한국수학사학회지 제23권 제3호 (2010년 8월) 57–73

초월수의 역사와 미해결 문제*

경원대학교 수학정보학과 박춘성
cspark@kyungwon.ac.kr

건국대학교 수학교육과 안수엽
galaxyahn@hanmail.net

초월수의 연구는 2000년 이상 수학자들을 괴롭혀 왔던 고대 그리스의 기하학 문제의 하나인 원적문제가 불가능하다는 것을 보여줌으로써 수학사의 중요한 분야임을 입증하였다. Liouville은 1844년에 처음으로 구체적인 초월수의 예를 제시하였고, 칸토어는 1874년에 초월수의 존재성을 증명하였다. Louville 정리는 많은 초월수를 만들어 낼 뿐 아니라 초월수의 존재성을 증명하는데 이용할 수 있다. 1873년에 Hermite가 자연로그의 밑수 e가 초월수임을 보이고, 1882년에 Lindemann이 원주율 π가 초월수임을 증명하였다. 1934년에 Gelfond와 Schneider는 각각 힐버트의 7번째 문제에 대한 서로 다른 완전한 해를 찾았다. 1966년에 Baker는 Gelfond-Schneider 정리의 일반화된 결과를 증명하였다. 이 연구의 목적은 초월수의 개념과 발달과정을 살피고, 미해결 문제를 제시하여 초월수의 연구가 촉진되도록 후학들에게 연구 동기를 부여하고자 한다.

주제어 : 초월수(Transcendental numbers), Liouville 수(Liouville numbers), 대수적 독립(Algebraically independent), 힐버트의 7번째 문제(Hilbert's seventh problem), Lindemann-Weierstrass 정리(Lindemann-Weierstrass theorem), Gelfond-Schneider 정리(Gelfond-Schneider theorem), Zeta 함수(Zeta function).

1 서론

수학의 여러 분야 중 방정식만큼 우리의 일상생활과 밀접한 관계가 있는 것도 찾기 어렵다. 방정식은 실생활에서 발생하는 여러 가지 문제 상황을 간단히 해결하기 위해 사용된

* 이 연구는 2009년도 경원대학교 지원에 의한 결과임

하나의 문제해결방법이라 할 수 있다. 동양 최고(最古)의 수학서인 중국의 「구장산술(九章算術)」에서 '方은 좌우, 程은 비율을 매김의 뜻이며, 다루는 전체 물건들의 비율을 풀어내는 방법을 '방정'이라 한다고 설명한다[1].

9세기 전반(AD 820경) 아라비아의 수학자 알콰리즈미(Alkhwarizmi, 780-850)의 대수학 저서 "*al-gebr w'al-muqubala*"에는 일차, 이차방정식의 풀이법이 있다. 여기서 al-gebr는 오늘날의 '이항'을, almuqubala는 '동류항을 정리한다'를 뜻하며, 대수학을 뜻하는 al-gebra는 아랍어로 '복원'을 뜻하는 al-gebr에서 유래하고, 문제를 해결하기 위한 절차나 방법을 뜻하는 알고리즘(algorithm)은 Alkhwarizmi에서 유래하였다. 그러나 알렉산드리아 시대의 디오판토스, 알콰리즈미가 살던 시대에는 음수의 개념이 없었으므로 양의 근에 대한 상세한 계산 방법뿐이었다[8]. 16세기 이탈리아의 카르다노(Girolamo Cardano, 1501-1576)는 음의 근의 존재를 명확히 인식한 최초의 수학자이다. 카르다노 이전까지는 이차, 삼차방정식의 양의 근만을 인정하였을 뿐이다. 삼차방정식의 해법에 처음으로 성공한 사람은 이탈리아의 페로(Ferro, 1465-1526)라고 한다. 그는 양의 정수 p, q에 대하여 $x^3 + px = q$과 같은 형태의 삼차방정식의 해법을 발견하였다고 한다. 이탈리아의 타르탈리아(Niccolo Tartaglia, 1499-1557)[1)]는 일반적으로 사칙연산과 거듭제곱근을 사용하여 삼차방정식의 근의 공식(타르탈리아−카르다노의 공식)을 유도하는 데에 성공하였다. 사차방정식의 해법은 카르다노의 제자인 페라리(Lodovico Ferrari, 1522-1565)에 의하여 발견되었다(페라리의 공식). 카르다노는 1545년에 삼차, 사차방정식의 해법을 대수학의 저서 'Ars Magna'[2)]에 발표하였다. 이 저서에서 처음으로 허수가 문헌에 등장하였다.

그러나 허수를 감싸고 있던 신비의 베일을 벗기고 복소수의 완벽한 정의[3)]를 제시한 사람은 19세기 최대의 수학자 가우스(Gauss, 1777-1855)라고 할 수 있다. 수의 범위를 복소수까지 확장하면 '대수학의 기본정리'라고 불리는 "복소수를 계수로 하는 임의의 n차방정식은 복소수의 범위에서 n개(중복도 포함)의 근을 가진다."는 것이 1799년 가우스에 의하여 증명되었다. 그러나 5차 방정식의 일반해를 찾는 데 심혈을 기울였지만, 근을 구하는 방법은 좀처럼 알아낼 수 없었다. 19세기 초에 파울로 루피니(Ruffini, 1765-1822)는 "실계수 5차 이상의 방정식의 근은 그 계수들의 사칙연산과 제곱근 연산 $\sqrt[n]{\ }$만을 이용하

1) 타르탈리아의 본명은 폰타나(Nicolo Fontana)였다. 타르탈리아는 '말더듬이'라는 뜻인데 이 이름은 그가 어렸을 때 마을을 침략한 프랑스 병사들에 의하여 큰 상처를 입은 뒤에 붙여진 별명이다. '위대한 학문'(Ars magna)이란 책은 대수학만을 다룬 최초의 라틴어 논문이었는데, 여기에 나오는 3차 방정식의 해법에 관한 내용은 사실 타르탈리아가 발견한 것을 카르다노가 발표한 것이다.

