순차식 연산(Sequent calculus)과 절단제거(Cut elimination)*

덕성여자대학교 불문학과 정계섭
kseopcheong@hanmail.net

순차식 연산은 겐첸이 자연연역을 1934년 대칭적 버전으로 재구성한 것으로서, 여기에서 그는 ‘주정리’를 소개한다. 이 논문에서 우리는 절단의 유용성에도 불구하고 증명이론에서 왜 절단정리가 이토록 중요한 위상을 차지하는지 검토할 것이다. 이어서 커리-하우어드 대응의 역동적 측면, 즉 절단 제거와 단순히 유형화된 람다-연산에서 β-환원의 대응이 연구될 것이다. 이러한 대응의 중요성은 프로그램의 세계와 수학적 증명의 세계를 마주보게 함으로써 프로그램의 정확성을 보증해준다는 데에 있다.

주제어: 순차식 연산, 절단 규칙, 절단-제거, λ-연산, 커리-하우어드 대응

1 들어가면서

Gentzen은 1934년 술어논리의 형식화를 위해 자연논리(Natural deduction)를 제안하였다. 기본적인 아이디어는 수학자들이 실제로 추론하는 방식에 가능한 한 가깝게 접근하자는 것이다. 뒤이어 산술의 정합성을 확립하기 위해 자연논리를 이용하면서 기술적인 어려움에 봉착하다 보다 대칭적인 버전으로 자연논리를 재구성하기에 이르는데 이것이 바로 순차식 계산(Sequent calculus)[1]이다. 이는 일련의 논리식 Γ와 Δ를 $\vdash$(thesis)를 연결한 것이다.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

* 이 연구는 2010년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행 되었다. 아울러 익명의 심사위원들에게 감사의 마음을 전한다.

1) 자연논리와 순차식계산을 비교하기 위해서는 다음 자료를 참조할 것.
Jan Von Plato, Translation from Natural deduction to Sequent Calculus, 2003

그래서 $A_1, \cdots, A_n \vdash B_1, \cdots, B_n$ 이 의미하는 바는 A_i 의 연접이 B_i 의 이접을 함축한다는 것을 의미한다. 즉 모든 A_i 가 참이면, B_i 중 적어도 하나는 참이라는 것이다.

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \cdots \vee B_n$$

여기에 몇가지 특수한 경우를 살펴보자.

- $\vdash B_1, \cdots, B_n$
  이는 가정과 무관하게 적어도 하나의 B_i 가 참이다.
- $A_1, \cdots, A_n \vdash$
  $A_1, \cdots, A_n$ 의 가정 하에 어떤 가능성도 없다.
  즉, 이 가정은 양립 불가능 하다. 그래서 $A \vdash$ 는 $\neg A$ 를 의미한다.
- $\vdash$
  어떤 가정도 없을 때, 아무런 결론도 없다.
  이런 공순차식(Void Sequent)은 부조리를 의미하므로 만약 이런 공순차식을 증명할 수 있는 이론이 있다면 그 이론은 모순이다. 실상 $\vdash$ 은 $A \wedge \neg A$ 의 결과로서 나중에 이에 대해 다시 언급할 기회가 있을 것이다.

2 순차식의 규칙들

자연논리에서는 도입과 제거 규칙을 사용하는데 반해 순차식 계산에서는 좌, 우 규칙을 사용해서 완전하게 대칭적이다.

1. 공리
   $$\frac{}{A \vdash A}$$

2. 구조규칙
   순차식들의 구조에 대해서 작동하는 규칙들이다.

   $$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta} \text{ 좌−치환} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, B, A} \text{ 우−치환}$$

   $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ 좌−약화} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ 우−약화}$$

   $$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ 좌−축약} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ 우−축약}$$

축약(Contraction) 규칙은 $\vee$와 $\wedge$의 멱등성(Idempotency)을 나타낸다. 즉 A는 $A \vee A$나 $A \wedge A$와 동치이다.[2)]

3. 논리규칙

3.1. 명제논리 규칙

각각의 논리규칙들은 $\vdash$(Turnstile)의 왼편이나 오른편에 새로운 논리식을 도입한다.

