韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 08. 제 49권, 제 3호, 313-328.
J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2010, Vol. 49, No. 3, 313-328.

수학적 모델링 적용을 위한 문제상황 개발 및 적용

김 민 경 (이화여자대학교)
홍 지 연 (이화여자대학교 대학원)
김 혜 원 (이화여자대학교 대학원)

I. 서 론

창의적 문제해결력을 강조하는 21세기 지식 정보사회에서는 실세계 상황의 문제들을 창의적이고 수학적으로 사고하여 해결하는 능력을 요구하고 있다. 이에 학교수학교육에서는 학생들의 수학적 문제해결력 향상을 수학과의 목표로 제시하고, 다양한 문제상황에서 수학적으로 생각·판단·의사소통하는 능력을 중요한 요소로 강조하고 있다(교육인적자원부, 2007).

2007년 개정 수학과 교육과정에서는 학생들 스스로 문제상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 적절한 문제해결방법을 활용하여 창의적으로 문제를 해결하는 활동과 생활 주변의 자연, 사회현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념·원리·법칙을 탐구하고 일반화하는 활동을 중시하고 있다(교육과학기술부, 2008). 한편 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM](2000)는 이러한 수학적 문제해결력의 신장과 관련하여 실세계의 다양한 현상과 문제들을 분석·해석하고 해결하는데 수학적 모델링의 활용을 강조한바 있다.

수학적 모델링은 현실 세계의 현상을 해석·분석·종합하여 관계를 파악하고 결론 및 해결책을 모색하는 문제해결의 한 유형으로(Swetz & Hartzler, 1991) 비구조화된 실생활 문제에 수학을 응용하여 해결하는 것을 뜻한다(Galbraith & Caltworthy, 1990; Zbiek, 1998). 수학적 모델링과 관련된 국외의 여러 연구들(예, Boaler, 2001; Bughes, 1980; Doerr & English, 2003; English, 2006; English & Watters, 2005a, b; Llinares & Roig, 2008; Verschaffel & De Corte, 1997; Zibiek & Conner, 2006)은 학교수학교육 현장에서 수학적 모델링 과제를 제시하고 학생들로 하여금 이를 해결하도록 함으로써, 초·중·고등학생들의 수학 학습 이해 및 문제해결력 향상의 한 방안으로 수학적 모델링이 활용되고 있음을 보여주고 있다.

특히 초등수학교육에서의 수학적 모델링 적용과 관련하여 볼 때, Doerr와 English(2003), English(2006), English와 Watters(2005a, b) 등은 8세~13세의 초등학생들을 대상으로 수학적 모델링 활동을 통해 수학적인 개념 이해에서부터 자료의 해석, 분석, 처리 및 의사결정 과정을 통해 현실 맥락의 문제들을 해결하도록 하고 있다. 그러나 국내의 연구들(예, 류희찬·김지연, 2005; 성호금, 2000; 손홍찬·류희찬, 2005; 신은주·이종희, 2005; 신현성, 2001; 조원주, 2002 등)의 경우, 수학적 모델링은 주로 중·고등학교를 중심으로 적용되었으며 초등학교에서의 적용은 거의 이루어지지 않은 실정이다. 그러나 우리나라에서도 위와 같이 초등학교에서의 수학적 모델링 적용을 위한 구체적인 연구가 요구된다고 보여진다.

이에 본 연구의 목적은 초등학교 수학교육 현장, 특히 초등학교 6학년에서의 수학적 모델링 적용을 위한 문제상황을 발하고, 이를 6학년에서 적용한 결과를 분석하며, 이를 통해 초등학교에서의 수학적 모델링 적용 가능성 탐색 및 초등학생들의 수학적 문제해결력 증진에 두었다.

* 접수일(2010년 4월 26일), 수정일(2010년 7월 30일), 게재확정일(2010년 8월 12일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 수학적 모델링, 문제, 문제상황, 문제상황 개발
* 이 논문은 2008년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2008-327-B00627)

II. 이론적 배경

1. 수학교육의 최근 동향과 수학적 모델링

최근 개정된 제 7차 수학과 교육과정에서는 수학적 사고력 신장을 강조하면서, '교수・학습 방법'에 수학적 사고와 추론능력의 신장, 수학적 의사소통 능력의 신장, 수학적 문제해결력 신장을 위한 구체적인 사항을 제시하고 있다(교육과학기술부, 2009). 특히 수학적 문제 해결 능력은 생활 주변 현상에서 접할 수 있는 문제들을 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하는 능력을 의미하는 것이라고 하며, 이를 위해서는 학생 스스로 문제상황을 탐색하고 알고 있는 수학적 지식을 종합하여 문제를 해결해나갈 수 있도록 해야 한다고 하였다. 또한 문제해결 결과 뿐 아니라 문제해결 과정 및 전략도 중요시 됨을 강조하고 있다. 이와 더불어 개정 교육과정에서는 수학의 가치 제고와 정의적 측면을 강조하면서 현실세계에서의 수학의 역할과 유용성 인식, 수학 학습에 대한 즐거움과 자신감 등 긍정적인 수학적 태도의 함양에 대한 내용을 추가하였다.

National Council of Teachers of Mathematics [NTCM](2000)의 학교수학을 위한 원리와 규준에서도 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용할 수 있도록 해야 하며, 문제해결을 위해 다양하고 적절한 전략을 적용할 수 있어야 함을 강조하고 있다. 또한 수학적 모델을 활용하여 수학적 관계를 표현하고 이해할 수 있어야 한다고 하며 수학적 모델링의 필요성을 부각하고 있다. 이로 보아, 수학교육의 방향은 문제해결력 등 수학적 사고력 배양의 강조, 수학에 대한 긍정적인 태도와 가치 인식의 함양으로 나아가고 있음을 알 수 있다.

이에 최근 부각되고 있는 수학적 모델링은 수학교육의 방향에 부합된다고 할 수 있다. 수학적 모델링은 비구조화된 실생활 과제를 활용하여 학습자가 스스로 탐구해나가며 해결해나가는 과정을 강조하며, 현실세계에서 수학의 유용성을 인식시키는 방안으로 활용될 수 있기 때문이다. 이러한 수학적 모델링은 국내・외에서 활발히 연구되고 있어 연구자들마다 정의 및 그 절차가 다양한데, Niss(1989)는 수학적 모델을 실세계의 상황을 나타내기 위한 수학적 실재(mathematical entities)들간의 관계 및 조합으로 보고 있으며, Edward와 Hamson(1989)은 수학적 개념을 활용하여 만들어낸 수학구조이면서 특정한 상황의 특징을 내포하고 있는 것으로 설명하고 있다. 그 외에도 수학적 모델링에 대해 Galbraith와 Clatworthy(1990)는 실세계 상황에서 발생된 문제들을 수학에 적용하도록 하는 것으로, 신은주・권오남(2001)은 어떤 상황을 수학적 시각으로 보고 재해석하여 수학 모델을 창조하는 것이라고 언급한 바 있다. 따라서 이를 종합해보면, 수학적 모델은 실세계 상황을 나타내기 위해 선택된 하나 이상의 수학적 실재(존재)와 그것들 사이의 관계의 조합(Niss, 1989) 및 수학적 구조(Edward & Hamson, 1989)로 볼 수 있으며 이를 수학에 적용하는 활동을 수학적 모델링이라고 할 수 있다.

한편, 수학적 모델링 과정을 살펴보면 NCTM(1991)에서는 실생활 문제를 관찰하고 이해하여 단순화하는 과정을 거쳐 모델을 형성하고, 형성된 모델을 형식화・추상화하여 수학적 결론에 도달하며 이를 분석하여 모델을 적용하는 과정이 순환하는 것으로 보고 있다. Lesh와 Doerr(2003)는 현실 세계와 모델 세계 사이의 기술, 조작, 예측, 확인을 통해 순환하는 과정으로 나타내고 있다.

