영재교육연구 제 20 권 제 2 호
Journal of Gifted/Talented Education
2010. Vol 20. No 2, pp. 461~486

종이접기 프로그램에서 수학영재학생들의 문제 만들기 전략 분석

임 근 광

광주농성초등학교

수학학습에서 문제 만들기는 수학적사고력 신장 및 수학학습에 긍정적인 태도와 자신감을 갖게 한다. 특히 영재학생들은 주어진 문제를 해결하는 수준을 넘어 어떤 주어진 상황에서 새로운 문제를 창안해 낼 수 있어야 한다. 본 연구는 종이를 접기 과정에서 영재학생들이 문제를 만들 때 사용하는 전략은 무엇이고 문제 만들기 활동에서 영재학생들의 사고를 촉진하는 방안은 무엇인지를 밝혀 그 시사점을 얻고자 하였다.

주제어: 수학영재, 문제 만들기, 종이접기

I. 서　론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학영재성이란 선천적으로 타고난 소질과 적성, 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식이 수학적인 문제를 해결하고자하는 지적, 정의적인 행동 특성과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 수학적 과제를 창의적으로 수행해 낼 수 있는 잠재적 가능성을 말한다(정인철, 2007). 따라서 수학영재교육의 목적은 수학영재성을 수학적 재능으로 발휘하여 성취할 수 있도록 도와주어 학생들 각자의 수준에 맞는 수학적 힘을 양성할 수 있도록 하는 것이며, 장차 과학기술 분야에 종사하면서 21세기 정보화 사회를 이끌어 갈 국가의 주역인 수학 영재들에게 내실이 있는 수학교육을 제공함으로써 선도적인 과학 기술 문명이 싹틀 수 있는 토대를 마련하는 것이다(나귀수, 1998).

수학적 힘을 기르기 위해서는 다양한 구체물을 활용하여 개념, 원리, 법칙

교신저자: 임근광(math-119@hanmail.net)

등의 이해를 돕도록 해야 하며, 수학 학습에 대한 흥미와 자신감을 길러주기 위해서는 학생의 수준에 맞는 내용을 자기 주도적으로 학습하여 성취감을 갖게 하고, 학생 스스로 탐구활동을 활발히 할 수 있도록 배려되어야 한다(교육인적자원부, 1999). 즉 수학적 힘은 학생들이 주어진 문제를 해결하는 것만으로는 육성될 수 없으며 학생 스스로 조작하고 실험하는 등의 탐구과정이 필수적이라는 것이다.

수학영재 학생들은 사고기능이 유연하여 한 조작에서 다른 조작으로 신속하게 전이하며 사고의 가역성도 갖추고 있다. 쉽고, 명백하고, 경제적인 해결책을 열망하며, 주변에서 볼 수 있는 특수한 수학적 개념을 초보적인 형태로 형식화한다(Krutetskii, 1976). 또한, 수학영재들은 타고난 수학적 소질과 적성, 지적인 능력과 창의성을 바탕으로 참신한 과제에 대한 도전적이고 창조적인 호기심을 가지고 있다. 그들은 많은 양을 학습하면서 보다 상위 학년의 내용을 이해하거나 기존의 문제를 빨리 해결하는 차원을 넘어, 그 문제나 과제의 원리를 이해하고 창의적인 해법으로 일반화하기도 하며 관련된 새로운 문제를 만들어 내기도 하는 등의 보다 창조적인 활동을 즐거워한다(김지원, 2002).

강완(1994)은 크루테스키의 연구결과를 토대로 영재학생에 제공할 수 있는 학습활동으로 주어진 소재에 맞추어 문제 만들기, 부족한 정보를 채워 문제 만들기, 과잉정보를 덜어내어 문제 만들기, 주어진 유형으로 문제 만들기 등을 제시하였다. 또한, Sheffield(2006)는 수학학습자를 수학문맹자(Illiterates) → 맹목적 계산자(Doers) → 살아있는 계산자(Computers) → 수학활용자(Consumers) → 문제해결자(Problem Solvers) → 문제발견자(Problem Posers) → 창조자(Creator)로 구분하면서 ‘문제를 만드는 활동은 문제해결 과정에서 보이는 학생들의 사고력보다 더 높은 수준의 사고력이 필요하며 메타인지와 같은 고등 수준의 사고력을 요구하는 활동이다’라고 하였다. 즉, 영재학생들이 주어진 문제를 해결하는 수준에 머물러 있게 해서는 안 되며 어떤 주어진 상황에서 새로운 문제를 창안해 낼 수준으로 끌어 올려야 한다는 것이다.

영재학생들의 수학적 사고 능력을 발전시키기 위해서는 주어진 문제를 ‘수동적, 완결적’으로 다루는 것보다는 ‘능동적, 발전적’으로 취급해야 한다. Moses & Bjork(1993)은 학생은 단지 해결 전략뿐만 아니라 그것을 요구하는 문제를 창조하는데 적극적으로 참여함으로써 더 잘 학습하게 된다고 하였으며 Brown & Walter(1990)은 어떤 것을 알게 되는 것은 단지 구경하는 것이 아니라 참여

하는 과정에서 더 잘 알게 된다고 하였다. 즉 새로운 문제를 제기하는 과정이 학습 과정에 포함되어야 하며 문제를 수정하는 것까지 포함하는 적극적인 자세가 요구된다는 것이다.

문제 해결의 관점에서 볼 때 가르친다는 것은 비정형 문제 또는 전형적인 교과서형 문제를 해결하는 이상의 것을 필요로 한다. 학습의 본질은 탐구, 추측, 조사, 점검하는 훈련, 즉 문제 해결의 모든 측면 그 자체이다. 학생들에게 주어진 상황으로부터 문제를 형식화며 주어진 문제의 조건을 수정함으로써 새로운 문제를 창안할 기회를 주어야 한다(NCTM, 1991).

문제 만들기와 관련된 최근의 연구(윤선아, 2009; 최성웅; 2009; 서정현, 2002, 조송연, 2002; 나철영, 2001; 조제호, 1999)를 보면 문제 만들기가 문제 해결력, 문제 발견 능력, 수학적 사고력 신장에 긍정적 효과가 있다고 하였으며, 수학적으로 재발명하고 성공의 기쁨을 느끼게 되어 수학학습에 긍정적 태도와 자신감을 갖게 하였다고 하였다. 특히 상위집단에서 문제설정 방법이 유의미하게 높은 것으로 나타나 수학영재학생들에게 적용하면 더 효과가 있을 것으로 추측된다. 즉 문제 만들기는 학생들에게 있어서 창의적인 능력을 길러주고 수학적 사고의 본질이 되며, 문제를 보다 더 잘 이해하게 하며 능력에 맞게 능동적으로 수학학습에 참여하게 하고, 수학에 대하여 흥미와 관심을 가지게 하여 수학 학습을 촉진시킨다고 할 수 있다.

영재프로그램은 영재교육기관의 철학과 개설 목적, 유형과 성격, 그리고 교육대상자의 수준 등에 부합하도록 개발되어야 한다(김지원, 2002). 즉, 영재프로그램의 대상자 선발은 프로그램이 추구하는 목적을 최대한 달성하기 위해 그 프로그램의 수준과 내용 도달 목표에 비추어 그에 적합한 학생들이 선발되어야 한다. 하지만 현장에서는 일단 우수한 학생들부터 선발 한 후, 그 학생들을 교육할 자료를 개발하는 식으로 영재교육이 이루어지고 있는 실정이다. 우리나라의 영재교육여건상 영재교육대상자 선발을 먼저 한 후 그에 맞는 교육자료를 개발해야 한다면 선발된 학생들의 수준에 맞는 자료가 개발되어야 한다. 물론 수학영재교육 전문가가 학생의 수준에 맞게 자료를 개발할 수도 있지만 같은 수준의 학생들이 동료 학생들과 토론하는 과정을 통해 자신 또는 다른 학생들의 수준에 맞는 문제를 만들고 해결방법을 같이 고안해 내는 프로그램 개발도 필요하다.