예컨대 A를 포함하는 일련의 논리식으로부터 Δ가 도출될 때, 우리는 보다 강한 가령 $A \wedge B$로부터 Δ를 결론으로 얻을 수 있는 것이다.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad 좌_1 - \wedge \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad 좌_2 - \wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'} \quad 우{-}\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B, \vdash \Delta, \Delta'} \quad 좌{-}\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad 우_1 - \vee \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad 우_2 - \vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \quad 좌 - \neg \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \quad 우 - \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' A \to B \vdash \Delta, \Delta'} \quad 좌{-} \to$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad 우{-} \to$$

3.2 술어논리 규칙

$$\frac{\Gamma, [t/x]A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta} \quad 좌 - \forall \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} \quad 우 - \forall$$
$$(x \in FV(\Gamma) \cup FV(\Delta))$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta} \quad 좌 - \exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, [t/x]A}{\Gamma \vdash \Delta, \ \exists x A} \quad 우 - \exists$$
$$(x \notin FV(\Gamma) \cup FV(\Delta))$$

설명에 대신하여 간단한 사례를 들어보면,

2) 축약은 실상 무한을 함축하고 있다. 선형논리(Linear logic)에서는 이 규칙이 성립하지 않는다. 그러나 예컨대 배중율을 증명하는데 이 규칙이 유용하다.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(a,b) \vdash A(a,b)}{\forall y A(a,y) \vdash A(a,b)}}{\forall x \forall y A(x,y) \vdash A(a,b)}}{\forall x \forall y A(x,y) \vdash \forall x A(a,b)}}{\forall x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \forall x A(x,y)}$$

$\vdash$의 왼쪽은 가정, 오른쪽은 결론이라는 점을 염두에 두면 양화사 규칙을 이해하는 데에 도움이 될 것이다.

4. 절단(Cut)규칙

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{Cut}$$

만일 내가 다른 곳에서 A를 결론으로 얻었다면, 나는 그 A를 전제로 쓸 수 있다.

순차식의 규칙들은 술어논리에서 정당한 유도 (derivation)를 위한 절차로 볼 수 있지만, 주어진 진술에 대한 증명을 구성하기위한 지침(instruction)으로 볼 수도 있다. 이 경우에 규칙들은 아래에서 위로 읽힐 수 있다. 그래서 $A \wedge B$를 증명하기 위해서는 A와 B를 각각 증명하면 되는 것이다.

3 절단규칙(Cut rule)의 의미

절단규칙은 자연논리에서 함축(implication)의 도입과 제거에 해당한다.

$$\frac{\cfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi} \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi} \qquad \begin{array}{l} \to \text{도입} \\ \to \text{제거} \end{array}$$

절단규칙은 그래서 MP(Modus Ponens)의 일반화 내지 논리적 귀결의 전이성(Transitivity)을 나타낸다. 이 규칙은 우리가 수학적 추론을 할 때 핵심적인 규칙인데, 실상 우리들이 하는 대부분의 추론은 다른 곳에서 수행한 추론의 결론을 새로운 증명을 위한 가정으로 쓰기 때문이다.

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$

중간의 결론 B는 사라졌지만 A에서 C에 도달하기 위해 필수적이다.

비근한 예를 들어보기로 하자. 예컨대 39^2을 계산할 때, 우리는 39×39를 하는 대신, $39^2 = 40^2 - 2 \times 40 + 1$을 계산한 것이다. $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$을 알기 때문이다.

$$\dfrac{\forall x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \vdash (40-1)^2 = 40^2 - 2 \times 40 + 1 \qquad \vdash \forall x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1}{\vdash (40-1)^2 = 40^2 - 2 \times 40 + 1}\ \text{Cut}$$

이처럼 수학에서는 그 어떤 증명에서도 거의 절단규칙을 사용한다. 그렇지 않으면 길고 지루한 작업이 될 것이므로 절단규칙은 우리의 실천적 관행에 맞는 것이다.

다음으로, 절단규칙은 부분논리식의 특성(Subformula Property)을 위배하는 유일한 규칙이다.