이에 김민경・홍지연・김은경(2009)은 중・고등학교에 비해 보다 덜 복잡한 문제상황이 요구되는 초등학교에서 우리나라 초등학교 현장에 맞게 수정・보완된 수학적 모델링 과정이 필요함을 강조한바 있다. 이들이 제시한 수학적 모델링의 수업 적용 절차는 준비활동→모델유도활동→모델탐색활동→모델적용활동으로, 각 단계의 구체적인 활동은 다음과 같다. 준비활동 단계에서는 문제를 제시해주고 학급 전체 토의를 통해 아동들이 문제를 접하게 된다. 모델유도활동에서는 소그룹으로 문제를 관찰하고 이해하며 해결해야할 문제를 단순화하여 수학적 아이디어로 문제해결을 위한 모델을 형성하는 활동이 이루어진다. 모델 탐색 활동에서는 추상화를 통하여 수학적 결론을 도출하고 이를 발표하는 단계이다. 모델 적용 활동에서는 학급 전체 토의를 통해 도출된 수학적 결론을 해석하고 분석하며, 모델을 다른 유사한 상황에 응용해보는 활동을 하게 된다.

2. 수학적 문제해결에 있어서의 문제상황

수학 교과에서의 문제해결력 신장은 제 7차 수학과 교육과정의 모든 영역에서 강조하고 있는 것으로, 이에 대한 중요성은 재론의 여지가 없다. Lencher(1983)는 학교 수학의 궁극적 목적은 문제해결 능력을 발달시키는데 있으나, 이를 신장시키기 위해서는 연습(exercise)과 문제(problem)를 구별해야할 필요가 있음을 지적하였다. 여기서 의미하는 '연습'은 해결 방법이 알려진 수행과정이며 한 가지 또는 그 이상의 알고리듬을 적용하여 답을 구해낼 수 있는 것인 반면, '문제'는 해결을 위한 다양한 전략을 활용해야 하며 독창적이고 고차원적인 사고가 요구되는 것이다. 따라서 문제해결력을 신장시키기 위해서는 연습(exercise)보다는 '문제(problem)' 수준이 적절하다고 보여진다.

한편, 문제는 구조화된(well-structured) 문제와 비구조화된(ill-structured) 문제의 유형으로 구분되기도 한다. 여기서 의미하는 구조화된 문제란, 정답과 그 해결안이 비교적 분명하여 명확한 개념과 원리가 요구되는 것으로 그 문제해결과정 또한 제한적인 것이다. 반면 비구조화된 문제는 문제 해결을 위해 적용할 개념이나 원리가 명확하지 않으며(Wood, 1983), 해결방법에 대한 평가 기준이 다양하고 해결안이나 정답 또한 여러 개가 될 수 있다(Kitchener, 1983). Jonassen(1997)은 구조화된 문제란 전통적인 학교 수학에서 흔히 접하는 문제이며 수렴적인 해답을 요구하며 적용되는 원리나 법칙이 제한적인 것으로, 비구조화된 문제는 해결방법이나 답이 다양하며 해결을 위해 요구되는 원리와 법칙이 분명하지 않은 것으로 설명하고 있다. 또한 이러한 문제 유형의 구분은 문제해결력을 증진시키기 위한 교수 설계 방법을 위해 매우 중요하다고 언급한 바 있다. 따라서 고차원적인 기술(higher-order skill)이라 할 수 있는 문제해결력의 신장은 여러 전략과 다양한 사고의 기회가 제공되는 비구조화된 문제가 보다 유용할 것이라고 보여진다.

문제해결에 있어서 고려해야 할 좋은 문제에 대해 NCSM(1977)과 Lenchner(1983)의 조언은 다음과 같이 요약될 수 있다. 좋은 문제는 ① 학생들의 흥미를 유발하며 도전하고 싶은 것이어야 하며 ② 문제해결을 위해서는 다양한 방법이나 전략을 활용하도록 해야 하고 ③ 학생들의 능력 수준에 적절해야하며 ④ 다양한 사고를 할 수 있는 기회를 제공해야 하고 ⑤ 문제 해결 과정에서 얻어진 지식과 경험을 또 다른 문제 해결에 전이가 가능하도록 도와주는 것이어야 한다.

즉, 수학적 문제해결력 신장을 위해서는 학습자가 배운 내용을 회상하여 간단히 해결할 수 있는 문제, 답에 도달하기 위해 정해진 알고리듬이나 원리를 따르는 문제를 넘어 학습한 지식을 종합하여 깊은 사고를 요하는 '비구조화된 문제'가 학습자 수준에 적절하게 제공되어야 할 것이다. 보통 비구조화된 문제는 실생활 속에서 흔히 겪게 되는 복잡한 현상이나 딜레마 등을 포함하고 있으므로(한국교육공학회, 2005, p168) 실생활 문제해결력의 신장에 보다 효과적이라고 보여진다. 학습자에게 의미있는 실생활 문제를 제시하는 것은 스스로 문제를 해결하고자 하는 동기를 부여할 뿐 아니라, 학습자가 다양한 해결 전략을 계획하고 실행하는 과정을 통해 알고 있는 개념이나 지식을 종합, 비판, 반추하는 기회를 제공할 것으로 보인다.

3. 수학 학습에서의 수학적 모델링 문제상황

수학적 모델링 학습은 실세계 현상으로부터 수학적 의미가 있는 비구조화된 문제를 활용하여 문제해결력 향상(신은주・이종희 2005; 조완영・권성룡 1998) 및 수학의 유용성과 가치를 인식하는데 도움(권기석・박배훈, 1997; 주미경, 1991)을 줄 수 있다는 연구들이 많다. 그러나 수학적 모델링이 보다 의미 있는 활동이 되기 위해서는 무엇보다 과제의 특성이 중요함을 간과할 수 없다. 이와 관련하여 황혜정(2007)은 수학적 모델링의 국내 연구결과를 분석한 연구에서 어떠한 문제가 수학적 모델링을 위한 문제가 될 수 있는지 명확하지 않으며 여러 석사논문에서 활용한 과제에서 실생활의 의미와 범위가 상이하였음을 지적하고 있다. 따라서 수학적 모델링에서의 문제상황과 특징에 대하여 보다 명확히 할 필요가 있다.

Gravemeijer(2002)는 수학적 모델링 문제가 학습자들이 지니고 있는 지식보다 좀더 심화・발전된 형태로 수학적 관계들을 파악하고 이해해야 한다고 하였으며 보다 고차원적인 사고를 요하는 문제이어야 한다고 언급하였다. 또한 김선희・김기연(2004)은 수학적 모델링을 실행

할 수 있는 문제란, 수학적 개념, 알고리즘, 발견술, 기호 등의 수학적 지식이 활용되어 해결될 수 있는 것으로 학생이 선택하는 수학적 모델에 따라 해결될 수 있는 것으로 보고 있다. Galbraith와 Clatworthy(1990)는 실세계 상황에서 발생된 문제들을 수학에 적용하도록 하는 것이 수학적 모델링이라고 보고 있는데 여기서 강조하고 있는 문제의 특징은 '실세계 상황을 나타내는 것'으로 해석할 수 있다. English(2006)는 수학적 모델을 어떤 다른 유사한 체계의 행동을 기술하고 설명하거나 예측하는데 사용될 수 있는 원리, 연산, 관계, 규칙들의 체계로 정의하고 있으며 모델링 문제는 전통적인 학교 수학을 넘어 수학적으로 사고하도록 요구하며 어떤 목적을 수행하는 실제적으로 복잡한 상황으로 보고 있다. 황혜정(2007)은 수학적 모델링의 특징을 크게 세 가지로 구분하였는데, 선행지식을 기반으로 고차원적인 사고를 요구하는 것이어야 하며 수학적 모델링 문제의 시작과 끝이 실세계 현상이어야 한다는 점, 수학적 모델 형성에 기초하여 모델링 과정이 전개되어야 하며 이로써 문제해결이 가능하다는 점을 언급하였다.

결론적으로 수학적 모델링 문제는 실세계 현상을 바탕으로 학습자의 선행 지식들을 종합하여 보다 고차원적인 사고를 하도록 유도하는 특징을 지니고 있어야 하며 그 해결과정이 형성된 모델을 바탕으로 전개되어야 한다는 것을 알 수 있다. 즉, 실세계 현상을 바탕으로 하는 비구조화된 문제이면서 수학적 모델을 유도할 수 있는 수학적 개념이 포함된 문제가 되어야 할 것이다.