많은 연구결과(황정원, 1999; 정현정, 2000) 종이접기를 이용한 수학학습은

학생들이 직접 구체적인 활동을 해 봄으로써 흥미있고 재미있는 수학을 배우고, 보다 수업에 관심을 갖고 참여할 수 있으며 수업의 주제에 친근감을 갖고 성취감을 느낄 수 있고 학생들의 도형에 대한 직관적 사고력 향상에 유익한 것으로 나타났다.

본 연구자는 2003학년도부터 2008학년도까지 G광역시교육청 영재교육원에서 종이접기영재프로그램을 개발 적용하였다. 그 때 적용한 영재프로그램은 종이접기 그림과 설명이 주어지고 그에 맞는 질문이 주어져 있었다. 영재학생들은 종이접기를 하면서 문제를 해결하는 기쁨도 있었지만 일부 학생들은 도전적 과제로 생각하지 않고 수동적인 모습을 많이 보였다. 수업 중 어떤 학생이 "이 과정을 응용한다면 다른 것도 접을 수 있어요"라고 했을 때, 수동적인 학생들이 다양한 문제를 만들면서 적극적으로 해결하는 과정을 설명하는 모습을 보게 되었다. 여기에서 종이접기 과정만 제시하고 학생들이 스스로 문제를 만든다면 학생들 수준에 적합한 문제를 만들 수 있고 학생들이 적극적으로 참여할 것이라는 기대를 갖게 되었다.

따라서 본 연구는 종이를 접기 과정에서 영재학생들이 문제를 만들 때 사용하는 전략은 무엇이고 문제만들기 활동에서 영재학생들의 사고를 촉진하는 방안은 무엇인지를 밝혀 그 시사점을 얻고자 하였다.

2. 연구문제

본 연구는 수학영재학생들이 종이접기를 하는 과정에서 스스로 수학적 문제를 발견할 때 사용하는 전략은 무엇이고 문제 만들기 활동에서 학생들의 사고를 촉진하는 방법은 무엇인지에 대한 시사점을 얻기 위해 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

가. 종이접기 과정에서 수학영재학생들이 문제를 만들 때 사용하는 전략은 무엇인가?

나. 문제 만들기 활동에서 영재학생들의 사고를 촉진하는 방법은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 문제 만들기의 의미

문제 만들기라는 말은 Problem generation, Problem formulation, Problem posing, Problem definition 등의 다양한 용어를 사용되고 있다. 박영배(윤선아, 2009. 재인용)는 '문제 만들기'는 기존의 문제의 조건 일부 또는 전부를 변경하여 새로운 문제를 만드는 활동이고 '문제꾸미기'는 문제가 만들어져 있지 않은 상황으로부터 문제를 만드는 활동으로 정의하였다. 임문규(1992)는 교과서의 문제의 장면이나 조건을 다소 바꾸어 제시하는 '수학적 세계로부터 문제 만들기'와 수학적 상황이 아닌 것으로 것으로부터 문제 만들기를 하는 '실세계의 상황'으로부터 문제 만들기의 두 가지로 분류하면서 수학적 문제로부터 문제 만들기의 유형을 원 문제와 유사한 또는 새로운 발전적인 문제 만들기, 다양한 해결 방법에 따른 문제 만들기, 일반적인 문제에서 특수한 문제로와 그 역으로 문제 만들기, 조건이 과부족한 문제 해결에서 문제 만들기, 질문이 없는 문제 상황에서 문제 만들기 등 5가지로 분류하였다. 교육부(1999)의 초등수학 교육과정에서 문제 만들기는 직접적으로 설명하는 내용은 없으나 단계별로 제시한 수학과의 내용에서 심화과정 부분에 문제 만들기 활동과 관련된 언급들이 있으며 그 내용을 정리하면 식이나 그림에 알맞은 문제 만들기, 자료를 이용하여 문제 만들기, 문제의 조건 바꾸어 문제 만들기, 생활장면을 통해 문제 만들기 등으로 분류할 수 있다.

본 연구는 종이접기 관련 상황을 제시하고 학생들이 종이접기를 하면서 자신의 문제를 만들고 동료들과 토의하는 과정에서 동료들이 만든 문제를 변형하여 문제 만들기 등이 이루어지므로 문제가 만들어져 있지 않은 상황으로부터 문제를 만드는 활동과 기존의 문제의 조건의 일부 또는 전부를 변경하여 새로운 문제를 만드는 활동 모두를 포함하여 '문제 만들기'라는 용어를 사용한다.

2. 문제 만들기의 관점

문제 만들기는 수학적 활동과 지적 탐구에서 중요한 역할을 한다. 교육과정의 목표를 도달하기 위한 수단은 물론 하나의 목표 그 자체로써 수학적 의의가 있다. 문제 만들기와 창의적 사고의 관계 및 문제 만들기와 문제 해결의 관계, 수학에 대한 흥미를 높일 수 있는 문제 만들기에 대해 Silver(1993)의 견해를 근거로 살펴보고자 한다.

첫째, 문제 만들기는 창의적 활동이며 동시에 학생의 특별한 수학적 능력으

로 본다.

한국교육개발원에서 개발한 학문적성검사의 문항은 학생들의 창의성과 문제 해결력 그리고 학생의 특별한 수학적 능력을 검사하기 위한 도구로 조건을 주고 조건에 맞는 문제 만들기 형태의 문항이 출제된다. 이것은 학생 개인의 창의성을 확인하기 위한 검사지에 문제 만들기를 포함시킨 경우이며 또한 수학영재를 연구하기 위해 문제만들기와 특별한 수학적 능력의 관계 또는 수학에 있어서 다른 능력 수준을 가진 피험자들의 문제 만들기를 비교하는 경우가 많다. 즉 이것은 문제 만들기를 오랫동안 창의적 활동 또는 특별한 수학적 재능의 특성으로 본 데서 비롯된 것이다.

둘째, 문제 만들기를 탐구지향적 교수의 한 특징으로 본다.

Sheffield(2006)는 창의적 사고를 위한 발견적 사고법으로 탐구하기, 의사소통하기, 연결짓기, 문제 만들기, 평가하기의 순환적 과정을 제시하면서 학생들의 창의적이고 탐구적인 수학자와 같이 생각하도록 하는데 사용되어 질 수 있다고 하였다. 기존에 알고 있던 수학적 아이디어와 연결시키고 심층적으로 사고하고 문제를 제기하며 동료들과 의사소통을 통해 탐구할 새로운 문제를 만들어 보는 활동은 탐구지향적 교수활동 중의 하나이다.

셋째, 문제 만들기와 문제 해결을 연결시킴으로써 궁극적으로 학생들의 문제 해결력을 신장시킬 수 있다고 본다. 예를 들어 학생들 자신이 문제를 생성하면 문제해결에서 산술개념과 기술을 적용시키는 능력을 향상시킬 수 있다. 문제 만들기를 사용한 어떤 일본 실험 교수법에서 문제 만들기는 더 완벽하게 문제를 분석하기 위해 학생들을 도와주는 수단으로 학생들의 문제 해결능력을 강화시키는 수단으로 구체화되었다(조정언, 2002)

넷째, 문제 만들기를 학생들에게 수학적 이해를 주는 수단으로 본다.

이 견해는 학생들이 문제를 만드는 과정을 봄으로써 이들이 수학에 대해서 얼마나 이해를 하고 있는지 파악할 수 있다는 것이다. 흔히 학생들의 문제해결에서 풀이 과정을 보면 학생들이 어디서 어려움에 부딪치는지를 알 수 있듯이 학생들이 만든 문제의 수준이나 내용을 보고 학생들이 이해의 수준을 파악할 수 있다는 견해이다.

다섯째, 문제 만들기를 학생의 수학에 대한 성향을 개선하는 수단으로 본다.

NCTM(1991)은 학생들은 흥미로운 문제와 질문을 형성할 기회를 가져야 한다고 제안하고 있다. 이는 문제만들기가 학생들이 수학을 바라보는 관점이나

성향과 밀접한 관련 있다는 전제하에 이루어진 제안이며 학생들이 문제를 만드는 활동을 하다보면 수학에 대해 흥미를 가질 뿐만 아니라 수학에 대한 두려움이 제거되므로 문제 만들기를 통해 수학 불안이 감소될 수 있다고 보는 것이다.