2) 아르스 마그나(Artis Magnæ, Seu de Regulis Algebraicis, Liber Unus), The Rules of Algebra

3) 허수는 1572년 이탈리아의 수학자 Rafael Bombelli에 의해 최초로 정의되었다.

여서 구할 수 없다."는 정리의 증명을 발표하였으나, 그 증명에는 결함이 있었다. 노르웨이의 수학자 아벨(Abel, 1802-1829)은 1824년에 약 3세기 동안 수학의 난제였던 5차 방정식(quintic equation)의 대수적 해법을 연구하여, 그 불가해성(不可解性)을 증명하였다. 아벨은 5차 방정식에 관한 논문 "*Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la solution générale de l'équation du cinquième degré*"을 자비로 인쇄하여, 그 일부를 가우스에게 보냈으나, 가우스는 그것을 읽어 보지도 않고 쓰레기통에 버렸다고 한다. 그 후 21세의 갈루아(Galois, 1811～1832)는 다항식의 근의 문제를 확대체(분해체)의 문제로 해석하고, 확대체를 분석하기 위한 갈로아군을 도입하여 소수 차수의 기약방정식이 근 기호만으로 사용하여 풀 수 있는 조건을 제시하였다.

자연수의 세계에서 복소수의 세계로 수를 확장해가면서 '비현실적'으로 보였던, 음수나, 무리수, 허수는 순수하게 수학적인 아름다움을 주는 것 말고도 '현실적'으로도 매우 유용하다는 것을 알게 되었다. 여기서 유리수에서 실수로 넘어가면서 신비로운 수들이 등장하여 유리수가 채우지 못한 직선의 점들을 가득 메운다. 17세기 후반 라이프니츠는 대수방정식의 근을 연구하면서 '신비로운 수'들이 있음을 인식하였다. 오일러는 대수방정식의 근이 아닌 수를 "대수적 방법의 힘을 넘어서는(transcend the power of algebraic methods)"라고 하였다.

정수 계수를 갖는 다음의 대수방정식의 근을 대수적 수(algebraic number)라고 한다.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

유리수는 $px - q = 0$의 근의 형태이므로 대수적 수이며, 무리수 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 각각 $x^2 - 2 = 0$와 $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$의 근이므로 역시 대수적 수이다.

1873년에 칸토어(Georg Cantor, 1845-1918)는 유리수와 대수적 수가 자연수와 일대일 대응임을 증명하였다. 그러나 실수도 그런지에 대해서는 당장은 증명하지 못했고 그 해 겨울에 '대각선 논법'(diagonal argument)을 이용하여 실수 집합이 비가산임을 증명할 수 있었다. 그리고 이 결과는 이듬해 출판되었고 이 논문[4]에서 최초로 일대일 대응이라는 개념이 묵시적이지만 소개되었다. 1878년에 Crelle's Journal에 실린 차원에 관한 논문[11]은 일대일 대응의 개념을 좀 더 명확하게 소개하였고, 자연수와 일대일 대응이 성립하는 집합(denumerable sets)에 대하여 설명하였다. 정수를 계수로 하는 대수방정식의 근으로서 구할 수 없는 복소수를 초월수(transcendental number)라고 한다. Liouville은 1844년에 그

4) 논문의 영문 제목 On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers [10].

런 수의 존재성에 대해 증명하였다. 30년이 지난 1874년에 칸토어가 실수의 집합이 비가산이고, 대수적 수가 가산임을 통해, 사실상 거의 모든 수가 초월수임을 증명하였다[10]. 대수적 수가 실수 집합을 포함하지 않는 이유는 대수적 수에 허수가 포함되어 있기 때문이다. 예를 들면, $x^2+1=0$을 만족하는 수는 허수이다.

이 연구의 목적은 초월수의 개념과 발달과정을 살펴보면서 미해결된 문제를 제시하여 후학들에게 연구 동기를 제공하고자 한다. 본 논문에서는 Q를 유리수의 집합, C를 복소수의 집합, 그리고 $\overline{Q}$를 대수적 수의 집합으로 표시한다.

2 초월수의 개념과 탄생

수학적으로 초월수란 "덧셈, 곱셈, 거듭제곱법의 대수적 연산이나 역연산 등의 방식으로 얻어지는 개념이 아니다."라고 정의할 수 있다[34]. 철학적 개념으로 본다면 초월수는 물질적 세계와는 별개로 존재하는 것이며, 또한 물질적 세계의 한계성에 지배되는 개념도 아니다: 1. 초월적인 것이다. 2. 칸트 철학에서 말하는 경험에 이미 전제되어 있는 것이고 그 경험에 필수적인 개념이기도 하다. 즉, 선험적 개념이다. 또한 셸링[5] 철학에서 말하는 물질이나 객관적인 것들을 주관적 마음의 산물로 설명하는 것이다. 특히, 에머슨[6] 철학에서 말하는 신적인 것을 인간의 지침서라고 여기는 것이다. 3. 추상적이며, 아리송하고, 잘 알려져 있지 않은 것이다[30].

초월수란 한마디로 심오한 개념이다. 이것은 라이프니츠와 오일러가 인식한 신비롭고, 인간의 경험을 넘어서는, 즉 초월하는 개념이다. 또한 독특한 개념이며 그 자체로 완성된 개념으로 해석할 수 있다.