III. 연구 방법

본 연구는 초등학교 현장에서 수학적 모델링을 실제적으로 적용하고 활용할 수 있는 문제상황 개발을 위하여 수학적 모델링 문제상황 개발 절차를 설정하고, 이에 따라 우리나라 수학과 교육과정 내용을 기초로 한 초등학교 6학년 내용 영역별 문제상황을 개발하였다. 이러한 문제상황은 문제를 해결하는데 있어 다양한 정답이나 해결안이 도출될 수 있는 비구조화된 문제로, 학생들이 문제를 이해하고 탐색하며 또 다른 상황에 적용하는 과정을 거치면서 보다 고차원적인 사고를 유도하는 데 초점을 두고 개발하였다. 특히 규칙성과 문제해결 영역의 문제상황을 초등학교 6학년 학생들에게 적용한 결과 나타난 학생들의 수학적 모델링 학습 과정을 분석하였다.

1. 수학적 모델링 문제상황 개발 과정

본 연구에서는 수학적 모델링 및 문제상황 개발과 관련된 국내·외의 문헌들을 참고하여 문항 개발 절차를 설정하고, 이 절차에 따라 수학적 모델링 문제상황을 개발하였다. 개발된 수학적 모델링 문제상황은 초등학교 6학년 우리나라 제7차 및 2007년 개정 수학과 교육과정의 내용을 바탕으로 하였으며, 2007년 개정 수학과 교육과정의 내용 영역인 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제 해결의 5개 영역에서 8개로 구성되었다. 또한 각각의 수학적 모델링 문제상황은 실생활 맥락의 상황을 기반으로 하고 있을 뿐만 아니라, 학습자들이 수학적 모델링 과정 속에서 다양한 수학적 개념·원리·법칙을 활용하여 문제를 해결해나갈 수 있도록 함으로써 수학적 문제해결능력의 신장을 강조하는 2007년 개정 수학과 교육과정의 취지를 따르고자 하였다.

개발된 수학적 모델링 문제상황들은 초등수학 전공의 석·박사 및 초등학교 현장 교사 등 전문가의 회의 및 검토를 통해 내용타당도를 검증받았다. 이렇게 검증된 문제상황들은 초등학교 6학년 학생들에게 예비검사로 실시된 후, 수정·보완되어 최종 문제상황으로 완성되었으며, 이들 중 규칙성과 문제해결 문제상황은 초등학교 6학년 한 학급에서 적용, 분석되었다.

2. 개발된 수학적 모델링 문제상황의 적용

1) 연구 대상

본 연구에서 개발된 수학적 모델링 문제상황은 서울지역의 초등학교 6학년 한 학급에 적용되었으며, 연구 대상 학급은 남학생 14명, 여학생 13명으로 전체 27명이다. 연구 대상 학급의 구성은 다음 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 연구 대상 학급의 구성

명수(%)

	남	여	전체
연구 대상 학급	14(51.9%)	13(48.1%)	27(100%)

2) 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 학습 설계

수학적 모델링은 학생들로 하여금 상호작용을 통해 문제 해결을 위한 모델을 스스로 개발하도록 함으로써 자신들이 개발한 모델에 담긴 수학적 개념과 원리 및 법칙을 찾아내고, 이를 바탕으로 또 다른 문제상황에 모델을 적용하여 해결하도록 하는 것이다. 이러한 수학적 모델링은 학생들의 문제해결능력 향상을 위해 강조되고 있으며, 수학적 모델링을 지도하기 위해서는 수학적 모델링 과정을 현실적 문제, 현실적 모델, 수학적 모델, 수학적 결론, 모델의 적용 혹은 모델유도활동, 모델탐색활동, 모델적용활동으로 정리했던 Lesh와 Doerr(2003)와 Lesh, Cramer, Doerr, Post와 Zawojewski(2003), Maki와 Thompson(1973), NCTM(1991)의 수학적 모델링 과정과 수업에서의 적용 절차를 활용하여 초등학교 수학 교육현장에 적용할 수 있다.

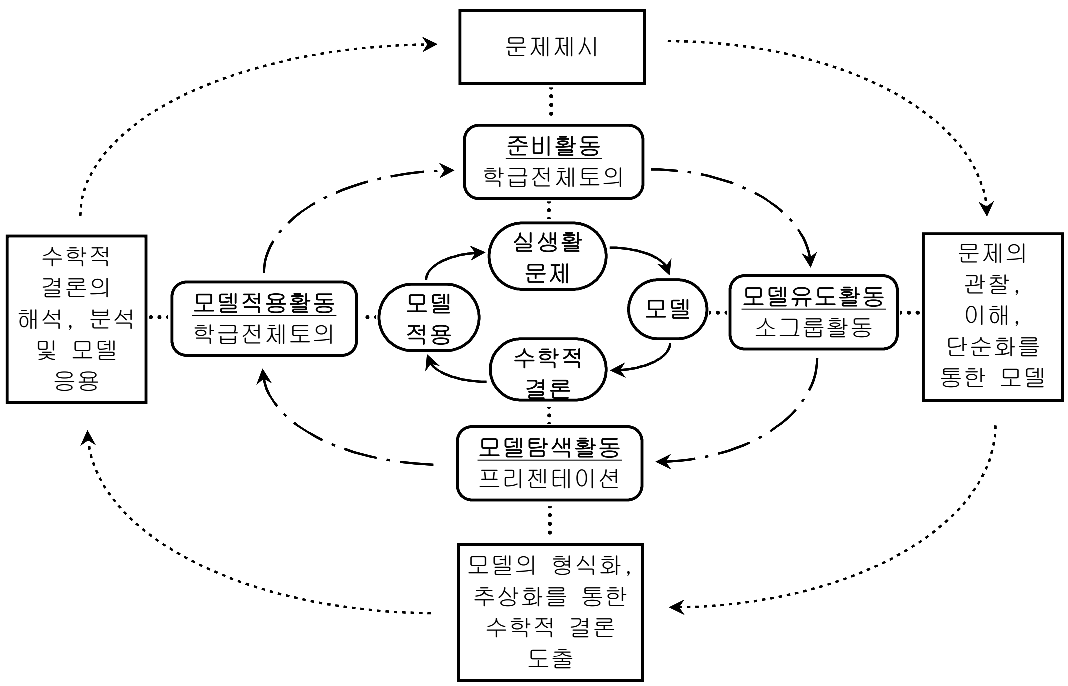
본 연구에서는 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 학습을 설계하기 위해 이들의 연구를 토대로 수학적 모델링의 활동 과정을 <그림 III-1>과 같이 설정하고, 이 절차에 따라 개발된 규칙성과 문제해결 영역의 문제상황을 적용하였다.

본 연구에서는 개발된 규칙성과 문제해결 영역의 문제상황과 위와 같은 모델링 활동 과정을 적용함으로써 나타나는 학습자들의 수학적 모델링 학습 과정에 대하여 분석하였다.

연구 대상에 적용하는 규칙성과 문제해결 영역의 학습을 설계하기 위해 우선 학습자가 성취해야 할 규칙성과 문제해결 영역의 교육목표를 설정하고, 설정된 교육목표와 학습자의 실세계 맥락을 고려하여 실생활과 연계된 학습 경험을 선정하였다. 그리고 이를 수학적 모델링 수업의 흐름에 적절하게 학습 경험을 조직하여 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 교수-학습안을 설계하였다.

3) 학습 과정 분석을 위한 설계

본 연구는 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성



<그림 III-1> 본 연구에 적용된 수학적 모델링의 수업 적용 절차

과 문제해결 영역의 학습이 이루어지는 동안 학생들이 나타내는 연구 대상의 학습 과정을 분석하고자 하였다. 연구 문제의 해결을 위해서 연구 대상의 활동 내용과 연구자의 관찰 내용을 분석하였다. 연구 대상의 활동 분석은 연구가 이루어지는 동안 산출된 학습자의 활동 결과물을 분석하고, 관찰은 연구 대상의 학습 활동 과정을 파악할 목적으로 연구자가 관찰 내용을 기록하여 이를 분석하였다.

4) 수학의 응용 학습과 상황적·실제적 추상화 학습 사례 분석 기준 및 내용

본 연구에서는 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 수업이 이루어지는 동안 나타나는 연구 대상의 학습 과정의 분석을 위하여 수학적 모델링을 활용한 수업에서 나타난 수학의 응용 학습과 상황적·실제적 추상화 학습 사례 분석 기준과 내용을 마련하고, 학습자의 학습 활동 산출물과 교사의 관찰 내용을 분석하고자 하였다.