3. 문제 만들기 전략 및 사고과정

竹內芳南은 발전적 전개에 의한 문제 만들기 전략으로 원 문제의 해결(1단계) → 원 문제를 변형한 문제 만들기(2단계) → 만든 문제의 해결(3단계)를 제시하였고 橋本吉彦은 원제의 선정(1단계) → 원제의 해결(2단계) → 문제 만들기(3단계) → 만든 문제의 발표(4단계) → 만든 문제의 해결(5단계)를 제시하였다(나철영, 2001, 재인용). 또한 임문규(1992)는 실세계적인 상황으로부터 문제 만들기를 상황의 설정 및 제시(1단계) → 학생들 개인의 문제 만들기(2단계) → 학생들이 만든 문제의 발표(3단계) → 학습 문제의 구성 및 결정(4단계) → 학급 문제의 해결(5단계) → 학급 문제의 해결의 검토(6단계) → 발전적인 문제 만들기(7단계)를 제시하였다.

또한, Brown & Walter(1990)는 문제 만들기의 첫 단계로 ‘수용’ 두 번째 단계로 ‘도전’ 두 가지로 나누고 필요한 전략을 제시하였다. 문제를 만드는 첫 단계는 탐구 과정에서 주어진 것을 있는 그대로 받아들이는 것이다. 수용 단계의 문제 제기 전략은 다음과 같이 구분할 수 있다.

가. 관찰과 추측 : 문제를 만드는 출발점으로 사용할 수 있는 상황은 구체적인 대상, 추상적인 것, 여러 가지 자료 등이 있다. 이 같은 상황에서 관찰과 추측을 통해 문제를 만들 수 있다.

나. 내적 탐구 또는 외적 탐구 : 관심있는 대상 그 자체의 성질에 주목하는 것이 내적탐구이다. 이등변 삼각형이라는 상황이 주어지면 대부분 보다 익숙한 다음과 같은 질문을 할 것이다. ‘밑각에 대해서 무엇이라고 말할 수 있는가?’, ‘외각은 무엇이라고 말 할 수 있는가?’ ‘이등변삼각형은 어떤 종류의 대칭을 가지는가?’ 이런 질문은 현상의 내적 작용에 초점을 두고 있는 것이다. 반면에 ‘합동인 두 개 또는 세 개의 이등변 삼각형으로 어떤 도형을 만들 수 있는가?’와 같은 질문은 이등변삼각형 전체를 다루면서 관심이 있는 대상과 다른 대상을 관련시킨 외적탐구에 속한다. 대부분 교육과정은 대상의 내적 견해에 초점

을 맞추고 있고, 대상 전체를 다루는 것은 상대적으로 적게 취급되고 있다.

다. 정밀한 탐구와 근사적 탐구 : 정확한 답을 구하는 것이 불필요하고 불가능하거나 또는 정확한 답만을 목표로 삼을 필요가 없을 때, 정확한 계산에 앞서 대략적인 답을 구해보는 것도 하나의 전략이다.

라. 역사적 탐구 : 교실수업에서 종종 동기유발을 위해 수학사적 일화자료를 활용하는 경우가 있다. 그러나 학습중인 내용에 대한 역사를 잘 모르고 있다고 하더라도 의미있는 질문을 제기할 수 있다. ‘사람들이 처음으로 삼각형의 세 각의 합을 구하려고 했을까?’와 같은 질문은 질문에 대한 답을 찾는데 있는 것이 아니라 학습 중인 내용의 중요성을 인식하는데 있다. 중요한 것은 학습하고 있는 내용이 왜 학습할 가치가있는 것인지를 이해하는 것이다. 이런 의미에서 역사는 학습 내용의 의미있는 탐구를 가능하게 하는 주요 도구라고 할 수 있다.

지금까지는 주어진 것을 당연한 것으로 여기고 수용하는 입장이었으나 때로는 주어진 것에 도전함으로써 새로운 질문을 만들 수 있다. 두 번째 단계인 도전 단계는 기본 문제를 그대로 수용하는데 그치지 않고 정의, 정리, 구체적인 대상 또는 다른 현상 등을 탐구하기 위해 기본 문제에서 주어진 조건이나 속성을 나열하고 그것을 여러 가지로 바꾸어 그 결과가 어떻게 변화는지를 알아보는 즉, 새로운 문제를 탐구해 보는 단계이다. 주어진 것에 도전함으로써 문제를 만드는 전략으로 ‘What If Not' 을 제시하고 있다.

처음에는 의미없이 보이는 관찰이나 질문이 What If Not 전략을 이용함으로써 많은 의미를 지닌 문제를 만들어 볼 수 있다. 예를 들어 피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ….이 있을 때 ‘만일 처음 두 수가 1이 아니라면 어떻게 될 것인가?’, ‘n항을 만드는 공식은 무엇인가?’, ‘변형된 수열의 성질과 원래 피보나치 수열의 성질은 어떻게 다른가?’ Brown & Walter(1990)는 What-If-Not 전략을 출발점 선택(수준 0), 속성나열(수준 1), What-If-Not(수준 2), 문제 설정(수준 3), 문제 해결 및 문제 분석(수준 4)의 5가지 수준으로 나누어 제시하였다.

한편, 김판수(2004)는 초등학교 영재 학생의 문제 만들기 사고 과정 <표 1>과 같이 제시하였다.

<표 1> 문제설정 단계와 하위요소

<table>
<tr><th>단계</th><th>정의</th><th colspan="2">하위요소</th><th>조작적 정의</th></tr>
<tr><td rowspan="2">탐색</td><td rowspan="2">특정한 방향을 정하지 않고 문제를 설정하기 위해 상황을 이해하고 관찰하는 단계</td><td colspan="2">문제상황 이해</td><td>문제 상황을 이해하고 분석하여 문제상황의 구조를 파악하거나 재구성하는 행위</td></tr>
<tr><td colspan="2">구상</td><td>문제상황을 이해하고 난 후 어떤 것과의 연관성을 찾으려는 시도</td></tr>
<tr><td rowspan="4">계획</td><td rowspan="4">어떤 실마리를 찾아 특정한 방향으로 문제를 설정하려는 시도</td><td colspan="2">계획의 구성</td><td>특정한 목적이나 방향으로 탐색하려는 활동</td></tr>
<tr><td colspan="2">계획의 전개</td><td>생각하고 있는 방향으로 계획을 시도하여 실행하는 과정</td></tr>
<tr><td rowspan="2">계획의 발전</td><td>계획의 수정</td><td>계획의 실현가능성을 의심해 보거나 수정, 변경하여 다시 계획을 세우는 과정</td></tr>
<tr><td>계획의 확장</td><td>문제의 구조나 성립조건을 따져보면서 이전의 계획을 발전적으로 확장하려는 시도</td></tr>
<tr><td>임시문제 설정</td><td colspan="4">문제를 설정하는 단계</td></tr>
<tr><td rowspan="2">검토</td><td rowspan="2">설정된 문제가 합당한지 실제로 풀어보고 확인하며 문제를 확장하거나 다듬는 단계</td><td colspan="2">문제해결</td><td>설정한 문제를 해결하거나 문제가 되는지 조건을 확인하는 과정</td></tr>
<tr><td colspan="2">문제의 재구성</td><td>문제를 바꾸거나 임시문제를 다음어 좀 나은 문제로 바꾸어 보는 시도</td></tr>
<tr><td colspan="5">최종문제 설정</td></tr>
</table>

Brown과 Walter의 What-If-Not을 사용한 수학적 문제 설정 전략과 김판수의 문제설정 사고 과정을 비교해보면 출발점 선택은 김판수의 문제설정 상황과 같고 속성의 나열과 What-If-Not은 김판수의 탐색단계와 계획단계에서 일어날 수 있는 전략으로 볼 수 있다. 또한 문제설정과 문제해결 및 문제분석은 김판수의 임시문제설정과 검토의 단계에 대응된다고 할 수 있다. 단 Brown과 Walter의 탐색과 계획은 이미 결정되어 있으며 또한 What-If- Not은 속성나열의 자연스러운 결과에 불과하여 어떤 새로운 것을 구상하고 계획하는 것과는 다르며 What-If-Not 자체가 하나의 문제 설정이 될 수 있다. 따라서 Brown과 Walter의 전략단계는 김판수의 문제설정단계와 과정에서 나타날 수 있는 하나의 전략으로 볼 수 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 2009년 1월 J대학교과학영재교육원 초등수학반 18명을 대상으로 예비연구를 실시하였다. 예비연구를 통해 학생들에게 주어지는 종이접기 그림이나 방법설명이 학생들이 이해 할 수 있도록 적절히 그려지고 진술되었는지를 알아보고 수정하였다. 또한 예비연구를 통해 얻은 학생들이 만든 문제를 분석하여 수업자(연구자)가 본 연구에서 학생들이 수학적으로 의미있는 문제 만드는데 어려움을 느낄 때 적절히 활용할 수 있도록 하였다.