부분논리식의 특성: 절단없는 순차식 $\Gamma \vdash \Delta$의 증명에서, 모든 순차식은 오직 Γ나 Δ의 부분식으로만 구성된다.

순차식 계산의 결론은 항상 가정보다 더 복잡하다.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

그런데 이런 속성이 지켜지지 않는 유일한 경우가 절단규칙이다. 절단한 식은 사라지기 때문이다.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \text{우}-\vee \qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\ \text{좌}-\vee}{\Gamma \vdash C}\ \text{Cut}$$

그런데 $\Gamma \vdash C$라는 결론만 가지고 어떻게 증명을 재구성 할 수 있는가? 결론만 가지고 증명을 재구성 할 수는 없는 노릇이므로, 이는 증명의 탐구를 어렵게 만드는 것이다. 그래서 절단규칙의 유용성에도 불구하고, 이 규칙을 쓰지 않고, 증명을 수행할 수는 없을까 하는 문제의식이 생기는 것이다.

4 절단규칙의 제거

컷제거의 기본적인 메커니즘을 이해하기 위해 프라위치(Prawitz, 1965)의 예를 따르기로 하겠다. π_1의 A는 가정에 불과한데 반하여 π의 A는 결론이라는 사실이 핵심이다.

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \vdots\\ \Gamma\vdash A\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{matrix}}{\Gamma\vdash A\to B}}{B} \quad \overset{\text{절단제거}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix}\pi_1\left[\overline{\Gamma, A\vdash A} := \pi\right] \\ \\ \Gamma\vdash B\end{matrix} = \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ \\ B\end{matrix}$$

주정리(Hauptsatz, Gentzen, 1934): 만일 $\Gamma\vdash\Delta$가 증명 가능하다면, 절단규칙 없는 증명이 존재한다.

주정리의 증명은 절단의 크기에 대한 회귀(recurrence)에 의해 이루어진다. 즉 어떤 논리식 A에 대한 절단은 A의 부분식들에 대한 절단으로 대체하는 것이다. 만일 A가 $B\vee C, B\wedge C, B\to C$ 등의 형태라면 A의 부분식은 B나 C의 부분식이 될 것이다. 만일 A가 $\forall xBx$나 $\exists xBx$라면 A의 부분식은 $B(t)$의 부분식이 될 것이다.

4.1 주경우 (Key Case)

논리 연결사나 양화사를 제거하는 경우에 해당한다.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash A,\Delta}{\Gamma\vdash A\wedge B,\Delta} \quad \dfrac{\Gamma', B\vdash\Delta'}{\Gamma', A\wedge B\vdash\Delta'}}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'} \qquad \text{Cut} \rightsquigarrow \qquad \dfrac{-B,\Delta \quad \Gamma', B\vdash\Delta'}{\Gamma,\Gamma'\vdash\Delta,\Delta'}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash A\vee B \qquad \begin{matrix}\overline{\Gamma, A,\Delta\vdash A}\\ \vdots\\ \\ \Gamma, A\vdash C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overline{\Gamma, A,\Delta\vdash B}\\ \vdots\\ \\ \Gamma, B\vdash C\end{matrix}}{\Gamma\vdash C} \qquad \text{Cut} \rightsquigarrow \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Gamma,\Delta\vdash A\\ \vdots\\ \Gamma\vdash C\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma'' \vdash \Delta''}{A \to B, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta'\Delta''}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Cut}$$

$$\rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta', A \quad A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta, B} \qquad B, \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Cut}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \quad \dfrac{\Gamma' \vdash A, \Delta'}{\Gamma', \neg A \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{Cut} \rightsquigarrow \quad \dfrac{\Gamma' \vdash A, \Delta' \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash \forall x A}}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ \text{Cut} \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\pi(x := t)}{\Gamma \vdash A[x := t]}$$

4.2 규칙의 교환

$$\dfrac{\dfrac{\vdash B, A}{\vdash B \lor C, A} \qquad \dfrac{A, E \vdash}{A, D \land E \vdash}}{D \land E \vdash B \lor C}\ \text{Cut} \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash B, A \quad A, E \vdash}{E \vdash B}}{D \land E \vdash B}}{D \land E \vdash B \lor C}$$

4.3 구조규칙의 경우

약화(Weakening)나 축약(Contraction)으로부터 유래한 논리식에 대한 컷은 덜 단순하다.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta\Delta'}\ \text{Cut} \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta\Delta'}\ \text{Cut} \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', A, A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

왜 이런 정리가 중요한가?