본 연구에서는 신은주(2005)와 홍지연(2007)의 연구를 토대로 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 학습 과정에서 산출된 학습 결과물과 교사의 관찰 내용 등을 초등학교 수준에 맞춰 재구성된 <표 III-2>의 분석 기준과 내용에 따라 분석하였다. 이 분석 결과에 따라 학습 과정에서 학생들에게 나타나는 수학의 응용 학습과 상황적·실제적 추상화 학습의 모습을 찾아보고자 하였다.

IV. 연구 결과

본 연구의 목적은 우리나라 초등학교 6학년 수학과에 적용할 수 있는 수학적 모델링 문제상황을 개발하고, 개발된 수학적 모델링 문제상황을 초등학교 6학년 수학교육 현장에 적용하여 학습자들의 수학적 모델링 학습 과정을 분석하는데 있다. 이에 따라 본 장에서는 수학적 모델링 문제상황의 개발 과정 및 결과와 함께 개발된 수학적 모델링 문제상황이 적용되는 동안 나타나는 학습자들의 수학의 응용 학습과 상황적·실제적 추상화 학습의 모습이 어떠한지를 살펴보면 다음과 같다.

1. 수학적 모델링 문제상황 개발

본 연구에서는 수학적 모델링 및 문제상황 개발과 관련된 국내·외의 문헌들을 참고하여 <그림 IV-1>과 같이 수학적 모델링 문제상황 개발 절차를 설정하고, 이 절차에 따라 수학적 모델링 문제상황을 개발하였다.

<기초문헌 및 교육과정 분석> 단계에서는 수학적 모델링과 관련된 여러 참고문헌과 선행연구들에 나타난 문제상황의 유형 및 특성을 분석함으로써, 실생활 맥락의

<표 III-2> 본 연구에 사용된 사례 분석 기준과 내용

분석기준	분석내용
수학의 응용 학습	· 문제상황을 파악하여 수학적으로 구조화, 단순화, 조직화함으로써 현실 상황을 수학에 접목시키는가? · 문제상황에 제시된 비형식적인 개념들을 형식적으로 표현할 수 있는가? · 문제를 해결하기 위하여 관련된 수학적 개념이나 원리를 찾아내고, 이를 도입하고 있는가? · 문제를 해결하면서 수학적 개념·원리 및 법칙을 학습하고 새로운 수학적 지식을 구성하는가? · 수학적 개념 및 원리·법칙을 현실 맥락의 문제를 해결하는 과정에서 활용하고 적용하는가?
상황적·실제적 추상화 학습	· 자신의 경험과 직관을 바탕으로 물리적 대상을 활용하여 문제를 해결하는가? · 문제상황 속에 내포된 여러 가지 관계들을 찾아내고, 이를 관련된 다른 문제상황에 일반화하는가? · 현실 맥락의 문제상황을 여러 가지 수학 공식이나 이론과 관련지어 설명하고, 이에 따라 문제를 해결하는가? · 현실 세계의 상황을 단순화하여 간결한 형태로 만들고, 이를 수학적 관계나 구조의 형태로 나타내는가?

상황을 기반으로 하는 동시에 학습자들이 수학적 모델링 과정 속에서 다양한 수학적 개념·원리·법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있도록 하는 수학적 모델링 문제상황의 특징을 바탕으로 우리나라 초등학교 수학과에 적합한 문제상황의 유형 및 특성을 찾고, 우리나라 제7차 및 2007년 개정교육과정과 NCTM의 구성 및 특징, 그리고 국내·외 교과서를 분석함으로써 수학적 문제 해결 능력의 신장을 강조하는 NCTM과 제7차 및 2007년 개정 수학과 교육과정의 취지와 현 교육과정 및 개정교육과정의 초등학교 수학과 6학년의 1·2학기 학습내용을 확인하였다.

<수학적 모델링 문제상황 개발> 단계에서는 구체적인 문제상황 개발 과정에 들어가서 우리나라 초등학교 수학교육현장에서의 활용 가능성을 고려하여 2007년 개정 수학과 교육과정의 5개 내용 영역(수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결)에서 초등학교 6학년에 적용 가능한 수학적 모델링 문제상황을 총 8개 개발하였다. 이처럼 개발된 문제상황들은 전문가 자문회의를 통해 초등교사를 포함한 초등수학교육 전문가들에게 내용타당도를 검증받고 난이도를 검토받았다.

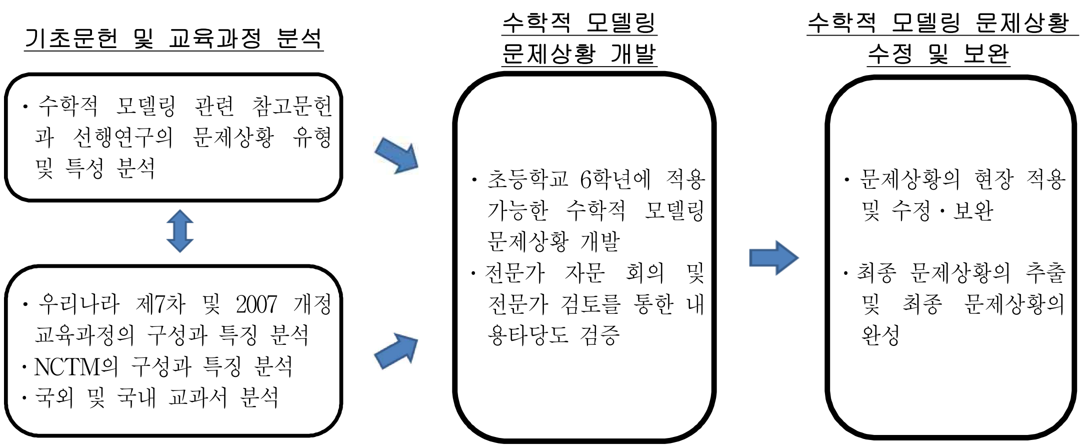
<수학적 모델링 문제상황 수정 및 보완> 단계에서는 전 단계에서 검증 받은 수학적 모델링 문제상황들을 초등학교 6학년 학생들에게 예비검사로 적용해본 후, 수집된 학생들의 응답들을 분석한 결과를 활용하여 개발된 문제상황들을 수정하고 보완함으로써 최종 문제상황을 추출하고 완성하였다. 이렇게 개발된 수학적 모델링 문제상황들을 제목, 모델링 내용, 수학원리, 관련 단원 및 영역으로 정리하면, 다음의 <표 IV-1>과 같다.

완성된 초등학교 6학년 수학적 모델링 문제상황은 총 8개로 이들 문제상황 중 한 예(스페이스)의 경우 다음의 <표 IV-2>와 같다. 제시된 스페이스(Space) 문항은 6학년 1학기의 7단원 비례식과 6단원 비와 비율 단원과 관련된 것으로 2007년 개정 수학과 교육과정의 5개 내용영역 중 규칙성과 문제해결 영역에 속한다. 학생들로 하여금 태양계 모형 제작을 위한 설계도를 그리도록 하는 과제를 제시함으로써 제시된 문제상황을 해결하기 위해 자연스럽게 비와 비율, 비례식과 같은 수학원리를 활용하도록 하는 수학적 모델링 문제상황이다.

2. 수학적 모델링 문제상황의 적용 결과

1) 수학적 모델링 문제상황을 적용한 초등학교 6학년 규칙성과 문제해결 학습

본 연구에서는 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 학습에서 나타나는 학생들의 수학적 모델링 학습 과정을 분석하기 위하여 수학적 모델링을 활용한 초등학교 6학년 규칙성과 문제해결 학습을 설계하여 실시하였다. 학습 설계는 [실생활 문제]-[모델]-[수학적 결론]-[모델 적용]의 과정을 기반으로하여, 준비활동, 모델유도활동, 모델탐색활동, 모델적용활동의 절차에 맞게 학습자가 성취해야 할 규칙성과 문제해결 영역의 교육목표



<그림 IV-1> 수학적 모델링 문제상황 개발 절차

를 설정하고, 설정된 교육목표와 학습자의 실세계 맥락을 고려하여 실생활과 연계된 학습 경험을 선정한 후, 이를 수학적 모델링을 활용한 수업의 흐름에 적절하게 학습 경험을 조직함으로써 이루어졌다.