1673년 라이프니츠는 그의 논문 "*Progressio figurae segmentorum circuli aut ei sygnotae*"에서 *transcendens*를 사용하여 수학에서 transcendental이라는 용어를 만들었고, '*transcendental number*'(1704)라는 표현을 처음으로 사용한 수학자이다[24]. 오일러는 1733년 논문 "*Constructio aequationum quarundam differentialium quae indeterminatarum separationem non admittunt*"에서 다음과 같이 transcendental를 사용하였고, 초월수를 현대적인 의미로 정의한 최초의 수학자로 추측된다[13].

"Now there are kinds of constructions, which can be called *transcendental*,

5) 셸링(Friedrich Schelling, 1775～1854) 독일의 철학자. 독일 관념론의 대표적인 사람.
6) 에머슨(Ralph Emerson, 1803-1882) 보스턴 출신의 시인, 사상가, 목사. 이지(理知)에 의한 추론의 확실성보다 상상력에 의한 초월을 열망하는 것이 에머슨 사상의 출발점이다.

which arise in solving differential equations and cannot be transformed into algebraic equations."

1844년 프랑스의 수학자 Joseph Liouville(1809-1882)은 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$이 초월수임을 증명함으로써 최초로 명확하게 초월수가 존재함을 제시하였다. 그는 무리수를 유리수로서 근사하는 것에 관한 하나의 중요한 정리를 발견하여 그것에 근거를 두고서 실수의 임의의 구간 내에 무한히 많은 초월수가 포함되어 있음을 증명하였다. Liouville은 초월수의 존재성에 대한 구성적인 증명(constructive proof)인 반면에, 1874년 초월수의 존재성에 관한 칸토어의 증명은 초월수를 구체적으로 제시하지 않은 비구성적인 증명(non-constructive proof)이다. 이 부분에 대하여 인용한 글을 생각해 보자[19].

"The contrast between the methods of Liouville and Cantor is striking, and these methods provide excellent illustrations of two vastly different approaches toward proving the *existence* of mathematical objects. Liouville's purely *constructive*; Cantor's is purely *existential*."

임의의 양의 정수 n에 대하여 $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$를 만족하는 정수 p와 $q > 1$가 존재할 때 실수 α를 Liouville 수(Liouville number)라고 한다. 이 정의로부터 모든 Liouville 수는 무리수임을 알 수 있다. 실제적으로, 유리수라고 가정하면 $\alpha = \frac{a}{b}$를 만족하는 정수 a, b가 존재한다. n을 $2^{n-1} > b$인 양의 정수, $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$인 임의의 정수 p와 $q > 1$에 대하여

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{2^{n-1}q} > \frac{1}{q^n}$$

이므로 정의에 모순이다.

도움정리 2.1. α를 $n(> 1)$차 다항식의 근인 무리수라고 하자. 그러면 모든 정수 p와 $q > 0$에 대하여 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{n+1}}$이 성립한다.

위 정리에서는, 무리수인 대수적 수는 유리수에 근사하지만, 매우 충분하게 근사적으로 접근하지 않음을 설명하고 있다. 아무리 근사적인 유리수 $\frac{p}{q}$에 대해서도 n과 유리수의 분모 q로 이루어진 정해진 어떤 구간 $\frac{1}{q^{n+1}}$보다 더 근사적으로 다가갈 수는 없다는 것을 말해주고 있다. 위 정리를 좀 더 일반화하면 다음과 같다.

도움정리 2.2 (Liouville 정리, 1844)**.** α를 $n(> 1)$차 대수적 무리수라고 하자. 그러면 모든 정수 p와 $q > 0$에 대하여 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{M}{q^n}$이 성립하는 양수 $M = M(\alpha)$이 존재한다.

위 정리에서 $2^m \geq \frac{1}{M}$ 을 만족하는 양의 정수 m에 대하여 α가 Liouville 수이면

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+m}} < \frac{1}{2^m q^n} < \frac{M}{q^n}$$

이 성립하는 정수 p와 $q > 1$가 존재한다. 이것은 위 도움정리의 부등식에 모순이다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 2.3 (Joseph Liouville, 1844)**.** 모든 *Liouville* 수는 초월수이다.

임의의 정수 $m \neq 1$에 대하여 $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k!}}$ 이라고 놓자. 이 급수의 부분합을 s_n이라고 하면 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m^{k!}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{m-1}$ 이므로 $0 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ 이 성립한다. 따라서 α는 수렴하는 급수이다. 고정된 양수 n과 정수 $p, q = m^{n!}$에 대하여 $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m^{k!}}$ 이라면

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k!}} < \sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{m^{(n+1)!-1}} \leq \frac{1}{m^{n(n!)}} = \frac{1}{q^n}$$

이므로 α는 초월수이다.

노르웨이의 수학자 Axel Thue(1863-1922)는 1909년에 Liouville의 부등식을 처음으로 일반화하였다[31].

정리 2.4 (Thue, 1909)**.** α가 차수 $n \geq 3$인 대수적 실수일 때, 모든 $\frac{p}{q} \in Q$에 대하여 다음 부등식이 성립하는 양수 $c = c(\alpha, \epsilon) > 0$가 존재한다.

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > cq^{-1-\epsilon-n/2}$$

정리 2.5 (Roth, 1955 [27])**.** α가 차수 $n \geq 3$인 대수적 실수일 때, 모든 $\frac{p}{q} \in Q$에 대하여 다음 부등식이 성립하는 양수 $c = c(\alpha, \epsilon) > 0$가 존재한다.