첫째, 부분논리식의 특성이 유지된다. 즉 어떤 논리식도 사라지지 않는다. 그래서 체계의 정합성을 보증해준다. 계산이 정합적(coherent)이라는 점을 보이려면, 앞서 본 ⊢(공

순차식)이 증명가능하지 않다는 것을 보이면 된다. 그런데 절단규칙 없는 공순차식의 증명은 보다 단순한 순차식을 가져야 할 터인데 물론 그런 것은 없다. 따라서 공순차식에 대한 모든 증명은 절단규칙을 사용해야 한다.

둘째, 어떤 논리식이 유도되지 않는다는 사실은 cut-free체계의 당연한 귀결이다. 모순을 나타내는 $A\wedge\neg A$는 증명될 수 없다. 귀류법을 쓰기위해 $\vdash A\wedge\neg A$를 가정하자.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A\wedge\neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\,\text{공리}}{A,\neg A\vdash}\,\text{좌}-\neg}{A\wedge\neg A,\neg A\vdash}\,\text{좌}-\wedge_1}{A\wedge\neg A, A\wedge\neg A\vdash}\,\text{좌}-\wedge_2}{A\wedge\neg A\vdash}\,\text{축약}}{\vdash}\,\text{Cut}$$

이처럼 부분식의 특성은 공순차식의 도출을 금지한다.

5 커리−하우어드 대응 (Curry-Howard Correspondence[3)])

커리가 1958년 조합논리와 힐버트 스타일의 연역사이에 통사론적 대응을 주목한데 이어,[4)] 하우어드는 1969년에 단순히 유형화된 -연산과 자연연역의 증명사이에 통사적 유사성을 발견하였다. 도표로 제시하자면 다음과 같다.

자연연역 (증명구조)	λ-연산 (함수공간)
$\overline{\alpha\vdash\alpha}$ 공리	$\overline{x:\alpha\vdash x:\alpha}$
$\dfrac{\Gamma,\alpha\vdash\beta}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta}$	$\dfrac{\Gamma,x:\alpha\vdash t:\beta}{\Gamma\vdash\lambda x.t:\alpha\to\beta}$
$\dfrac{\Gamma\vdash\alpha\to\beta\quad\Gamma\vdash\alpha}{\Gamma\vdash\beta}$	$\dfrac{\Gamma\vdash t:\alpha\to\beta\quad\Gamma\vdash u:\alpha}{\Gamma\vdash tu:\beta}$

간단한 사례를 보자면,

3) 이하 C-H 대응이라 한다.

4) 예컨대 다음과 같은 예이다.

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{S}:(\sigma\to(\sigma\to\sigma)\to\sigma)\to(\sigma\to\sigma\to\sigma)\to\sigma\to\sigma \qquad \mathrm{K}:\sigma\to(\sigma\to\sigma)\to\sigma}{\mathrm{SK}:(\sigma\to\sigma\to\sigma)\to\sigma\to\sigma \qquad \mathrm{K}:\sigma\to\sigma\to\sigma}}{\mathrm{SKK}:\sigma\to\sigma}$$

미국에서 1945년 새로운 계산기계를 설계하기 위해 4명의 위원으로 구성된 위원회(Computations Committee)가 가동되었는데 그 중 한명이 Curry 였다. 이듬해 1946년 ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer)가 대중에게 첫 선을 보였다.

$$\dfrac{\overline{x : \sigma \vdash x : \alpha}}{\vdash \lambda x.x : \sigma \to \sigma}\ \text{추출(abstraction)}$$

그런데 이러한 사실은 당시에는 별로 주목을 받지 못하였다. 그러다가 논리학이 이론전산학과 만나면서 이 대응이 결정적으로 중요하다는 점이 밝혀졌다.