<표 IV-1> 개발된 수학적 모델링 문제상황의 개요

문항 제목	모델링 내용	수학원리	관련 단원	영역
마네킹 퍼포먼스 (Mannequin Performance)	마네킹의 겉넓이를 구하고 마네킹 장식에 필요한 색지의 넓이 측정하기	입체도형의 겉넓이	6-1 5. 겉넓이와 부피 6-1 9. 문제푸는방법 찾기	측정, 규칙성과 문제해결
스페이스 (Space)	태양계 모형 제작을 위한 설계도 제작하기	비, 비율, 비례식	6-1 6. 비와 비율 6-1 7. 비례식	규칙성과 문제해결
초코칩 (Choco Chip)	상점을 선택하여 여러 종류의 간식구입 방법 찾기	문제해결 전략찾기, 백분율	6-1 9. 문제푸는방법 찾기 6-1 6. 비와 비율	규칙성과 문제해결
파티 플래너 (Party Planner)	학급 파티에 필요한 준비물을 사기 위해 모아야 할 학급비 결정하기	분수와 소수의 나눗셈	6-2 5. 분수와 소수의 계산 6-2 8. 문제푸는방법 찾기	수와 연산, 규칙성과 문제해결
모자 모델리스트 (Hat Modelist)	자신의 머리에 맞는 연극 소품 모자 제작하기	입체도형의 전개도	6-2 2. 입체도형 6-2 4. 원과 원기둥	도형, 측정
시티 투어 (City Tour)	주변의 여러 고궁/박물관 및 과학관/생태공원에 대한 정보를 검색하여 두 곳을 선택하는 경우의 수를 구하고, 가장 효율적으로 다녀올 수 있는 방법 찾기	경우의 수	6-2 6. 경우의 수 6-2 8. 문제푸는방법 찾기	확률과 통계, 규칙성과 문제해결
6학년 남녀탐구생활	6학년 친구들을 대상으로 설문조사를 하고 결과를 분석하여 6학년 친구들의 의식 조사 자료 만들기	비율, 비율그래프	6-1 8. 비율그래프	확률과 통계
웰빙과자의 비밀	군것질거리의 영양 성분을 비교 분석하고 올바른 식품 선택을 위한 기사 작성하기	비, 비율, 비례식, 백분율	6-1 6. 비와 비율 6-1 7. 비례식 6-1 8. 비율그래프	규칙성과 문제해결, 확률과 통계

<표 IV-2> 개발된 수학적 모델링 문제상황의 예시-스페이스(Space) 문항

제목	스페이스(Space)	수학원리	비, 비율, 비례식
모델링 내용	태양계 모형 제작을 위한 설계도 제작하기	학년/학기	6학년 1학기
관련 단원	주단원: 7. 비례식/부단원: 6. 비와 비율	영역	규칙성과 문제해결
★★초등학교 6학년 3반 학생들은 “우주”를 테마로 한 교내 작품 전시회를 위해 모둠별로 협동작품을 제작하려고 합니다. 학생들은 작품의 주제를 “태양계의 행성들”로 정하고, 모형 태양계를 만들려고 합니다. 학생들은 태양계 모형 제작에 앞서 태양계에 속한 여러 행성들의 크기(지름의 길이)와 태양으로부터의 거리를 조사하고, 태양계 모형 제작을 위한 태양계 모형의 설계도(구상도)를 그리기로 하였습니다. 작품 전시를 위해 모둠별로 할당된 구역이 전지 1장과 모양과 크기가 같을 때, 각 행성들의 크기 및 행성들 간의 거리 등의 비와 비율을 고려하여 전지 1장에 태양계 모형의 설계도(구상도)를 그려봅시다.			

설계된 학습의 수학적 모델링 단계는 다음과 같다. 첫 단계인 [실세계 문제] 단계는 학생들로 하여금 학급 전체 토의를 통한 준비활동을 하도록 하는 단계로, 먼저 학습자의 실세계 맥락과 연계된 수학적 모델링 과제(<표 IV-2> 참고)를 제시함으로써 동기유발과 과제 제시를 하고, 학생들로 하여금 주어진 문제상황에 대하여 학급 전체의 친구들과 이야기를 나누도록 함으로써 문제상황을 확인하도록 하였다.

다음 [모델] 단계는 소그룹 활동을 통한 모델유도활동이 이루어지는 단계로, 학생들로 하여금 문제상황을 관찰, 이해, 단순화하고 모델을 형성하도록 하였다. 이 단계에서 학생들은 주어진 문제상황에서 문제해결을 위해 활용해야 할 정보들을 선택하고, 문제상황을 단순화함으로써 문제해결을 위해 해야 할 일을 생각하였으며, 문제 해결을 위한 전략 및 과정을 계획하고 기록하였다. 또 학생들은 과제 수행에 필요한 정보를 수집하는데 사용한 방법 및 정보에 대한 조사·수집과정 및 결과들을 정리한 후, 조사된 정보수집 결과를 바탕으로 태양계 모형의 설계도(구상도)를 그렸으며, 설계도를 그리는 과정에서 수행한 여러 활동들의 순서 및 내용을 구체적으로 기록하였다.

세 번째 단계인 [수학적 결론] 단계는 모델탐색활동이 이루어지는 단계로 학생들로 하여금 프리젠테이션을 통해 이제까지의 활동을 정리하고, 자신들이 개발한 모델을 발표하도록 하였다. 이 과정에서 학생들은 자신들의 문제해결과정을 되돌아보고, 과제 수행에 활용된 수학적 개념·원리·법칙에 대해 기록하고, 모둠별로 자신들의 과제 수행 과정 및 완성된 태양계 모형의 설계도에 대해 발표하였으며, 각 모둠들이 발표한 설계도(구상도)에 포함된 수학적 개념·원리·법칙을 찾아 기록하였다.

마지막 [모델 적용] 단계에서는 학급 전체 토의를 통해 모델적용활동이 이루어지도록 하였는데, 이 단계에서 학생들은 앞서 발표된 다양한 설계도 중에서 태양계 모형 제작에 가장 적절한 설계도에 대하여 의견을 공유하고, 더 좋은 방법이 있을지에 대해 토의하였다. 또 태양계 모형 제작이 아닌 변화된 상황 및 조건이 주어질 경우, 앞서 수행했던 문제해결과정을 어떻게 활용할 것인지에 대해서도 의견을 나누고, 과제 수행 과정에서 사용했던 여러 방법들을 활용할 수 있는 또다른 사례들을 찾아봄으로써 과제를 마무리하였다.

2) 수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 학습에서 나타난 수학적 모델링 학습 과정

⑴ 수학의 응용 학습

수학적 모델링 문제상황을 적용한 규칙성과 문제해결 영역의 학습이 이루어지는 동안 학습자들은 실세계의 상황을 여러 가지 방법으로 탐구해봄으로써 수학적인 개념이나 원리 및 법칙을 도입할 필요성을 느끼고, 비형식적 개념들을 점차 형식화함으로써 자연스럽게 수학적 개념, 원리, 법칙을 학습하는 수학의 응용 학습 과정을 거치게 되었다.

<그림 IV-2>의 사례는 학생들이 주어진 전지 한 장에 태양계 모형의 설계도를 그리기 위하여 축소해야 할 비율을 정하는 모습을 나타내고 있다. 학생들은 전지 한 장의 대각선의 길이와 태양에서 지구까지의 거리, 그리고 태양으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 행성까지의 거리를 비교함으로써 전지 한 장에 태양계의 모든 행성들을 나타낼 수 있도록 하는 축소 비율을 찾아내었다. 우선 전지에서 가장 긴 부분인 대각선의 길이를 재고, 자신들이 정보 검색을 통해 찾아낸 자료(태양에서 지구까지의 거리를 1로 보았을 때, 태양에서 각 행성까지의 거리)의 내용을 바탕으로 태양과 지구 사이의 거리를 1이라고 가정할 때, 태양에서 가장 멀리 떨어진 해왕성까지의 거리가 30.1임을 구하였다(<그림 IV-2-ⓐ> 참조). 학생들은 이렇게 구해진 태양~해왕성까지의 거리 30.1을 자신들이 이미 측정했던 전지 한 장의 대각선 길이 135cm와 비교한 후, 전지 한 장에 태양계 모형의 설계도를 꽉차게 그리기 위해서는 30.1에 4배를 해주어야 하며, 태양에서부터 나머지 다른 행성들까지의 거리도 이와 똑같이 4배를 해주기로 결정하였다(<그림 IV-2-ⓑ> 참조).