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > cq^{-2-\epsilon}$$

영국의 수학자 클라우스 로스(Klaus Roth, 1925-)는 디오판토스 근사(Diophantine approximation), 큰 체(large sieve), 소수 분포의 불규칙성에 대한 연구로 유명하다. 그의 가장

유명한 결과는 1955년에 증명한 Thue-Siegal-Roth 정리로, 간단하게 로스의 정리(Roth’s theorem)로 불리기도 한다. 이 업적을 인정받아 1958년에 필즈상(Fields Medal)을 수상하였다. 1956년에는 양의 밀도를 가지는 정수들의 집합에 길이가 3 이상인 등차수열이 무한히 많이 포함되어 있다는 것을 증명하였는데, 이 결과로 인해서 처음으로 세메레디 정리(Szemerédi’s theorem)[7]의 흥미로운 예를 만들 수 있게 되었다.

Liouville 수에 관하여, 1962년에 헝가리의 수학자 Paul Erdös(1913-1996)[8]는 다음과 같은 흥미로운 결과를 증명하였다[12].

정리 2.6 (Erdös)**.** 0이 아닌 모든 실수는 두 *Liouville* 수의 합과 곱으로 표현할 수 있다.

두 복소수 α와 β를 대수적 종속(algebraically dependent)이라 함은 $P(\alpha,\beta)=0$를 만족하는 정수 계수를 갖는 0이 아닌 다항식 $P(x,y)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}a_{ij}x^iy^j$이 존재할 때 이고, 그렇지 않은 경우를 대수적 독립(algebraically independent)이라고 한다. 최근에는 실수인 모든 초월수는 대수적으로 선형독립인 두 Liouville 수의 합으로 분해할 수 있다는 결과도 알려져 있다[9].

3 중요한 초월수들

초월수의 존재성에 대한 증명과 어떤 특별한 수가 초월수임을 증명하는 것은 매우 다른 문제이다. 1761년에 원주율 π가 무리수임을 처음으로 증명한 논문에서 스위스의 수학자 Johann Lambert는 자연로그의 밑수 $e=2.71828\ldots$과 π는 모두 초월수임을 예상하였다[20]. 1873년 프랑스의 수학자 샤를 에르미트(Charles Hermite, 1822-1901)에 의하여 e가 초월수임을 밝혀졌다[14]. e는 초월수의 존재를 증명하기 위해 특별히 고안된 수들을 빼 놓고 초월수 개념이 나오기 전에 알려져 있던 수들 중에 최초로 초월수임이 증명된 수이다. 힐버트(David Hilbert, 1862-1943)는 에르미트의 원문를 단순화하여 증명하기도 하였다[15]. 원주율 π가 초월수라는 사실은 1882년 독일의 수학자 린데만(Ferdinand Linde-

7) 세메레디의 정리(Szemerédi’s theorem)는 정수의 밀도와 등차수열의 발생의 관계에 관한 조합론적 정수론 정리이다. 1936년 P. Erdös와 Turán이 가설을 세웠고, 세메레디(Szemerédi)가 1975년에 복잡한 조합론적 방법을 이용하여 증명하였다.

8) Erdös의 증명의 특징은 복잡한 문제를 아름답고 시각적인 방법으로 푼다는 점이다. 그는 1951년 수론 분야의 여러 논문으로 미국수학회(American Mathematical Society)에서 수여하는 Cole Prize를 수상하였다. 그는 누구든지 자신의 연구와 관련된 주제를 가지고 온 수학자라면 함께 논문을 썼다. 결과적으로 거의 1500개의 공동 논문을 발표하여, 지금까지의 역사상 가장 공동연구를 많이 한 수학자가 될 것이다. 그와 공동연구를 했던 수학자들은 ‘Erdös 수’란 말까지 만들어 냈다. 혼자서는 논문을 거의 내지 않았기 때문에, 그는 누구보다도 수학을 ‘사회적 활동’으로 만든 수학자라고 할 수 있다[위키백과].

mann, 1852-1939)의 논문 "π가 초월수라는 연구"에서 에르미트의 것과 유사한 방법으로 증명되었다[21]. π가 초월수라는 것이 증명되어 3대 작도불능 문제의 하나인 원적 문제(squaring the circle), 즉 자와 컴퍼스를 유한 번 사용하여 원의 넓이와 같은 한 변의 길이가 $\sqrt{\pi}$인 정사각형을 작도하는 것은 불가능하다는 것이 자명하게 된다. 참고로, 임의의 각의 3등분 문제(trisecting the angle)와 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하는 배적 문제(doubling the cube)는 1837년에 프랑스의 수학자 완첼(Pierre Wantzel, 1814-1848)에 의하여 초등기하작도가 불가능하다고 증명되었다[32].

정리 3.1 (Lindemann-Weierstrass 정리 [6]). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$은 서로 다른 대수적 수이고, $\beta_1, \ldots, \beta_n$은 모두 0이 아닌 대수적 수일 때 다음이 성립한다.

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

이 정리는 α_i, β_i가 정수인 특별한 경우에 에르미트(1873)가 증명하였고[14], 대수적 수인 경우에 대해서는 린데만(1882)에 의하여 증명되었다[22]. 이런 의미에서 이 정리는 Hermite-Lindemann 정리로 불리기도 한다. 그 후에 해석학의 아버지로 불리는 독일의 수학자 바이어슈트라스(Karl Weierstrass, 1815–1897, [33])와 Gordan(1893, [18])에 의하여 증명이 일반화되었다. 이 정리로부터 몇 가지 사실을 알 수 있다. 먼저 e와 π는 초월수임이 자명하다. 실제로, e가 대수적이라면 e는 정수 계수를 갖는 다항식 $\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$의 근이다. 즉, 모두는 0이 아닌 유리수 $\beta_1, \ldots, \beta_n$이 존재하여 $\beta_1 e^1 + \cdots + \beta_n e^n = 0$이다. 이것은 정리에 모순이다. 그리고 0이 아닌 대수적 수 α에 대하여 e^α, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$는 초월수이다. 만약, $e^\alpha \in \overline{Q}$이고 $e^\alpha = \beta$라고 하자. $\alpha \neq 0$이므로 $e^\alpha - \beta e^0 = 0$이므로 정리에 모순이다. 또한 오일러의 항등식으로부터 $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$는 초월수이므로 e^α의 실수부 $\mathrm{Re}(e^{i\alpha}) = \cos\alpha$와 허수부 $\mathrm{Im}(e^{i\alpha}) = \sin\alpha$는 모두 초월수이다. 또한 $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$인 대수적 수 α에 대하여 $\log\alpha = \beta$라고 하면 $e^\beta = \alpha$는 대수적 수이므로 β는 대수적 수가 될 수 없다. 따라서 $\log\alpha$는 초월수이다. 더 나아가 위 정리의 조건하에서 유한합 $\sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$은 초월수이다. 실제로

