)식은 18C 영국의 수학자 Simpson이 발견한 부피를 구하는 공식이 된다([9]).

이 공식은 기둥, 뿔, 구의 부피에도 적용된다.

먼저 <그림 14>에서처럼, 기둥의 부피는 밑면의 넓이가 같으므로 즉, $G_1=G_2=G_3$ 이므로

$$V=\frac{h}{6}(G_1+4G_2+G_3)=G_1h$$

와 같이 '기둥의 부피 = 밑넓이 × 높이'를 얻을 수 있다. 특히 반지름이 r인 원기둥의 부피는 $G_1=G_2=G_3=\pi r^2$ 이고 높이는 h이므로 그 부피 $V=\pi r^2 h$ 이다.

다음으로 <그림 15>에서처럼, 뿔의 부피에 대해 알아보자. 먼저 각뿔인 경우에 윗면의 넓이 $G_3=0$ 이고, 중간 단면과 아랫면은 닮음도형이 되고 그 닮음비는 $1:2$라 할 수 있

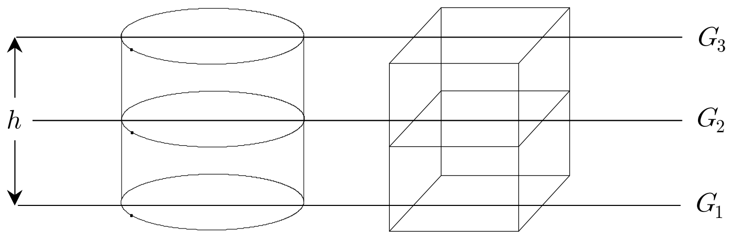


그림 14

다. 그러므로 중간 단면의 넓이는 밑면의 넓이의 $\frac{1}{4}$과 같다. 즉, $G_2 = \frac{1}{4}G_1$이므로

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(G_1 + 4G_2 + G_3) = \frac{h}{6}(G_1 + 4 \cdot \frac{1}{4}G_1 + 0) \\ &= \frac{1}{3}G_1 h \end{aligned}$$

와 같이 '각뿔의 부피 $= \frac{1}{3}$밑넓이 $\times$ 높이'를 얻을 수 있다. 또한 반지름이 r인 원뿔의 경우에 $G_1 = \pi r^2$, $G_2 = \frac{1}{4}G_1 = \frac{1}{4}\pi r^2$, $G_3 = 0$가 된다. 그러므로 원뿔의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(G_1 + 4G_2 + G_3) = \frac{h}{6}(\pi r^2 + 4 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 + 0) \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

다음으로 반지름 r인 구의 경우의 부피는 $G_1 = 0$, $G_2 = \pi r^2$, $G_3 = 0$가 되며 그 높이 $h = 2r$과 같다. 그러므로

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}(G_1 + 4G_2 + G_3) = \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

이 Simpson의 공식은 평면도형의 도형의 넓이를 구하는데도 이용될 수 있다. 사다리꼴의 경우에 밑변의 길이를 g_1, 윗변의 길이를 g_3라 할 때, 중간 단면의 길이는 $g_2 = \frac{g_1+g_3}{2}$이므로

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{6}\Big(g_1 + 4 \times \frac{g_1 + g_3}{2} + g_3\Big) \\ &= \frac{1}{2}h(g_1 + g_3) \end{aligned}$$

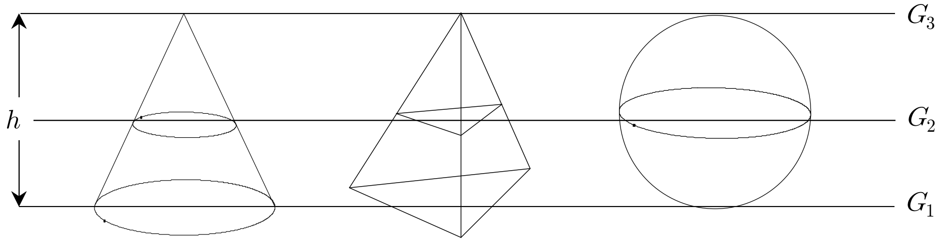


그림 15

와 같이 '사다리꼴의 넓이 = (밑변의 길이 + 윗변의 길이) × 높이 ÷ 2'를 얻을 수 있다. 또한, 평행사변형(직사각형, 정사각형)인 경우는 $g_1 = g_2 = g_3$가 되므로 $S = \frac{h}{6}(g_1 + 4g_1 + g_1) = g_1 h$가 된다. 삼각형인 경우에는 윗변 $g_3 = 0$가 되고, 닮음비에 의해서 중간 단면의 길이와 밑변의 길이의 비가 $1:2$가 되므로 $g_2 = \frac{1}{2} g_1$이다.