또한 이들은 각 행성들의 크기를 반지름의 길이를 같은 비율로 축소함으로써 결정하고 있는데, 이미 검색된 자료(지구의 지름을 1로 보았을 때, 각 행성들의 지름의 길이)를 바탕으로 구하였다(<그림 IV-2-ⓒ> 참조). 이 부분에서 학생들은 학습지에 전지에서의 각 행성들의 거리를 구하기 위해 사용된 축소 비율과 각 행성들의 지름

을 구하기 위해 사용된 축소 비율을 똑같게 하지 못한 것을 아쉬운 점으로 밝히고 있다(<그림 Ⅳ-2-(d)> 참조).

이와 같은 학생들의 학습 활동 모습은 학생들이 주어진 문제상황을 이해하고, 이를 해결하기 위하여 자연스럽게 비와 비율 및 비례식을 이용하여 전지 한 장 안에 나타낼 수 있는 태양~각 행성들까지의 거리 및 각 행성들의 지름을 구하고 있음을 보여주고 있는데, 이것은 학생들이 문제를 해결하기 위하여 상황과 관련된 수학적 개념 · 원리 · 법칙(비와 비율 & 비례식)를 찾아내고, 이를 문제 해결에 활용하는 것이라 해석할 수 있으며, 또한 학생들이 문제상황을 파악하여 수학적으로 구조화, 단순화, 조직화함으로써 현실 상황을 수학에 접목시킴으로써 수학의 응용 학습 과정을 나타내는 것이라 할 수 있다.

다음의 <그림 Ⅳ-3>의 사례의 경우, 전지의 대각선 길이를 재고 태양으로부터 각 행성까지의 실제거리를 조사한 후, 전지 안에 나타낼 수 있는 축소비율을 찾는 과정을 나타내고 있다. 후에 모둠별 발표 때, 학생들은 축척이라는 말을 사용하여 이 과정을 설명하였는데([그림 Ⅳ-3-(a)] 참조), 학생들은 조사된 태양~각 행성까지의 실제거리를 500, 1000, 500만, 1000만, 5000만으로 나누어 보면서 적절한 축척을 찾고자 하였으나, 이러한 활동으로 알맞은 축척을 찾지 못하자 결국, 새로 찾은 정보(5학년 2학기 과학 교과서에 나타난 태양~지구까지의 거리를 1로 보았을 때의 각 행성까지의 거리)를 바탕으로 하여 이들 값에 4배를 함으로써 전지에 나타낼 태양에서부터 각 행성까지의 거리를 구하였다(<그림 Ⅳ-3-(b)> 참

(a)
저희는 먼저 전지의 대각선 길이를 측정하였습니다.
전지의 대각선 길이=13524cm입니다.
태양-지구간 거리를 1로 봤을 때 해왕성까지의 거리는 30.1입니다.

(b)
$30.1 \times 4 = 120.4cm$로 거의 꽉찹니다.
대각선에서 태양을 그릴 10cm를 빼면 125cm로 거의 꽉찹니다.
그래서 지구에서 태양 사이의 거리를 4로 결정하고 다른 행성도 그 기준에 맞췄습니다.
태양과 행성간의 거리는 각각 아래와 같습니다.

수성	금성	지구	화성	목성	토성	천왕성	해왕성
1.6cm	2.8cm	4cm	6cm	20.8cm	38cm	76.8cm	120.4cm

(c)
지구의 지름을 1cm로 보았을 때 다른 행성들의 지름으로 계산하여 했습니다.
각 행성들의 지름은 아래와 같습니다.

수성	금성	지구	화성	목성	토성	천왕성	해왕성	단위
0.4	0.9	1	0.5	11.2	0.4	4	3.9	cm

(d)
아쉬운 점은 행성들 간의 크기를 비율로 비교하지 못했고, 행성의 크기와 떨어진 거리가 단위가 일치하지 않다는 점입니다.

<그림 Ⅳ-2> 수학의 응용 학습 사례 1

(a)
***이 뽑은 자료 중 행성들과 태양과의 거리가 있길래 전지 대각선 길이 1m 35cm에 맞춰 축척을 하려고 했습니다.

(b)
아무리 줄여도 전지대각선 길이와는 너무 멀었기 때문에 결국은 과학 교과서에 있던 거리에 ×4를 해서 전지 대각선 길이를 맞추었습니다.

<그림 Ⅳ-3> 수학의 응용 학습 사례 2

조).

이와 같은 장면은 학생들이 주어진 문제상황을 수학적으로 구조화시켜 파악하고 비와 비율, 비의 성질, 비례식 등의 수학적 개념과 원리를 문제상황의 해결에 사용함으로써 현실 맥락의 문제 속에서 관련된 수학적 요소를 찾아내고, 이를 도입하여 문제를 해결해가는 수학의 응용 학습 과정을 나타내는 것이라 해석할 수 있다.

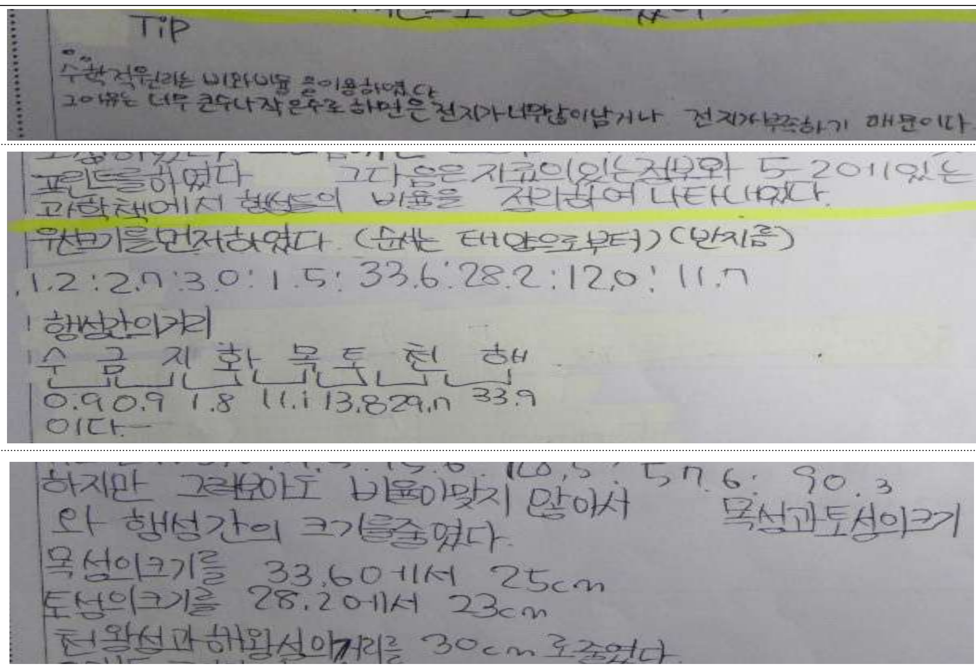
<그림 Ⅳ-4>의 사례는 앞의 두 사례에서 볼 수 있었던 것과 유사하게 전지 한 장의 대각선에 태양계의 각 행성들을 나타낼 수 있도록 하는 태양~각 행성까지의 거리를 찾기 위해 비와 비율 및 비례식 등을 사용하고자 시도하고 있음을 보여주고 있다(<그림 Ⅳ-4-ⓐ> 참조). 이 사례에서 학생들은 처음에 5학년 2학기 과학 교과서에 나타난 태양으로부터 지구까지의 거리와 지구의 지름을 각각 1로 보았을 때의 태양~각 행성들까지의 거리 및 각 행성들의 지름을 주어진 숫자 그대로 사용하여 전지에 그리려고 시도하였다(<그림 Ⅳ-4-ⓑ> 참조). 그러나 각 행성의 크기와 행성간의 거리를 합친 길이가 너무 커서 전지 안에 모두 나타낼 수 없음을 인식하고 수정하였는데, 이 때 학생들은 논리적인 근거 없이 목성과 토성의 크기 및 행성간의 거리를 임의로 줄여서 전지 안에 나타냄으로써 올바른 문제해결에 이르지 못하고 있음을 보여주고 있다(<그림 Ⅳ-4-ⓒ> 참조).