예비연구를 통해 얻은 정보를 바탕으로 2010년 1월 J대학교과학영재교육원 초등수학반 17명을 대상으로 본 연구를 실시하였다. 예비연구 대상 18명과 본 연구대상 17명은 초등학교 5, 6학년 학생들로 학교정규수업에서 가끔 문제의 조건을 변형하여 문제를 만드는 활동을 해 보았을 뿐, 주어진 상황(그림)에 맞는 문제 만들기 경험이 전혀 없는 학생들이었다.

2. 종이접기 영재프로그램

가. 종이접기 영재프로그램의 적용 방향

첫째, 초등학교 정규 교육과정과 학습자의 지적 능력을 고려하여 속진의 내용을 부분적으로 허용하지만 심화학습을 기본으로 한다. 수학영재학생들에게는 속진과 심화 두 종류의 프로그램이 적절한 조화를 이루도록 하되 속진 프로그램보다는 심화프로그램에 좀 더 비중을 두어야 한다(남승인, 1998; 송상헌 1998). 초등학교 정규 교육과정에서 다루는 도형영역은 평면도형과 입체도형으로 나눌 수 있는데 평면도형 중에서 여러 가지 각 접기와 입체 단위 모양 접기, 삼각육면체, 충돌하는 정육면체 접기 등 교육과정을 심화할 수 있는 내용을 선정한다.

둘째, 조작적 활동과 함께 논증과정을 포함한다. 기하수업에서 직관력의 이해를 돕기 위해 조작활동이 중요하지만 논증과정 또한 중요하다. 따라서 도형을 접은 후 도형의 성질을 확인하는데 그치지 않고 논증과정을 포함하여 논리적 추리력을 향상하는데 중점을 두고 개발한다.

셋째, 다양한 사고활동과 자기 주도적 학습이 되도록 구성한다. 수학영재학생들은 수학에 대한 강환 호기심과 흥미를 느끼며 끈기있게 과제를 수행하면

서 자신의 사과과정보다 정교화하고 새로운 것을 만들어내려는 수학적 성향을 가지고 있다. 따라서 다양한 종이접기 방법을 찾아내게 하고 학생 스스로 생각하여 질문을 만들고 활동을 통해 해결하는 과정에 중점을 두고 개발한다.

나. 종이접기 영재프로그램의 내용 구성

종이접기 영재프로그램의 내용은 John Bergez(1999)와 임근광, 김진홍, 임동연, 장현주(2007)이 제시한 종이접기 관련 그림을 재구성하였다. 학생들에게 제시하는 종이접기 그림에 대한 내용 구성과 활동 시간은 다음과 같다.

<표 2> 영재프로그램 내용 구성

차시	종이접기 상황	교사가 제시한 접이접기 그림
1~2	60°, 30°접기	[그림 2] 참조
3	다면체 단위 모양 접기	[그림 6] 참조
4	삼각육면체 접기	[그림 7] 참조
5~6	충돌하는 정육면체 접기	[그림 8] 참조

3. 수업전략

학습의 형태는 개별학습→전체 토론학습의 형태로 전개하였으며 학생들이 필요를 느낄 때 소집단 토론학습을 병행하도록 하였다. 먼저 개별학습 구조를 통해 자신에게 적절한 도전적인 수학 과제 또는 수학적 문제상황을 접하게 되므로 수학에 대한 자신감과 호기심을 갖게 하여 각자의 능력에 맞게 주어진 조건 하에서 스스로 문제를 만들고 해결방안을 모색해 보게 하였다. 개인, 소집단 활동을 통해 만든 문제를 전체 학생들과 공유하면서 더 발전적인 문제를 찾고 새로운 해결방안을 찾아 각자가 만든 문제를 전체 학생들이 해결해 보게 하였다.

학생들이 과제 수행을 하는 동안 학생 중심의 토의를 진행하면서 때때로 교사가 간섭하여 조언하였다. 토의를 진행하는 동안 새롭게 만들 수 있는 문제나 만든 문제에 대한 해결방법에 대하여 논쟁하고 정당화하게 할 뿐만 아니라 학생들의 실수까지도 허용하는 분위기 조성하였다. 이를 통해 학생들의 상호간에 활동적으로 아이디어를 교환하며 다른 친구들이 만든 문제와 문제해결의 적정성을 토론하도록 하였다.

학생활동에 대한 평가는 동료평가를 주로 하였다. 수학영재학생들의 학습활동에 대한 평가는 학생의 수행과정을 되돌아보며 수행 결과를 개선하고 다음 학습을 위한 준비하는데 보다 직접적으로 관여할 수 있어야 한다(임근광, 강순자, 2008). 따라서 본 활동의 평가는 동료학생이 토론하는 과정과 학생이 개발한 문제 등에 대해 적극성 및 창의적 문제 등에 대해서 동료평가를 실시하였다.

4. 자료의 수집 및 분석

본 연구의 자료는 종이접기 활동지에 나타난 학생들이 만든 문제와 영재학생들과 수업이 이루어 질 때 녹음한 녹음 자료, 그리고 학생들이 산출물 등이다. 학생들이 종이접기를 하면서 개인학습을 통해 만든 문제와 모둠 토의를 통해 수정한 문제, 그리고 수업 전 과정을 녹음한 녹음 자료를 통해 학생들이 문제를 설정하는 전략을 분석하였다.

학생들의 문제 설정 전략 분석은 Brown & Walter(1990)이 제시한 전략, 즉 수용(관찰과 추측, 내적 탐고 또는 외적탐구, 정밀한 탐구와 근사적 탐구, 역사적 탐구)과 도전(What if not) 전략에 중점을 두고 분석하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

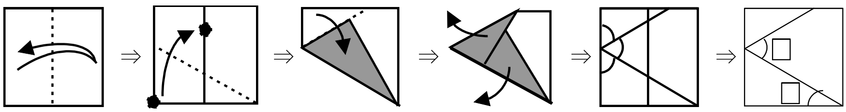
학생들의 종이접기 활동은 60°, 30°접기, 다면체 유니트 접기(입체도형을 접기 위해 필요한 색종이 한 장으로 접은 유니트), 삼각육면체 접기, 충돌하는 정육면체 접기 4개의 활동이다. 교사는 학생들이 접을 수 있는 그림([그림 2], [그림 6], [그림 7], [그림 8])만 제시하고 학생들이 접는 과정 또는 접은 후 문제 만들기를 하였다.

1. 60°, 30°접기에서 문제 만들기

각도기 없이 각을 잴 수 있다는 것은 학생들에게 흥미있는 소재이며 각에 대한 양감은 물론 공간감각을 기를 수 있다. 색종이로 60°, 30°접기 활동은 각의 이등분, 삼등분, 삼각형의 내각의 합 등을 이용하여 다양한 문제를 만들 수 있으며 더 나아가 학생들이 알고 있는 평면도형의 성질을 이용하여 다양한 평면도형을 접을 수 있을 것이다. 그리고 왜 그런 각이 되는지? 왜 정삼각형인지

등에 대한 논리적으로 설명할 수 있는 기회를 제공할 것이다.