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} = \alpha \in \overline{Q}$$

이라고 가정하고, $\beta_{n+1} = -\alpha$, $\alpha_{n+1} = 0$으로 놓자. 그러면 $\sum_{i=0}^{n+1} \beta_i x^i = 0$이다. 가정에 의하여 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$은 서로 다른 대수적 수이고, $\beta_i (1 \leq i \leq n+1)$는 모두 0이 아닌 대수적 수이므로 정리에 모순이다. 예를 들면, $\dfrac{(e^{\sqrt{5}})^5 + \sqrt[3]{11}e^{2-\sqrt{7}}}{3\sqrt{5} - e^3}$은 초월수이다.

이것을 좀 더 확장하여 Robinson은 다음과 같은 더 많은 초월수를 얻었다[26].

정리 3.2 (Robinson)**.** 대수적 수 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$에 대하여 $e^{\alpha} \cos \beta$는 초월수이고, $\beta \neq 0$에 대하여 $e^{\alpha} \sin \beta$와 $e^{\alpha} \tan \beta$는 초월수이다.

(2) $\alpha \neq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (1,0)$에 대하여 $\log(\alpha \cos \beta)$는 초월수이고, $\alpha\beta \neq 0$에 대하여 $\log(\alpha \sin \beta)$와 $\log(\alpha \tan \beta)$는 초월수이다.

Lindemann-Weierstrass 정리의 다른 형태를 소개하면 다음과 같다.

정리 3.3 (Lindemann-Weierstrass 정리 [6])**.** 유리수 Q 위에서 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$은 선형독립인 대수적 수라 하면 $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$도 Q 위에서 대수적 독립 *(algebraically independent)* 이다.

이 정리는 0이 아닌 다항식 $P \in Z[X_1, \ldots, X_n]$에 대하여

$$P(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) \neq 0$$

임을 의미한다. 만약, π가 대수적 수라고 가정하면, $2i$가 대수적 수이므로 $2\pi i$도 대수적 수이다. 그러면 위 정리에 의하여 $\{e^0, e^{2\pi i}\} = \{1, 1\}$은 선형독립이다. 이것은 정리에 모순이므로 π는 초월수이다. 더 나아가 모든 초월수는 무리수이므로, π는 무리수이다. 한편 π와 e가 Q 위에서 대수적으로 독립인지 알려지지 않았다. 그러나 1996년에 러시아 출신의 Nesterenko는 집합 $\{\pi, e^{\pi}, \Gamma(\frac{1}{4})\}$은 Q 위에서 대수적으로 독립임을 증명하였다[23].

힐버트(David Hilbert)는 1900년 8월 8일 파리에서 개최된 제2회 국제수학자회의(International Congress of Mathmaticians)에서 '수학의 미래의 문제에 대하여' 라는 강연을 통하여 23개의 수학문제를 제시함으로써 수학연구의 방향을 설정하였는데, 여기서 힐버트의 7번째 문제(Hilbert' s seventh problem)를 인용하면 다음과 같다.

> "If, in an isosceles triangle, the ratio of the base angle to the angle at the vertex be algebraic but not rational, the ratio between base and side is always transcendental."

이 문제의 특별한 경우를 인용하면 다음과 같다.

> "The expression α^β, for an algebraic base α and an irrational algebraic exponent β, e.g., the number $2^{\sqrt{2}}$ or $e^\pi = i^{-2i}$, always represents a transcendental or at least an irrational number."

위의 문제는 1929년에 러시아의 수학자 Alexander Gelfond(1906-1968)에 의하여 다음과 같이 부분적으로 증명되었다.

정리 3.4 (Gelfond 정리, 1929)**.** α는 $0, 1$이 아닌 대수적 수이고, β는 2차 방정식의 허근일 때, α^β의 모든 값은 초월수이다.

정리 3.5 (Gelfond 정리, 1929)**.** $e^\pi = (-1)^{-\sqrt{-1}}$는 초월수이다.

Gelfond의 방법을 이용하여, Boehle은 다음과 같은 정리를 증명하였다[7].

정리 3.6 (K. Boehle, 1933)**.** α는 $0, 1$이 아닌 대수적 수이고, β는 차수가 $n \geq 3$인 대수적 수이면 α^β, $\alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{(n-1)}}$에서 적어도 하나는 초월수이다.

힐버트 문제는 1934년에 Gelfond와 독일의 수학자 Theodor Schneider(1911-)가 서로 다른 형태로 완전히 증명하였다[16, 17, 28, 29]. 그리고 어떤 수가 대수적인지 초월수인지 판단하는 가장 유용한 정리가 다음과 같은 Gelfond-Schneider 정리이다.

정리 3.7 (Gelfond-Schneider 정리, 1934)**.** $\alpha, \beta (\alpha \neq 0, \beta \notin Q)$가 대수적 수일 때, $\log \alpha \neq 0$에 대하여 $\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha)$의 모든 값은 초월수이다.