이는 앞선 <그림 Ⅳ-2>와 <그림 Ⅳ-3>의 두 사례에 비하여 보다 덜 형식화된 수학의 응용 학습이 이루어졌다고 볼 수 있는데, <그림 Ⅳ-4> 사례에서 학생들은 비록 주어진 문제상황을 해결하기 위하여 문제 해결에 비와 비율 및 비례식 등의 수학적 개념・원리・법칙을 응용하고 활용하고자 시도는 하고 있으나 수학적 논리와 관련 없이 문제를 해결함으로써 주어진 문제상황 및 맥락에 수학적 요소를 올바르게 적용하지 못하고 있다. 이는 문제 해결 과정에서 수학의 응용 학습이 불완전하였다고 해석할 수 있다.

⑵ 상황적・실제적 추상화 학습

다음의 <그림 Ⅳ-5>와 <그림 Ⅳ-6>은 학생들이 규칙성과 함수 영역의 활동을 진행하면서 나타낸 상황적・실제적 추상화 학습 모습을 나타내고 있다. <그림

(a)
(b)
(c)



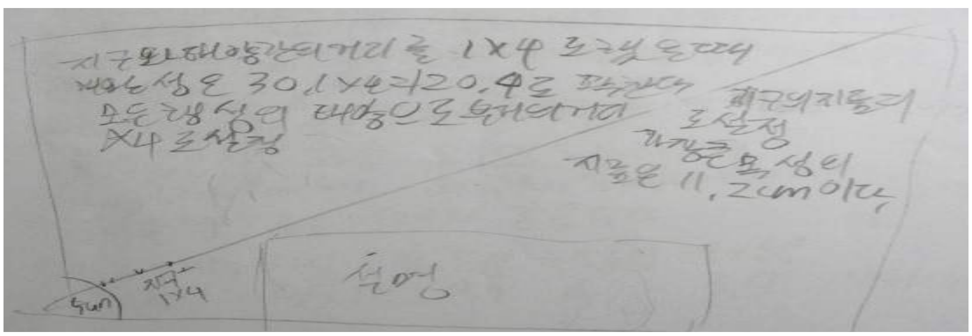
<그림 Ⅳ-4> 수학의 응용 학습 사례 3

Ⅳ-5>와 <그림 Ⅳ-6>의 경우, 각 모둠의 학생들이 자 혹은 줄자를 이용하여 전지의 대각선이나 가로, 세로의 길이를 재어 봄으로써 자신들이 최종적으로 나타내어야 할 태양계 모형 설계도의 크기를 확인하고 있다. 또한 검색된 자료 및 자신들이 새로이 구해낸 태양으로부터 각 행성들까지의 거리와 각 행성들의 지름 혹은 반지름의 길이를 전지 위에 나타내고 이를 바탕으로 자, 컴퍼스, 원형 색종이 등을 활용하여 태양계 모형 설계도를 그리고 있다. 이는 자신의 경험과 직관을 바탕으로 여러 가지 물리적 대상들을 활용하여 문제를 해결하는 것으로 상황적·실제적 추상화 학습 과정이 이루어진 것이라 볼 수 있다.

<그림 Ⅳ-5>의 경우, 문제상황 속에서 태양으로부터 각 행성들까지의 거리의 관계를 찾아내고, 이를 각 행성들의 크기 상황으로 일반화하여 문제를 해결하고 있다. 우선 전지 한 장의 대각선에 모두 들어갈 수 있도록 태양~각 행성들까지의 거리를 비와 비율 및 비례식을 통하여 알아내고, 이러한 방법을 전지에 나타낼 각 행성들의 크기(지름)에도 관련시켜 적용하고 있다. 또한 이들 학생들은 주어진 현실 맥락의 문제상황을 비, 비율, 비례식이라고 하는 수학 공식 및 이론 등과 관련지어 설명하고 이에 따라 문제를 해결하고 있는데, 이러한 학생들의 학습 모습은 상황적·실제적 추상화 학습 과정을 보여주는 것이라 할 수 있다.

<그림 Ⅳ-6>의 사례에서 학생들은 다른 모둠의 학생들과 유사하게 자, 줄자 등으로 전지의 길이를 재고, 태양으로부터 각 행성까지의 거리 및 각 행성들의 크기(지름)을 비와 비율 및 비례식 등을 통하여 구하고 전지에 그리기 시작하였으나, 뒤늦게 전지에 나타내야 할 각각의 수치들을 구하는데 비율을 잘못 적용하였음을 알고,

① 전지의 길이 측정: 135㎝
② 해왕성을 끝으로 지정 $30.1 \times 4 = 120.4cm$
③ 다른 행성도 ×4해서 길이 구함.
④ 지구의 지름=1일때 다른 행성들의 지름 구해서 크기 구함.
⑤ 같은 비율로 축소함.



<그림 Ⅳ-5> 상황적·실제적 추상화 학습 사례 1

우리조는 태양으로부터의 거리를 찾았는데, 그 자료만으로도 충분했다.
선생님께 전지를 받아 5학년 2학기 책(과학 교과서)을 찾아보며, 지름과 태양으로부터의 거리를 그렸다.
맨 처음에는 태양으로부터의 거리를 2로 맞춰서 비율을 맞췄는데, 너무 커서 1.5로 바꾸었다.
반지름을 2로 비율을 맞췄는데, 너무 커서 바꾸려고 했는데, 이미 색칠을 해버려서 그냥 2㎝로 하고 전지를 하나 더 이어붙였다.

<그림 Ⅳ-6> 상황적·실제적 추상화 학습 사례 2

전지를 또 한 장 연결하여 그림으로써 태양계 모형 설계도를 완성하였다. 이는 문제상황 속에 함축된 여러 가지 관계들을 찾아내고, 이를 실제적으로 추상화하는데 적용할 뿐만 아니라, 문제 해결 과정에서 오류를 확인하고, 찾아낸 관계를 새로운 상황에 일반화시켜 새롭게 적용함으로써 상황적・실제적 추상화 학습 과정을 나타낸 것이라 볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 초등학교에서 적용가능한 수학적 모델링의 문제상황을 개발하기 위하여 체계적인 개발 절차에 따라 우리나라 초등학교 6학년 수학 교육과정 내용을 바탕으로 하여 영역별로 문제를 개발하였다. 그리고 개발된 문제상황을 실제 현장에 적용해 봄으로써 아동들의 수학적 모델링 학습 과정을 분석하고 적용가능성을 타진해보았다. 먼저, 수학적 모델링의 문제상황을 개발하기 위하여 이와 관련된 국내・외 문헌들을 참고하여 문항 개발 절차를 설정하고 교육과정의 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결의 5개 영역 내용을 각각 포함하는 실생활 문제를 개발하였다. 개발된 실생활 문제는 정해진 정답이 없으며 문제해결방법이 다양하여 다각도로 문제해결 전략을 생각해내야 하는 비구조화된 문제로, 학생들의 고차원적 사고를 유도하는데 초점을 두었다. 이는 초등수학 전문가로 이루어진 전문가 회의를 통해 내용타당도를 검증하였으며 초등학교 6학년을 대상으로 예비 검사를 실시하여 수정・보완되어 최종 완성하였다.

그리고 개발된 문제상황을 실제로 적용하여 아동들의 수학적 모델링 학습 과정을 분석하기 위해 규칙성과 문제해결 영역의 문제상황을 선정하여 서울 소재의 초등학교 6학년 한 학급에 적용하였다. 아동의 수학적 모델링 학습 과정은 수학의 응용 학습과 상황적・실제적 추상화 학습에서 어떻게 이루어졌으며 그 가능성은 어떠한가에 초점을 두고 분석하였다.

그 결과 학생들은 태양계 모형의 설계도를 그리는 수학적 모델링 문제상황에 비, 비율, 비례, 비례식 등과 관련된 개념과 원리를 접목시켜 문제를 해결함으로써 수학적 개념・원리・법칙을 자연스럽게 학습하고 사용하는 수학의 응용 학습 과정을 나타내고 있었다. 이는 본 연구가 미국과 호주의 6학년 학생들이 여러 가지 수학적 모델링 문제상황을 해결함에 있어서 실제적이고 구체적인 문제상황을 수학적으로 구조화하고, 문제해결을 위하여 수학적 개념과 원리, 법칙을 적용했던 Doerr와 English(2003)의 연구와 유사한 결과를 나타내고 있음을 보여준다.