T, 다음 그림과 같이 색종이를 접은 후 각도기를 사용하지 않고 □안의 각을 구하고 그 이유를 발표해 볼까요?



[그림 2] 60°, 30°접기

S, (그림처럼 접은 후) 60°와 30°도입니다. 그 이유는 한 점에서 3개의 각이 똑같이 3등분 되었어요. 일직선은 180°도인데 한 직선이 똑같이 3개로 나누어졌으니까 한 각은 60°이고 삼각형의 세 각의 합이 180°라는 것을 이용하여 다른 각을 구하면 30°도가 됩니다.

S, 삼각형의 세 각의 합을 구할 때 각 꼭짓점에 있는 각을 찢어서 붙이면 일직선이 되잖아요. 그래서 똑같이 나누어졌으니까 60°입니다.

T, 접는 과정을 유심히 잘 관찰했구나. 30°와 60°를 접을 수 있다면 또 어떤 각을 접을 수 있는지 문제를 만들어 볼까?

S, 15°도 접을 수 있고, 75°도 접을 수 있어요.(내적 탐구)

S, 맞다. 30°을 이등분하면 15°가 되고, 90°에서 15°를 빼면 75°가 되니까.

S, 그럼 15°의 배수가 되는 각은 다 접을 수 있어요.(내적 탐구)

S, 색종이를 접은 선을 따라 생긴 모든 각을 구하는 것도 가능할 것 같아요(외적 탐구)

학생들은 설명없이 그림을 보고 종이접기를 하는데 어려움이 있었다. 종이접기에서 흔히 사용되는 점과 점이 만나게 접기, 접었다 펼치기 등에 대한 방법을 모르고 있었고 물론 엄밀하게 접지 않아 접는 과정에서 수학적으로 탐구하는데 특히 어려움이 있었다. 단서가 되는 각을 찾기 위해서 접은 종이접기를 다시 펼쳐보고 다시 접어보는 활동을 반복했으며(관찰과 추측) 개인 사고로 단서를 찾기 어려운 학생은 자연스럽게 옆 친구와 단서를 찾기 위한 토의를 할 수 있도록 허용하였다. 충분한 시간이 흐른 후 단서가 되는 60°각을 찾은 후 학생들이 보인 반응은 폭발적이었다. 15°의 배수가 되는 각을 접을 수 있고, 삼각형이 세 각의 합은 180°임을 이용하여 접은 선을 따라 생기는 모든 각을 구했으며 학생들이 사용하는 삼각자를 접어 각을 측정(외적 탐구)하는 학생도 있었다. 이 활동은 종이접기를 도입하는 활동으로 학생들이 만든 문제의 전략은 관찰과 추측

및 내적 탐구 전략을 주로 사용하였으며 이후 점차 발전되는 양상을 보였다.

T, 참 좋은 질문을 만들었구나. 또 어떤 질문을 만들 수 있을까?

S, 60°를 접었다면 정삼각형도 접을 수 있을 것 같은데요. 그런데 구체적인 방법은 잘 생각나지 않아요.(외적 탐구/근사적 탐구)

S, 아! 이렇게 하면 되지 않을까?

T, 그래? 한 번 접어보고 왜 정삼각형인지 설명해 볼까?

S, 위에서 60°를 접은 것처럼 직각인 한 꼭짓점 A에서 A′로 그리고 다른 꼭짓점 B에서 B′로 접으면 직각인 부분은 60°와 30°로 나누어지게 됩니다. 그럼 두 개의 60°를 가진 삼각형이 만들어져요. 삼각형의 세 각의 합은 180°이니까 나머지 한 각은 당연히 60°가 되어서 큰 삼각형은 정삼각형이 됩니다[그림 3].

S, 안쪽에 있는 작은 삼각형도 정삼각형이야. 왜냐하면 동위각으로 같거든

T, 좀 더 설명이 필요하겠다. 좀 더 자세히 설명해 줄 수 있을까?

S, 가장 위의 각은 처음 큰 정삼각형의 각과 같고 가운데 접은 선과 색종이 가로가 평행하니까 평행선과 한 직선이 만나서 이루는 각에서 배웠던 것처럼 나머지 두 각은 밑각과 같은 위치에 있는 각이니까 같아요. 이런 걸 동위각이라고 한다고 배웠어요.(정밀한 탐구)

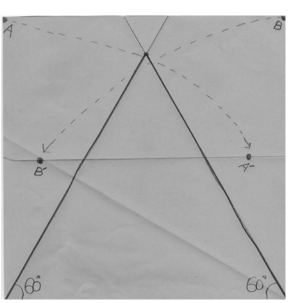
T, 여러 종류의 정삼각형을 접을 수 있겠구나. 그럼 색종이 한 장을 이용하여 접을 수 있는 정삼각형 중 여러분이 접은 정삼각형이 가장 크다고 할 수 있을까?

S, 이보다 더 큰 정삼각형을 접을 수 있을까요? 가장 큰 정삼각형일 것 같은데…….

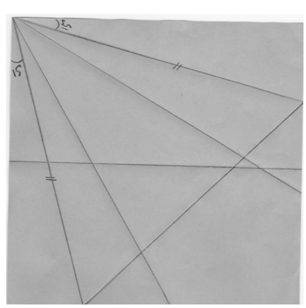
T, 색종이 한 장에 가장 큰 정삼각형을 작도한다고 생각해 보자. 여러분들이 접은 삼각형보다 더 큰 삼각형을 작도할 수 있을 것 같은데…….

S, 작도하는 것은 가능한데 접는 것은 힘들지 않을까요? (학생들 모두 공감하는 분위기)

T, 선생님 생각에는 더 큰 정삼각형을 접는 것이 가능할 것 같아. 이 시간 이후에 더 생각해 보면 좋겠다.



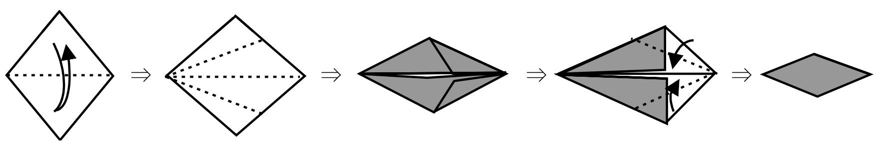
[그림 3] 학생들이 접은 정삼각형



[그림 4] 학생들이 접은 가장 큰 정삼각형

학생들이 만든 질문은 이등변삼각형 접기, 정사각형 접기, 직사각형 접기, 평행사변형 접기, 마름모 접기(외적 탐구) 등 다양하였으나 이 도형들은 도형의 성질만 알면 특별한 수학적사고 없이 접을 수 있는 도형들이다. 정삼각형 접기는 더 많은 시간과 생각, 설명이 요구되는 질문으로 색종이에 접는 과정을 그려 설명하도록 요구하였다. 왜 정삼각형이 되는지에 대해서 자신이 알고 있는 수학적 사실을 기반으로 학생들의 설명은 논리적이었으며 자신이 만든 문제에 대한 해결방법을 고안해 내는 문제발견의 희열을 느끼는 것으로 관찰되었다. 학생들의 설명에서 수학적 의사소통의 능력수준을 알 수 있었고 '점 A에서 점 A′로 접고…….', '두 평행선과 한 직선이 만나서 이루는 각' 등과 같은 설명에서 다른 학생들도 의사소통의 방법을 배울 수 있는 계기가 되었다. 가장 큰 정삼각형을 만드는 문제는 학생들이 만들지 않은 문제로 학생들 사고를 자극하기 위해 교사가 제시하였다. 물론 해결방법도 찾지 못하였다. 교사가 해결방법을 설명해주기보다는 생각의 여지를 남기기 위해 추후에 더 생각해 보도록 하였다. 다음 날 학생이 찾은 가장 큰 정삼각형은 [그림 4]와 같다.