그것은 C-H대응이 앞서 본 절단규칙제거와 β-환원이 동형이라는 사실을 말해주기 때문이다. 이는 타이트 (W. Tait, 1967)의 기여로 인정받고 있다.[5)]

여기에서도 절단제거는 α를 가정하는 대신에 D_1의 α를 직접 사용한다.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[x:\alpha]\\ \vdots\ D_2\\ t:\beta\end{matrix}}{\lambda x.t : \alpha \to \beta} \qquad \begin{matrix}\vdots\ D_1\\ u:\alpha\end{matrix}}{(\lambda x.t)u : \beta} \qquad\qquad \begin{matrix}\vdots\ D_1\\ u:\alpha\\ \\ t[x := u] : \beta\end{matrix}$$

이처럼 절단제거는 β-환원과 동형이 된다. 여기에서 β-환원은 절단논리식이 조건문인 경우에 해당된다.

C-H대응은 논리학, 구체적으로 자연연역과 단순하게 유형화된 λ-연산을 연결시켜준다. 이러한 대응은 '유형으로서의 명제'(Proposition-as-types)와 '프로그램으로서의 증명'(Proofs-as-programs)을 포함한다. 이 점을 보다 자세하게 살펴보자.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
x : A \to (B \to C) \arrow[dr, dash] & & y : A \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & z : A \to B \arrow[dl, dash] \\
& xy : B \to C \arrow[dr, dash] & & zy : B \arrow[dl, dash] & \\
& & xy(zy) : C \arrow[d, dash] & & \\
& & \lambda y.xy(zy) : A \to C \arrow[d, dash] & & \\
& & \lambda zy.xy(zy) : (A \to B) \to (A \to C) \arrow[d, dash] & & \\
& & \lambda xzy.xy(zy) : (A \to (B \to C)) \to [(A \to B) \to (A \to C)] & &
\end{tikzcd}$$

5) W. W. Tait, "Intensional interpretation of functionals of finite type I," *Journal of Symbolic Logic* 32 (1967) pp. 198–212.

마지막 식을 M : σ라고 하면, λ-용어(λ-Term) M은 논리식 σ를 증명한다는 의미가 된다.

λ-용어 = 증명 = 프로그램

논리식 = 유형

여기에서 증명이란 각 단계의 파생에 대한 구성적인 (constructif) 절차, 즉 프로그램을 말한다. 그러니까 대응은 논리식의 증명에 이 논리식을 실현시키는 프로그램을 매칭시켜주는 것이다. 이것이 바로 구성적 증명의 기원으로써, C-H대응은 프로그램의 세계와 수학적 증명의 세계를 연결시켜주는데, 이러한 연관성은 처음부터 자명한 사실이 아니었음을 강조하고 싶다. 나아가서 이 대응은 정확한 프로그램을 생성하는 도구를 마련해준다는 점에서 그 의의는 앞으로 더욱 증대될 것으로 생각된다.

6 나오면서

뿌엥까레 (Poincaré, 1854～1912)는 논리학은 아리스토텔레스 이후 한 발짝도 전진하지 못했다고 단언하였다. 일리 있는 말이다. 그러다가 불(Boole, 1815～1864), 프레게(Frege, 1848～1925), 럿셀(Russell, 1872～1970)등의 의해 논리학이 수학과 만나자 수리논리학이라는 경이로운 학문을 탄생시켰다.

뒤이어 겐첸(Gentzen, 1909～1945), 처치(Church, 1903～1995), 커리(Curry, 1900～1982), 하우어드(Howard, 1926～)등의 연구에 힘입어 논리학은 프로그램언어에 획기적인 발전을 가져왔고, 이른바 정보과학(Computer science)을 탄생시켰다.

C-H 대응이 의미하는 바는 무엇인가? 그것은 추론 내지 증명이 계산(Calculus)으로 환원될 수 있다는 심오한 의미를 지닌다. 계산이 기계적 방법으로 적용할 수 있는 방법이라면, 추론은 아무리 기초적이라 할지라도 상상력과 직관을 필요로 한다. 이런 성격의 추론을 λ-연산 덕분에 알고리듬으로 전환 할 수 있다는 사실은 가히 혁명적이다. 그 중요성은 아인슈타인의 상대성 원리나 양자역학에서 보어(Bohr)나 하이젠버그(Heiesenberg)가 이룬 업적에 비해 조금도 손색이 없는 발견이라고 우리는 생각한다. 이러한 발견은 하나의 연구프로그램으로써 그 심오한 의미는 앞으로 더욱 천착해야 할 과제로 여겨진다.