위 정리에서 α, β는 실수로 제한하지 않으므로 $\log \alpha$는 $2\pi i$의 정수배에서 서로 다른 무한히 많은 값을 가지므로 역시 α^β도 무한히 많은 값을 갖는다. 이 정리로부터 다음과 같은 초월수를 얻을 수 있다.

- $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $(-1)^{\sqrt{2}}$
- $i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.207879576\ldots$
- $e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i} = 23.140692632779269005729\ldots$

$$= 23 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}$$

$\alpha \neq 0, 1$이고 $i\beta \in Q$인 대수적 수 α, β에 대하여

$$\sin(\beta \log \alpha) = \frac{e^{i\beta \log \alpha} - e^{-i\beta \log \alpha}}{2i}$$

를 대수적 수라고 가정하면 $e^{i\beta \log \alpha} = \alpha^{i\beta}$는 대수적이므로 Gelfond-Schneider 정리에 모순이다. 따라서 $\sin(\beta \log \alpha)$는 초월수이다. 마찬가지로, $\cos(\beta \log \alpha)$와 $\tan(\beta \log \alpha)$도 초월수이다.

0이 아닌 임의의 대수적 수 α, β에 대하여 $\gamma = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$이라고 하자. 만약 $\log \alpha$와 $\log \beta$가 Q 위에서 선형독립이라면 $\beta \neq 1$이고, γ는 무리수이다. γ가 대수적이라면 $\beta^\gamma = e^{\log \alpha} = \alpha$은 초월수이므로 모순이다. 따라서 $\gamma = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$은 초월수이다. 따라서 Gelfond-Schneider 정리는 다음의 명제와 동치이다: $\beta \neq 1$이고 $\frac{\log \alpha}{\log \beta} \notin Q$이라면, 0이 아닌 대수적 수 α, β에 대하여 $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$는 초월수이다.

이제 Gelfond-Schneider 정리를 이용하여 힐버트의 7번째 문제를 증명하여 보자. 이등변삼각형에서 α를 밑변 각, β를 밑변의 대각, a를 밑변의 길이, 그리고 b를 길이가 같은 두 변의 길이라고 하자. 코사인의 법칙에 의하여 $b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$이므로 $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$이고, 마찬가지로 $a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha$이므로

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{a}{2b}$$

가 성립하므로 $\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{a}{2b}$이다. 가정에 의하여 $\frac{\alpha}{\beta} \notin Q$이고 $\frac{\alpha}{\beta} \in \overline{Q}$이므로 Gelfond-Schneider 정리로부터 $\gamma = e^{i\beta}$와 $\gamma^{\frac{\alpha}{\beta}} = e^{i\alpha}$는 둘 다 대수적 수가 될 수 없다. 그러므로 $\cos\alpha$와 $\sin\frac{\beta}{2}$도 대수적일 수 없다. 따라서 $\frac{a}{2b}$와 $\frac{a}{b}$는 초월수이다.

1966년에 영국의 수학자 A. Baker(1939 ~)는 Gelfond-Schneider 정리를 다음과 같이 일반화하였다[4].

정리 3.8 (Baker). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$은 모두 0이 아닌 대수적 수이고, $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$이 Q 위에서 선형독립이면 $1, \log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$은 $\overline{Q}$ 위에서 선형독립이다.

정리 3.9 (Baker). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$은 모두 0이 아닌 대수적 수이고, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\alpha_i \neq 0$을 만족하는 대수적 수 $\beta_1, \ldots, \beta_n$에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\alpha_i$은 초월수이다.

위 정리에서 $n = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$일 때, 복소로그 $\log(-1) = \pi i$이고 i는 대수적이므로 π가 대수적일 수 없다. 따라서 π는 초월수이다. 이것은 $e^{\pi i} = -1$을 이용한 Lindemann의 증명과 다른 방법이다. 그리고 $\log 2+\sqrt{3}\log 3$은 초월수가 되는 예이다.

정리 3.10 (Baker)**.** 임의의 0이 아닌 대수적 수 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$에 대하여 $e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}$ $\alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$은 초월수이다.

위 정리에서 $n=1$, $\alpha_i=\beta_i=1$로 선택하면 e는 초월수이다. 그리고 $e^{\sqrt{2}}2^{\sqrt{3}}5^{\sqrt{7}}$과 같은 형태의 수가 초월수이다.

정리 3.11 (Baker)**.** 임의의 0과 1이 아닌 대수적 수 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$과 $1,\beta_1,\ldots,\beta_n$이 Q 위에서 '선형독립' 인 임의의 대수적 수 $\beta_1,\ldots,\beta_n$에 대하여 $\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$은 초월수이다.

위 정리에서 선형독립의 조건에 대하여 살펴보자. Gelfond-Schneider 정리를 만족하는 두 초월수 $\alpha_1^{\beta_1}$, $\alpha_2^{\beta_2}$의 곱과 합을 생각하자. 일반적으로, 두 초월수 a와 b에 대하여 $a+b$와 ab 중의 적어도 하나는 초월수임이 분명하다(4절 참고). 만약 $\alpha_1=4$, $\alpha_2=16$, $\beta_1=\sqrt{3}$, $\beta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 선택하면,

$$\alpha_1^{\beta_1}=4^{\sqrt{3}},\quad \alpha_2^{\beta_2}=16^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

이고 곱은 $\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}=1$이므로 대수적이다. 두 무리수 $\beta_1=\sqrt{3}$, $\beta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 Q 위에서 선형종속이다. 이번에는 $\alpha_1=4$, $\alpha_2=16$, $\beta_1=\sqrt{3}$, $\beta_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 선택하면, $\alpha_1^{\beta_1}=4^{\sqrt{3}}$, $\alpha_2^{\beta_2}=16^{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$이고 곱은 $\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}=16^{\frac{1}{3}}$이므로 대수적이다. 두 무리수 $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 Q 위에서 선형독립이다. 그러나 $1,\sqrt{3},\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$은 Q 위에서 선형종속이다.