S, 선생님! 저는 우연히 다음과 같이 접었는데 이 도형이 평행사변형인지 마름모인지 모르겠어요.(외적 탐구/근사적 탐구)



[그림 5] 학생이 접은 마름모

T, 모두 00가 접은 도형을 접어봅시다. 평행사변형인지 마름모인지 확인할 있는 방법은 뭘까? 모둠별로 확인할 수 있는 방법을 찾아봅시다.
(모둠토의 내용)

S, 정삼각형은 접는 과정에서 정삼각형이 되는 이유를 알 수 있지만 이와 같이 접으면 접는 과정에서 어떤 도형인지 알기 어려울 것 같아.

S, 네 변의 길이가 같다는 것은 알 수 없지만 각은 알 수 있지 않을까? 접은 도형을 펼쳐보면 한 각이 45°이고 마주보는 각도 45°, 사각형의 네 각의 합은 360°이니까 360−(45+45)=270(°), 모르는 두 각은 접는 과정이 똑같아서 합동이야. 그니까 270°의 절반인 135°야

S, 그럼 평행사변형이라는 것은 알 수 있겠다.

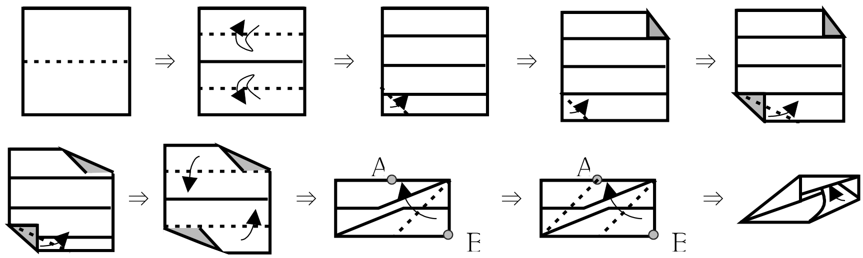
T, 마름모인지를 확인하려면 어떤 방법이 있을까?
S, 좀 전에 합동을 이용했잖아. 합동을 이용할 수는 없을까?
S, 너희들이 접은 것과 내가 접은 것은 모두 합동이야. 겹쳐보면 완전히 겹쳐지거든. 그럼 한 변을 기준으로 해서 다른 변의 길이가 같은지 모두 맞대어 보면 변의 길이가 모두 같은지 확인할 수 있을 것 같다.
S, 아! 네 변의 길이가 같은 마름모이다.
T, 여러분들이 접은 마름모에서도 문제를 만들 수 있을 것 같은데…….
S, 접은 모양을 폈을 때 접은 선을 따라 생긴 각을 모두 구할 수 있어요(내적 탐구).
S, 그건 쉬운 문제입니다. 각 접기에서 했던 활동과 거의 비슷합니다.
S, 우리가 접은 마름모의 넓이를 구할 수 있을까요? 물론 자를 사용하지 않구요.(근사적 탐구)
T, 좋은 문제인 것 같네요. 그럼 마름모의 넓이를 구해 볼까요?

학생들은 마름모의 넓이를 구하기 위해 접은 도형을 펼쳐서 넓이를 구하기 위한 조건에 대해 개인적으로 사고하고 모둠별로 토의해 보았지만 학생들이 알고 있는 수학적 배경지식으로 해결하기 힘든 문제로 보고 미해결문제로 놓아두었다. 어떤 학생이 추후에 GSP를 이용하여 접은 과정을 탐구해 보고 마름모의 넓이는 정사각형의 넓이의 0.41배라는 것을 밝혔지만 그 이유는 설명하지 못했다.

60°, 30°접기에서 학생들의 문제설정 전략은 주로 관찰 및 추측→내적 탐구→외적 탐구→근사적 탐구→정밀한 탐구의 흐름으로 사용하였으며 학생들이 설정한 문제는 깊은 사고 없이도 문제해결이 가능한 문제들이었다.

2. 다면체 유니트 모양 접기

학생들과 수학적으로 탐구할 수 있는 입체 도형을 접기 위해 유니트로 쓰일 수 있는 똑같은 모양의 접는 활동이다. 입체도형을 접어 탐구하기 위해서는 학생들이 유니트가 처음 색종이의 각과 변에 비례해서 어떻게 되는지를 알고 있어야 한다. 따라서 단위 모양을 그림을 보고 접게 한 후 단위 모양을 접는 과정에서 만들 수 있는 문제를 만들어 보게 하였다.



[그림 6] 유니트 접기

T, 단위 모양을 접는 과정에서 또는 접은 후에 만들 수 있는 문제를 생각해 발표해 볼까?
S, 물론 펼쳤을 때 생긴 모든 각도 구할 수 있어요.(내적 탐구)
S, 펼쳤을 때 합동인 도형은 모두 몇 쌍인가?(내적 탐구)
S, 단위 모양의 한 변의 길이는 색종이 한 변의 길이의 몇 배인가?(내적 탐구)
S, 펼친 도형은 선대칭 도형인가 점대칭 도형인가도 알아볼 수 있고 대칭축이나 대칭점을 찾아볼 수도 있을 것 같아요.(내적 탐구)
S, 닮음인 도형을 찾아서 닮음비를 구해볼 수도 있을 것 같습니다.(내적 탐구)
T, 친구들이 만든 문제를 각자 해결해 보세요.
S, 선생님 제가 만든 단위 모양과 00가 만든 단위 모양이 합동이 아니에요. 똑같이 포개어지는데 제가 만든 모양을 뒤집어야 포개어지거든요? 왜 그럴까요?(내적 탐구)
T, 00가 좋은 질문을 했네요. 모두 함께 생각해 볼까? 왜 똑같은 과정으로 접었는데 뒤집어야 똑같이 포개어질까?
S, 나도 00와 같은 모양인데……. 이상하다.
S, 펼친 모양을 보니까 접을 때 어떤 사람은 아래의 왼쪽부터 접고 다른 사람은 아래의 오른쪽부터 접어서 그런 것 같아요. 그니까 거울을 비쳤을 때와 같은 모양이 나와서 뒤집어야 겹쳐지는 것 같아요.

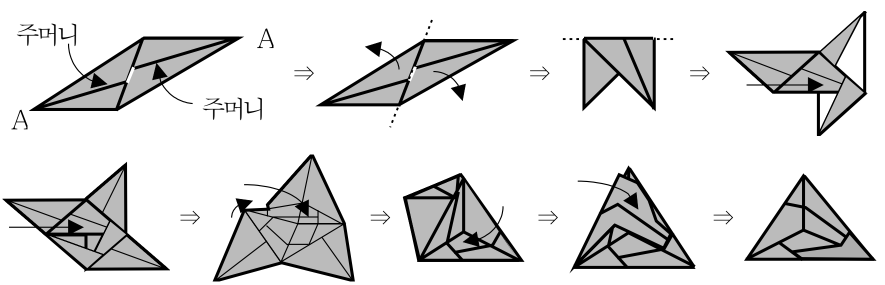
이처럼 학생들이 만든 문제는 다양했다. 교사의 유도 발문을 통해 문제를 만들기도 하지만 접는 과정과 문제를 해결하는 중에 문제를 만들어 내기도 하였다. 이 때 학생의 궁금증을 교사가 설명으로 해결해 주기보다는 전체 토론을 통해 동료친구들이 해결하게 하는 것은 학생들의 수학적 지식을 나누어 갖을 수 있는 계기가 되었으며 학생들이 더 새로운 문제를 만드는 자극제가 되었다.

입체 유니트 접기에서 학생들의 문제설정 전략은 거의 모두 내적 탐구의 전략을 사용하였다. 이것은 높은 수준의 수학적 지식이나 사고가 요구되는 활동

이 아닌 입체도형을 접기 위한 준비활동이었으므로 특별히 계획하고 검토해야 하는 상황이 없었기 때문으로 판단된다.