그래서 의미론을 통사론으로 환원할 수 없다는 괴델의 제1정리를 염두에 두면서도 우리는 힐버트(Hilbert)프로그램의 정신이 적어도 논리학과 컴퓨터과학이 만나는 지점에서는

현실성이 있다는 견해를 갖게 되는 것이다. 왜냐하면, 자연연역의 중요한 속성 중의 하나는 C-H대응을 통해 증명이론과 계산가능성이론 사이에 존재하는 관계를 분명히 보여주기 때문이다. 연역의 형식적인 규칙은 한걸음 한걸음씩 알고리즘을 정의하는 규칙에 다름 아닌 것이다.

참고 문헌

[1] P. Benacerraf & H. Putnam, *Philosophy of Mathematics* (박세희 역), 아카넷, 2002.

[2] T. Coquand & G. Huet, "*The Calculus of Construction*," Information and Computation, 76(1988) pp. 95–120.

[3] R. David, K. Nour & C. Raffali, *Introduction à la logique, Théorie de la démonstration*, Dunod, 2001.

[4] G. Dowek, *Les métamorphose du calcul: une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier, 2007.

[5] G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, PUF, 1955.

[6] Girard, Lafont & Taylor, *Proofs and types*, Cambridge University Press, 1989.

[7] R. Hindley & J. Seldin, *Introduction to combinator and λ-calculus*, Cambridge University Press, 1986.

[8] J.-L. Krivine, *Lambda-Calcul*, Masson, 1990.

[9] D. Prawitz, *Natural deduction*, Almquist & Wiksell, 1965.

[10] A. Turing & J.-Y. Girard, *La machine de Turing*, Seuil, 1995.

인터넷 자료

[11] P.-L. Curien, *Théorie de la déduction*, 2009
`http://www.pps.jussieu.fr/~eurien/LMF11.pdf`

[12] J. Gallier, *On the Correspondance between proofs and λ-Term*, 2003
`http://repository.upenn.edu/cis_reports/418`

[13] J.-Y. Girard, *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, la Théorie de la démonstration*, 1997.
`http://iml.univ-mrs.fr/~girard/bordeaux.pdf.gz`

[14] J.-Y. Girard, *Du Pouquoi au comment: la Théorie de la démonstration de 1950 à nos jours*, 2000.
`http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`

[15] O. Laurant, *Théorie de la démonstration*, 2008.
`http://www.pps.jussieu.fr/~laurent/thdem08.pdf`

[16] G. Longo, *Proposition et Types*.

[17] A. R. Omond, *Proof Normalization I: Gentzen's Hauptsatz*, 1993.

[18] J.-P. Roy, *Initiaiton à la Programmation Fonctionnelle*, 2006-07.

Sequent Calculus and Cut-Elimination

Duksung Women's University Kye-Seop Cheong

Sequent Calculus is a symmetrical version of the Natural Deduction which Gentzen restructured in 1934, where he presents 'Hauptsatz'. In this thesis, we will examine why the Cut-Elimination Theorem has such an important status in Proof Theory despite of the efficiency of the Cut Rule. Subsequently, the dynamic side of Curry-Howard correspondence which interprets the system of Natural Deduction as 'Simply typed λ-calculus', so to speak the correspondence of Cut-Elimination and β-reduction in λ-calculus,will also be studied. The importance of this correspondence lies in matching the world of program and the world of mathematical proof. Also it guarantees the accuracy of program.

Key Words: Sequent calculus, Cut Rule, Cut-Elimination, λ-Calculus, Curry-Howard Correspondence

2000 Mathematics Subject Classification: 03X-XX
ZDM Classification: E5

접수일 : 2010년 7월 13일 수정일 : 2010년 8월 16일 게재확정일 : 2010년 8월 19일