A. Baker는 Gelfond-Schneider 정리를 일반화함으로써 1970년 프랑스 니스(Nice)에서 열린 국제수학자회의에서 Field 상을 받았다[5]. Baker가 얻은 가장 간단한 새로운 초월수는 $\pi+\log 2$이다. 초월수론은 1930년대 이후 비약적인 발전을 이룩하고 있다. 특히 Baker의 연구결과는 그때까지 알려져 있던 약간뿐인 초월수의 예를 거의 모두 포괄하는 거대한 업적이었다.

4 미해결 문제(Open Problems)

유리수인지 무리수인지 알려지지 않은 대표적인 것으로 다음과 같이 정의되는 오일러–마스케로니 상수(Euler-Mascheroni constant) γ 라는 것이 있다.

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\Big)=\int_0^{\infty}\frac{\log x}{e^x}dx=0.5772156649015328606\cdots$$

이 상수가 무리수임을 증명하는 것이 얼마나 어려웠던지, 영국의 수학자 하디(Godfrey Hardy, 1877-1947)가 이렇게 말한 적이 있다. “γ가 무리수임을 증명한 사람에게 나의 옥스퍼드 대학 서빌리언 석좌교수직을 양보하겠다.” 더 나아가서 초월수인지 그것이 문제인 수는 대단히 많다. 예를 들어, 다음의 두 수

$$e+\pi = 5.859874482048838473\cdots, \quad e\pi = 8.539734222673567065\cdots$$

는 유리수인지 무리수인지 알려져 있지 않다. 그러나 $e+\pi$와 $e\pi$ 중의 적어도 하나는 초월수임 분명하다. 일반적으로, 두 초월수 a와 b에 대하여 $a+b$와 ab 중의 적어도 하나는 초월수임 분명하다. 실제로, 다항식

$$(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$$

에 대하여, $a+b$와 ab를 둘 다 대수적이라면, 대수적 수를 계수로 갖는 다항식이므로 다항식의 근 a와 b는 대수적이다(algebraically closed field). 이것은 모순이다.

그리고 π^e, e^e, π^π, $\log\pi$, $\pi\log 2$, $\log(\log 2)$, $(\log 2)(\log 3),\cdots$ 등은 모두 초월수로 추측하지만 현재까지는 무리수인지 아닌지 조차도 알지 못한다.

제타함수(Zeta function)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

는 1740년에 오일러에 의하여 양의 정수 s에 대하여 정의되었고, Chebyshev(1821–1894)는 $s>1$인 실수에 대하여 정의를 확장하였다. 오일러는 짝수 $s\geq 2$에 대하여 $\zeta(s)$는 π^s의 유리수배임을 증명하였다. 즉, $\zeta(s)=q\pi^s$, 여기서 q는 유리수이다. 예를 들면,

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots \\ &= \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934\end{aligned}$$

$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}$이다.

1978년에 Roger Apéry(1916-1994)는 $\zeta(3)$이 무리수임을 증명하였다[3].

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\approx 1.202056903\cdots$$

그러나 초월수인지는 알려지지 않았다. 그리고 최근에 T. Rivoal은 $\zeta(s)$가 무리수가 되는 무한히 많은 홀수 s가 존재함을 밝혔다[25]. 한편 임의의 양의 정수 s에 대하여 $\zeta(2s)$는 초월수라는 사실이 알려져 있다. 그러나 홀수에 대해서는 다음과 같다.

Conjecture 임의의 홀수 $s\geq 3$에 대하여 $\zeta(s)$는 초월수이다.

5 결론

초월(超越)의 사전적 의미를 살펴보면 여러 가지 의미에서 어떤 영역을 넘어서는 것으로 설명한다. 철학적으로 초월은 인식이나 경험의 범위 밖에 있는 것으로, 수학적으로는 대수적 방법으로 생각할 수 없는 것이다. 초월수는 어떠한 정수 계수의 다항식으로 이루어진 방정식의 해도 될 수 없는 복소수이다. 지금까지 알려진 초월수는 많지 않으며, 어떤 특정한 수가 초월수임을 증명하는 것은 매우 어렵다. 초월수의 존재는 오일러가 예상하였으나, 1844년에 Liouville은 구체적이고 특별한 리우빌 상수라고 불리는 수를 제시하였다. 이것이 최초의 초월수이다. 초월수의 존재성을 증명하기 위해 특별히 만들어진 수가 아닌 수 중에서 처음으로 초월수임이 증명된 수는 상수 e로, 샤를 에르미트가 1873년에 증명하였다. 어느 한 부분도 모자람 없이 완벽함을 자아내고 있는 원은 심오한 철학적 의미와 상징적인 의미를 포함하고 있을 뿐만 아니라, 자연과 인간의 창조물에서 가장 신비적이고 아름다운 기하학적 공간을 나타내기도 한다. 이 원의 비밀은 잔잔한 호수에 던진 돌이 만들어 내는 동심원의 크기에 관계없이 불변의 진리인 원주율이며 초월수인 π이다. 이것은 고대 그리스 시대부터의 난제였던 원적문제가 불가능함을 보여주는 결과였다. 초월수에 관한 많은 연구 결과 중에서 Roth는 Thue-Siegal-Roth 정리로, Baker는 Gelfond-Schneider 정리를 일반화함으로써 필즈상(Fields Medal)의 영예를 안은 것은 주목할 만하다. 이처럼 우리는 초월수의 영역을 웅대하며 미지의 세계로 동경하는 것이 아닌 우리가 개척하고 발전시켜야 하는 수학의 중요한 하나의 분야로 인식해야 할 것이다. 때마침 우리나라가 2014년 국제수학자대회(ICM)를 유치하게 되었다. 이를 통하여 수학사를 포함한 국내 수학 연구의 저변확대와 활성화 방안을 모색하고, 진일보하여 필즈상 수상자를 배출하는 계기가 돼야 한다. 아울러 국제수학자대회의 성공적인 개최를 기원한다.

section*보다 좋은 논문을 위해 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

감사의 글 참고 문헌

[1] 고영미 · 이상욱, 구장산술의 방정식론의 교육학적 의미, 한국수학사학회지 23 (2010) No. 1, 25–40.