그러므로 $S = \frac{h}{6}\left(g_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} g_1 + 0\right) = \frac{1}{2} g_1 h$가 되다. 즉 '삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2} \times$ 밑변 $\times$ 넓이'가 됨을 알 수 있다.

3 요약 및 제언

고대 이집트의 수학적 지식들은 모스크바 파피루스에 기록된 내용을 중심으로 축적되었으며, 파피루스 14번 문제에는 윗면과 아랫면이 모두 정사각형인 각뿔대의 부피가 정확히 계산되어 있고 그 계산의 결과는 놀라울 정도로 정확하다.

고대 이집트 시대에 각뿔대의 부피가 어떻게 구하여 졌는지 Prasolov의 연구를 중심으로 살펴보았고, 대부분의 중학교 교과서에는 윗면과 아랫면의 닮음만을 이용하여 즉, (사각뿔대의 부피) = (큰 사각뿔의 부피) − (작은 사각뿔의 부피)를 이용한 풀이가 제시되어 있다.

따라서, 본 연구에서는 사각뿔대의 부피를 구하는 다양한 방법으로 첫째, 직육면체, 삼각기둥, 사각뿔을 이용, 둘째, 쐐기모양으로 절단, 셋째, 사각뿔대를 이용, 넷째, 유추를 이용, 다섯째, 적분의 이용 등 다양한 풀이 방법에 대하여 고찰하여 보았다. 또한 18세기 영국의 수학자 Simpson이 발견한 입체도형의 부피를 일반화한 공식 $V = \frac{h}{6}(G_1 + 4G_2 + G_3)$에 대하여 살펴보았고, 이 공식은 평면도형의 넓이를 구하는데도 이용될 수 있었다.

본 자료는 사각뿔대의 부피를 구하는 다양한 방법을 탐구함으로써 학생들의 문제해결력

신장이나 창의성을 기르는 자료로 사용될 수 있을 것이라 기대된다.

참고 문헌

[1] 한인기,『교사를 위한 수학사』, 교우사, 2005.

[2] Boyer, C. B., Merzbach, U. C., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., (역) 양영오, 조윤동(2002),『수학의 역사 · 상』, 경문사, 2002.

[3] Nelsen, R. B., *Proof Without Words — Exercises in Visual Thinking*, The Mathematics Association of America, 1997.

[4] Nelsen, R. B., *Proof Without Words* II *— Exercises in Visual Thinking*, The Mathematics Association of America, 2001.

[5] Heath, T., *A History of Greek Mathematics Volume* II *— From Aristarchus to Diophantus*, Dover Publications Inc., 1981.

[6] 류희찬, 류성림, 한혜정, 강순모, 제수연, 김명수, 천태선, 김민정,『중학교 수학 1』, 대한교과서(주), 2009.

[7] 이영하, 허민, 박영훈, 여태경,『중학교 수학 7-나』, 교문사, 2001.

[8] 박윤범, 박혜숙, 권혁천, 육인선,『중학교 수학 7-나』, 대한교과서(주), 2001.

[9] Simpson, T., *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward, London, 1743.

[10] `http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/Classwork/Phil380/08Moscow%20Papyrus.pdf`

[11] `http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson's_rule`

[12] `http://www.mathpages.com/home/k`

The Study for the Various Methods for the Volume of Frustum of Pyramid

Gyeongsang National University and RINS Dae Won Yoon
Chungggu High School Dong Keun Kim

This is the study for various methods for getting the volume of frustum of pyramid. This study will first deal with how the formula of getting the volume of frustum of pyramid has been changed in the history of Mathematics. Secondly, based on the study of 'Prasolov' this study will deal with the calculation method for the volume of frustum of pyramid which was written in the 14th question of 'Moscow Papyrus' and search for the rules of solution for frustum of pyramid in the middle school textbooks. Finally, this study will consider various solutions for the volume of frustum of pyramid and its generalization.

Key Words: History of mathematics, Simpson's formula, Generalization.

2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
ZDM Classification: A34

접수일 : 2010년 5월 20일 수정일 : 2010년 7월 23일 게재확정일 : 2010년 7월 25일