3. 삼각육면체 접기

유니트 3개를 이용하여 삼각육면체를 접는 활동이다. 학생들이 입체의 모양을 보고 모양에 알맞은 이름을 붙일 수 있도록 '삼각육면체'라는 용어는 사용하지 않았다. 평면도형을 접을 때보다는 공간감각이 더 요구되는 활동으로 그림을 보고 입체를 접는 데는 어려움이 많았으나 충분한 시간을 주고 자기 스스로 접어 보도록 접는 과정에서 교사는 도움을 주지 않았다.



[그림 7] 삼각육면체 접기

학생들이 접은 입체도형의 이름을 지어주라고 했을 때 '쌍사면체, 쌍피라미드, 쌍삼각뿔' 등 학생들이 붙인 이름은 다양했다. 학생들이 부여한 이름들은 입체도형의 전체적인 모양이나 입체를 이루는 구성요소에 따른 것이었으며 모두 공감이 가는 이름들이었다. 학생들이 붙인 이름과 유사하게 두 개의 사면체의 밑면을 서로 붙여 연결한 모양처럼 보이므로 삼각육면체 또는 이중사면체(double tetrahedron) 또는 삼각 이중피라미드(triangular bipyramid)라고 한다고 설명하고 문제 만들기를 하였다.

자신이 접은 삼각육면체를 사면에서 관찰한 후 삼각육면체의 구성요소들의 수를 세어보고, 유니트 모양을 펼쳐 모서리가 어디에 해당하는지를 파악하였다(관찰 및 추측). 학생들은 자신이 생각한 문제(근사적 탐구)가 해결되는지를 생각한 후 다음과 같이 자신이 낸 문제를 발표하였다.

T, 삼각육면체를 보고 문제를 만들어 봅시다.

S, 삼각육면체도 v−e+f=2 성립될까?에 대한 문제를 낼 수 있어요.(내적 탐구)

S, 삼각육면체는 6개의 똑같은 삼각형으로 되어 있는데 그 삼각형의 각을 알아보는 것도 좋을 것 같아요.(내적 탐구)

S, 각면의 무게중심을 이으면 어떤 입체도형이 될까?와 같은 문제도 해결가능해요.(내적탐구)

S, 색종이 한 변의 길이가 10cm이고, 45-90-45인 직각삼각형이 6개이고 밑변과 높이는 색종이 한 변의 1/4이므로 삼각육면체의 겉넓이를 구할 수 있어요.(내적 탐구)

S, 그럼 부피도 구할 수 있을까? 사면체 2개로 되어 있으니까 부피를 구할 수도 있을 것 같아요.(내적 탐구/근사적 탐구)

S, 겉넓이는 00가 말한 것처럼 구할 수 있을 것 같은데 부피는 사면체의 밑면의 모서리의 길이를 알아야 하는데 자 없이 가능할까? 그리고 높이는 측정하기 곤란한데…….

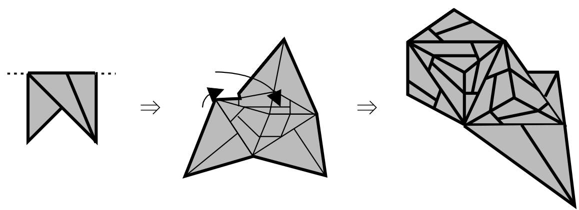
학생들은 자신 또는 동료들이 만든 문제를 해결하였다. 그러나 부피를 구하는 문제는 한 모서리의 길이와 높이를 구하는데 더 많은 수학적 지식이 요구되어 구하는 학생이 없었고 미해결문제로 남겨 두었다. 충분한 시간을 주었는데도 학생들은 더 발전적인 문제를 만들지 못하였다. 이후 단위모양 6개로 정육면체를 접는 활동을 진행하였다. 학생들은 어렵지 않게 정육면체를 접을 수 있었으나 삼각육면체에서 만든 문제보다 더 발전적인 문제는 만들지 못했다. 이것은 정육면체는 흔히 일상생활에서 접하는 입체도형이고 자신이 경험했던 정육면체 관련 문제들을 변형하지 못하고 그와 비슷하게 문제를 만들려고 했기 때문인 것으로 추측된다.

삼각육면체 접기에서 문제설정의 전략은 관찰 및 추측에 충분한 시간이 요구되었고 내적 탐구를 이용한 문제가 대부분이었다. 이는 아직까지 보지 못했던 삼각육면체를 외적으로 탐구하는데 어려움이 느낀 것으로 판단되며 외적 탐구와 What if not 전략을 사용하여 다양한 문제를 만들 수 있도록 유도하기 위해서 학생들에게 더 많은 삼각육면체를 접게 할 필요가 있으며 부피가 4배인 삼각육면체를 접기 위해서는 어떻게 하면 되는지와 같은 교사의 발문이 더 요구된다고 판단된다.

4. 충돌하는 정육면체 만들기

단위모양 9개를 이용하여 두 개의 정육면체가 충돌하는 입체도형을 그림만 보고 접게 하였다. 학생들은 접는 과정에서 단위 모양 몇 개를 이용하여 접어

야 하는지에 대한 힌트를 요구하였으며 충돌하는 정육면체의 그림이 아닌 실제 입체 모양을 보여주기를 요구하기도 하였다(관찰 및 추측). 17명의 학생 중 12명의 학생이 20분 만에 접을 수 있었고 다른 학생들은 시간이 더 요구되었으며 5명의 학생은 교사나 동료 학생의 도움을 받고서야 접을 수 있었다. 이것은 단위 모양 9개를 접는데 시간이 필요하기도 하였지만 충돌하는 부분을 접는데 많은 공간감각이 요구되었기 때문으로 판단된다.



[그림 8] 충돌하는 정육면체

T, 여러분들이 접은 입체 도형에서 어떤 문제를 만들 수 있을까?

S, 모서리의 개수나 꼭짓점의 개수를 구해보면 어떨까요?(내적 탐구)

S, 그것 너무 쉬운 문제야. 그냥 세면 되잖아. 삼각육면체에서 처럼 겉넓이를 구할 수 있을 것 같아요. 예를 들어 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하면 충돌하는 정육면체의 겉넓이는 얼마일까?와 같은 문제요.(내적 탐구)

S, 반대로 문제를 만들 수도 있을 것 같아요. 예를 들어 우리가 접은 입체도형의 겉넓이가 100이라면 색종이 한 변의 길이는 몇 입니까?와 같은 문제로도 변형할 수 있어요.(내적 탐구)

S, 정육면체를 접고 부피를 구했었는데 이 입체 도형의 부피도 구할 수 있지 않을까?(내적 탐구)

S, 맞아! 삼각육면체는 못 구했는데 이 입체는 정육면체 2개가 포개어져 있으니까 2개의 정육면체의 부피에 포개어진 부분을 빼면 될 것 같아.

S, 정육면체 2개가 충돌하는 입체도형인데 한쪽에 더 충돌하는 모양의 정육면체를 붙이면 3개의 정육면체가 충돌하는 모양을 만들 수도 있을 것 같아요(외적 탐구/ 근사적 탐구).

학생들은 다른 학생들이 만든 문제에 대한 평가와 함께 더 좋은 문제를 만들기 위해 점차 문자를 사용하여 일반화를 할 수 있는 문제를 만들었다. 또한 다른 친구가 만든 문제의 조건을 바꾸어 더 새로운 문제를 만들기 시작하였으며

특히 3개의 정육면체가 충돌하는 입체를 만들 수 있다는 동료 학생의 의견에 전적으로 동감하면서 3개의 정육면체가 충돌하는 입체를 만들었고 그 후 학생들이 만든 문제는 보다 수학적으로 의미있는 문제들이었다.