[2] 박창균, Cantor의 무한관, 한국수학사학회지 10 (1997) No. 2, 33–38.

[3] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979), 11–13.

[4] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers; (I)*, Mathematica, 13 (1966), 204–216.

[5] A. Baker, *Effective methods in the theory of numbers*, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, 1970.

[6] A. Baker, *Transcendental Number Theory, Cambridge University Press*, 1975.

[7] K. Boehle,"Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten." (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond), *Math. Ann.*, 108 (1933), 56–74.

[8] Carl B. Boyer, "The Arabic Hegemony". *A History of Mathematics* (Second ed.). John Wiley & Sons, Inc. 1991.

[9] E. Burger, "Diophantine Inequalities and Irrationality Measures For Certain Transcendental Numbers," *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32, 2001.

[10] G. Cantor, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffers aller reellen algebraischen Zahlen," *J. Reine Angew. Math.* 77 (1874), 258–262.

[11] G. Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre," *J. Reine Angew. Math.* 84 (1878), 242–258.

[12] P. Erdös, "Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers," *Michigan Math. J.* Vol. 9 (1962), 59–60.

[13] P. Erdös, "Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler," *Mathematics Magazine* 56 (1983), 292–298.

[14] C. Hermite, "Sur la fonction exponentielle," *C. R. Acad. Sci. Paris* 77 (1873), 18–24.

[15] D. Hilbert, "Über die Transcendenz der Zahlen e und π," *Mathematische Annalen* 43 (1893), 216–219.

[16] A. Gelfond, "Sur le septième Problème de D. Hilbert," *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS Moscou* 2 (1934), 1–64.

[17] A. Gelfond, "Sur le septième Problème de Hilbert," *Bull. Acad. Sci. URSS Leningrade* 7 (1934), 623–634.

[18] P. Gordan, "Transcendenz von e und π," *Math. Ann.* 43 (1893), 222-224.

[19] M. Kac & S. M. Ulam, *Mathematics and Logic, Frederick A. Praeger*, New York, 1968.

[20] J. Lambert, "Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circu-

laires et logarithmiques," *Histoire de l'Académie*, (Berlin) XVII (1761), 265–322.

[21] F. Lindemann, "Über die Zahl π," *Mathematische Annalen* 20 (1882), 213–225.

[22] F. Lindemann, "Über die Ludolph'sche Zahl," *Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin* No. 2 (1882), 679–682.

[23] Y. Nesterenko, "Modular Functions and Transcendence Questions," *Mat. Sbornik* 187 (1996), 65–96.

[24] P. Ribenboim, My Numbers, My Friends: Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, 2000.

[25] T. Rivoal, La fonction zeta de Riemann prend une infnité de valuers irrationnelles aux entiers impairs, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), 267–270.

[26] M. Robinson, On certain transcendental numbers, Michigan Math. J. Vol. 31, Issue 1 (1984), 95–98.

[27] K. Roth, Rational Approximations to Algebraic Numbers, Mathematika 2 (1955), 1–20.

[28] T. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I, J. reine angew. Math. 172 (1934), 65–69.

[29] T. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II, J. reine angew. Math. 172 (1934), 70–74.

[30] Dan Sewell Ward, The Library of Halexandria, 2008. `http://www.halexandria.org/dward089.htm`

[31] A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 135 (1909), 284–305.

[32] P. Wantzel, Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1837), 366–372.

[33] K. Weierstrass, Zu Hrn. Lindemann's Abhandlung: 'Über die Ludolph'sche Zahl', Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin No. 2 (1885), 1067–1086.

[34] Reader's Digest Oxford Complete Wordfinder, Oxford University Press, Inc, Reader's Digest, Pleasantville, New York, 1996.

History of Transcendental numbers and Open Problems

Department of Mathematics & Information, Kyungwon University Choon-Sung Park
Department of Mathematics Education, Kunkuk University Soo-Yeop Ahn

Transcendental numbers are important in the history of mathematics because their study provided that circle squaring, one of the geometric problems of antiquity that had baffled mathematicians for more than 2000 years was insoluble. Liouville established in 1844 that transcendental numbers exist. In 1874, Cantor published his first proof of the existence of transcendentals in article [10]. Louville's theorem basically can be used to prove the existence of Transcendental number as well as produce a class of transcendental numbers.

The number e was proved to be transcendental by Hermite in 1873, and π by Lindemann in 1882. In 1934, Gelfond published a complete solution to the entire seventh problem of Hilbert. Within six weeks, Schneider found another independent solution. In 1966, A. Baker established the generalization of the Gelfond-Schneider theorem. He proved that any non-vanishing linear combination of logarithms of algebraic numbers with algebraic coefficients is transcendental. This study aims to examine the concept and development of transcendental numbers and to present students with its open problems promoting a research on it any further.

Key Words: Transcendental numbers, Liouville numbers, Algebraically independent, Hilbert's seventh problem, Lindemann-Weierstrass theorem, Gelfond-Schneider theorem, Zeta function

2000 Mathematics Subject Classification : 01A85, 01A55, 01A60, 11J81
ZDM Subject Classification : A30

접수일 : 2010년 7월 5일 수정일 : 2010년 8월 10일 게재확정일 : 2010년 8월 13일