또한 본 연구에서는 학생들이 제시된 수학적 모델링 문제를 해결함에 있어 자신의 직관과 줄자, 컴퍼스 등의 물리적 대상을 활용하여 문제상황에 내포된 여러 비례 관계들을 발견하고, 이를 일반화하여 비례식으로 표현하고 태양계 모형의 설계도를 구체적으로 그려냄으로써 상황적・실제적 추상화 학습 과정이 나타났다고 보여진다. 이러한 결과는 학생들이 '가장 좋은 스낵을 결정하기 위한 소비자 가이드를 만들기', '버터콩', '종이비행기 콘테스트' 문제를 해결하기 위해 실제적 상황 속의 자료 속에서 경향이나 관계, 규칙을 찾고, 이를 일반화하여 관련된 다른 상황에 이 관계를 활용했던 English(2006), English와 Watters(2005a)의 연구 결과와 같은 맥락으로 볼 수 있다. 또한 학생들이 모델링 과제들을 해결함으로써 비형식적인 이해와 추측들을 형식화하고 일반화할 수 있는 능력을 기르게 된다고 보았던 English(2003)의 견해와 일치한다고 보여진다.

수학 학습에 있어서 추상화 과정은 고난이도의 작업이며, 특히 구체적 단계에서 상징적・추상적 단계로 이행하는 과정인 초등학교 6학년에게는 매우 어려운 일이다. 따라서 수학적 모델링을 적용하고 그 과정 속에서 나타난 추상화 과정을 분석해보는 일은 매우 의미있는 일이라 할 수 있다. 수학적 모델링의 적용을 통해 학생들의 추상화 과정에서의 효과를 검증하는 여러 연구들이 있으나(예, 류희찬・김지연, 2005; 성호금, 2000; 손홍찬・류희찬, 2005; 신은주・이종희, 2005; 신현성, 2001; 조원주, 2002 등), 이러한 연구들은 중・고등학교를 중심으로 적용되고 있어 초등학생에게 적용하여 그 가능성을 살펴보는 연구가 필요한 실정이다. 이에 초등학생에게도 보다 의미있는 수학학습을 하는데 있어 수학적 모델링의 활용 가능성을 보여준 본 연구는 향후 수학적 모델링 연구에 시사하는 바가 있다고 할 수 있다. 이를 통해 초등학교 현장에서의 모델링 적용에 대한 보다 다양한 후속

연구가 이루어져 수학적 모델링 학습이 창의적, 수학적 인성을 함양하는데 일조하기를 기대해본다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설 IV-수학, 과학, 실과, 서울: 대한교과서 주식회사.

______ (2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 2-1, 서울: (주) 두산.

교육인적자원부 (2007). 초등학교 교육과정, 교육인적자원부.

권기석 · 박배훈 (1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(2), 149-159.

김민경 · 홍지연 · 김은경 (2009). 수학적 모델링 사례 분석을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 48(4), 365-385.

김선희 · 김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 6(3), 283-299.

류희찬 · 김지연 (2005). 엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서의 상호작용: 중학교 2학년 대수 영역을 중심으로, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 15(1), 75-105.

성호금 (2000). 수학적 모델링 지도가 수학적 신념 및 학업 성취도에 미치는 영향: 고등학교 함수 단원을 중심으로, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

손홍찬 · 류희찬 (2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 15(4), 505-522.

신은주 (2005). 모델링 활동 사례 분석 연구: 중학교 수학을 중심으로, 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

신은주 · 권오남 (2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 11(1), 157-177.

신은주 · 이종희 (2005). 구체와 추상을 연결하는 모델의 중재기능 분석, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 11(1), 157-177.

신현성 (2001). 수학적 모델링을 통한 교육과정의 구성원리, 한국학교수학회논문집 4(2), 27-32.

조완영 · 권성룡 (1998). 열린수학교옥과 모델링, 대한수학교육학회논문집 8(2), 663-677.

조원주 (2002). 중학교 함수영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가기준안 개발, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

주미경 (1991). 모델링 지도에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 1(1), 53-61.

한국교육공학회 (2005). 교육공학 용어사전, 서울: 교육과학사.

홍지연 (2007). 수학적 모델링을 활용한 수업이 초등학교 4학년 수와 연산 학습에 미치는 효과, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

황혜정 (2007). 수학적 모델링의 이해, 대한수학교육학회지 <학교수학> 9(1), 65-97.

Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning, *Teaching mathematics and its application* 20(3), 121-127.

Burghes, D. N. (1980). Mathematical modelling : A positive direction for the teaching of applications of mathematics at school, *Educational studies in mathematics* 11(1), 113-131.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students′ mathematical reasoning about data, *Journal for Research in Mathematics Education* 34(2), 110-136.

Edward, D., & Hamson, M. (1989). *Guide to mathematical modeling,* Boca Ration, FL : CRC Press.

English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective, *Educational Studies in Mathematics* 54, 225-248.

______ (2006). Mathematical modeling in the primary school : Children′s construction of a consumer guide, *Educational Studies in Mathematics* 63, 303-323.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005a). Mathematical modelling in the early school years, *Mathematics Education Research Journal* 16(3), 58-79.

______ (2005b). Mathematical

modelling with 9-year-olds, In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the Ingternational Group ofr the Psychology of Mathematics Education* 2. Melbourne : PME. 297-304.

Galbraith, P. L., & Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard models-meeting the challenge of modelling, *Educational Studies in Mathematics* 21, 137-163.

Gravemeijer, K. (2002). Preamble : From model to modeling, *Symbolizing. Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. V. Oers, and L. Verschaffel (Eds.), Derdrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publishers.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes, *Educational Technology Research and Developmen* 45(1), 65-94.

Kitchner, K. S. (1983). Cognition, metacognition, and epistemoc cognition : A three-level model of cognitive processing, *Human Development* 26, 222-232.

Lenchner, G. (1983). *Creative Problem Solving in the School Mathematics,* Bostin, MA : Hoiugton Mittilin Co.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism : Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ. 35-58.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism : Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah, NJ : Erlbaum. 3-34.

Llinares, S., & Roig, A. I. (2008). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems, *International Journal of Science and Mathematics Education* 6, pp.505-532.

Maki, D., & Thompson, M. (1973). *Mathematical Models and Applications, with Emphasis on the Social, Life, and Management Sciences* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.

National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM] (1977). Position statement on basic skills. *Arithemetic Teachers* (1977, Oct). 8-22.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. Reston, VA : NCTM.

______________________________ (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. VA : NCTM.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum: a Resource Guide of Classroom Exercises*. Reston, VA : NCTM.

Niss, M. (1989). Aims and scope of application and modeling in mathematics curriculum. In W. Blum, J. S. Berry et al. (Eds.), *Applications and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*. Chichester, UK : Elis Horwood Limited. 22-31.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school : A teaching experiment with fifth graders, *Journal for Research in Mathematics Education* 28(5), 577-601.

Wood, P. K. (1983). Inquiring systems and problem structure : Implications for cognitive development, *Human Development* 26, 249-265.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective teachers' use of computing tools to develop and validate functions as mathematical models, *Journal for Research in*

Mathematics Education 29(2), 184-201.
Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation : Exploring mathematical modeling as a context for deepening students′ understandings of curricular mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 63, 89-112.

A Study on Development of Problem Contexts for an Application to Mathematical Modeling

Kim, Min Kyeong
Ewha Womans University, Korea
E-mail : mkkim@ewha.ac.kr

Hong, Jee Yun
Ewha Womans University The Graduate School, Korea
E-mail : cutty-hjy@hanmail.net

Kim, Hye Won
Ewha Womans University The Graduate School, Korea
E-mai : bluefake@empas.com

Mathematical modeling has been observed in the way of a possibility to contribute in improving students' problem solving abilities. One of the important views of real life problem context could be described such as a useful ways to interpret the real life leading to children's abstraction process.

The problem contexts for the grade 6 with mathematical modeling perspectives were developed by reviewing the current 7th National Mathematics Curriculum of Korea. Those include the 5 content areas such as number & operation, geometry, measurement, probability & statistics, and pattern & problem solving. One of problem contexts, "Space", specially designed for pattern & problem solving area, was applied to the grade 6 students and analyzed in detail to understand student's mathematical modeling progress.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : mathematical modeling, problem, problem context, development of problem context
* This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (MOEHRD, Basic Research Promotion Fund) (KRF-2008-327-B00627)