S, 선생님 3개가 충돌하는 정육면체를 만든다면 4개, 5개의 정육면체가 충돌하는 입체를 접을 수 있어요.(What if not)

S, 2개가 충돌하는 입체에서 모서리 수, 꼭짓점의 수는 그냥 세어서 알 수 있었는데 4, 5개의 충돌하는 정육면체에서는 규칙을 찾아서 구할 수도 있어요. 그러니까 5개의 충돌하는 정육면체의 모서리의 수와 꼭짓점의 수는 몇 개인가?와 같은 문제를 만들 수 있어요.(What if not)

S, 부피와 넓이도 이와 같은 규칙을 이용하여 구할 수 있을 것 같아요. 예를 들어 정육면체의 한 면의 넓이가 100㎠일 때 5개의 충돌하는 정육면체의 겉넓이는 얼마인가? 그리고 부피는 얼마인가?와 같은 문제도 만들 수 있어요.(What if not)

S, 수학과 관계가 있을지 모르지만 저는 두 개의 정육면체가 충돌하는 모양의 건물을 만들면 아름답겠다는 생각했는데 3개의 정육면체가 충돌하는 입체를 접으니 빤듯하게 서 있지 않아서 건물로 만들기는 힘들 것 같다는 생각이 들었는데 가능할까요?(외적 탐구/근사적 탐구)

학생들은 문제를 만드는데도 적극적이었지만 동료친구들이 만든 문제를 해결하는데도 매우 흥미있어 하고 적극적이었다. 충돌하는 모양이 1개, 2개 증가할 때마다 모서리의 수와 꼭짓점의 수가 몇 개씩 증가하는가? 정사각형 한 면의 넓이와 동일한 면이 몇 개 증가하는가?를 통해 넓이를 구했으며 부피 또한 1/4씩 줄어든다는 것을 이용하여 문제를 해결하였다(정밀한 탐구). 특히 자신이 접은 도형을 조형물로 설계할 때 무게중심 때문에 전체적인 모양을 건물로 설계가능하나 실제 건물 모양을 갖추기는 어렵다는 것을 발견, 대안으로 2개의 충돌하는 정육면체 조형물을 대칭이 되게 2개 짓는 것이 더 좋을 것이다라고 하며 실생활에 적용해 보려고까지 하였다(외적 탐구).

충돌하는 정육면체 접기에서 문제설정의 전략은 충분한 관찰과 추측이 요구되었으며 내적 탐구, 외적 탐구, 근사적 탐구, 정밀한 탐구, What if not 전략을 다양하게 사용하였다. 특히 문제를 바꾸거나 임시문제를 다듬어 좀 더 나은 문제로 바꾸려는 문제의 재구성이 활발히 이루어졌다. 다른 활동에 다양한 전략을 사용하여 문제를 제기할 수 있었던 것은 학생들이 많이 다루었던 정육면

체를 변형한 모양이 제시되어 더 많은 수학적 지식이 요구되는 문제를 제기할 수 있었던 것으로 판단된다.

V. 요약 및 결론

본 연구는 종이를 접기 과정에서 영재학생들이 문제를 만들 때 사용하는 전략은 무엇이고 문제 만들기 활동에서 영재학생들의 사고를 촉진하는 방안은 무엇인지를 밝혀 그 시사점을 얻고자 하였다. 이를 위해 J대학과학영재교육원 초등수학반 17명을 대상으로 그림으로 종이접기 상황만 제시하고 학생들이 종이접기 하면서 문제를 만들고, 동료학생들이 만든 문제를 토론을 통해 정교화한 후 모든 학생들이 그 문제를 해결해보는 활동을 하도록 하였다.

Brown & Walter(1990)는 문제설정 전략을 수용과 도전으로 나누어 제시하였다. 수용 단계의 문제설정 전략은 관찰과 추측, 내적 탐구 또는 외적탐구, 정밀한 탐구와 근사적 탐구, 역사적 탐구이며 도전단계의 문제설정 전략은 What if not 전략이 핵심을 이루고 있다. 종이접기 활동을 하면서 학생들이 문제설정에 사용한 전략은 Brown과 Walter가 제시한 전략 중 '역사적 탐구'전략을 제외한 다른 전략들은 모두 사용하였다. 특히 공간감각 능력을 기반으로 그림만 보고 접어야 하는 상황을 제시했기 때문에 수용 단계의 관찰과 추측이 충분이 이루어 져야 문제를 설정할 수 있었으며 높은 수준의 사고가 요구되지 않은 활동일수록 내적 탐구 전략을 많이 사용하여 문제를 설정하였고, 높은 수준의 사고가 요구되는 활동일수록 외적 탐구 및 What if not 전략을 사용한 것으로 나타났다.

따라서 영재학생들이 문제설정시 고차원적이고 다양한 전략을 사용할 수 있도록 하기 위해서는 수학적 지식이 다소 요구되는 과제를 제시할 필요가 있으며 활동 전에 다양한 전략을 미리 인지하고 그것을 활용하여 문제를 설정하도록 하는 것도 필요할 것으로 판단된다.

그리고 본 연구결과 학생들이 수학적으로 의미 있는 문제를 만들고 이들의 사고를 촉진시키는 방법을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 수학적으로 의미 있는 문제를 만들도록 장려하기 위해서 교사는 미리 학생의 입장에서 문제를 만들어 보아야 한다. 학생들이 만든 모든 문제는 학생들이 많은 사고를 통해 해결해야 하는 문제는 아니었으며 피상적

인 문제 외에 더 이상 문제를 만들지 못하는 경우도 있다. 이 때 교사가 특별한 대안이나 아이디어가 없으면 그 문제 만들기 활동은 의미 없이 끝나게 된다. 색종이로 각을 탐구하면서 정삼각형을 접는 데 그치지 않고 ‘가장 큰 정삼각형이라고 할 수 있는가?’와 같은 교사의 질문이나 삼각육면체를 접은 후 문제 만들기를 할 때 ‘단면에 대한 문제도 만들 수 있지 않을까?’와 같은 질문을 통해 학생들은 더 의미 있는 문제를 만들고 해결하려는 반응을 보였다. 따라서 교사가 이와 같은 질문을 하기 위해서는 교사가 활동 전에 미리 문제를 만들어 놓아야 학생들이 더 의미있는 문제를 만들도록 유도할 수 있을 것이다.

둘째, 학생 토론은 문제 만들기 활동을 촉진하며 정교한 문제를 만들기 위해 토론 과정에서 동료학생이 만든 문제에 대한 평가도 병행해야 한다. 먼저 개인 사고를 통해 문제를 만들었다면 만든 문제를 발표하고 친구가 만든 문제에 대해 토론하는 과정에서 문제를 더 정교화 할 수 있었다. 토론을 통해 입체도형의 겉넓이를 구하는 문제를 색종이의 한 변의 길이를 1이라고 했을 때 겉넓이를 구하는 문제로 일반화할 수 있었으며, 주어진 입체도형을 접는데 몇 장의 색종이가 필요한가?라는 문제를 5개의 충돌하는 모양이 있을 때 몇 장의 색종이가 필요한가?와 같은 발전적인 문제로 정교화할 수 있었다. 특히 학생이 만든 문제가 피상적이고 간단한 사고로 해결하는 문제를 만든 경우, 동료학생의 평가는 더 좋은 문제를 만들려고 하는 동기를 주었다. ‘너무 쉬운 문제다’, ‘좀 전에 만든 문제와 비슷하다’와 같은 동료 학생의 반응은 더 좋은 문제를 만들도록 하는 자극제가 되었다.

셋째, 학생들이 문제는 만들었으나 그 문제를 해결하는 방법을 찾지 못할 때 교사는 해결방법을 제시하기 보다는 추후 학생들이 더 사고할 수 있도록 미해결문제로 남겨두는 것이 학생들의 사고를 더 촉진하는 것으로 나타났다. 활동 중 학생들이 문제를 만들었으나 해결방법을 찾지 못한 문제는 ‘색종이 한 장으로 가장 큰 정삼각형 접기’와 ‘마름모의 넓이’, ‘삼각육면체의 부피 구하기’문제였다. 모두 교사가 해결방법을 제시하지 않고 추후에 더 생각해 볼 문제로 남겨 두었으나 과제집착력이 있는 몇 몇의 학생은 미해결문제로 남겨놓은 문제에 대한 해결책을 탐구하려고 하였으며 그 중 색종이 한 장으로 가장 큰 정삼각형 접기 문제는 해결하였으며, 마름모의 넓이는 색종이 넓이의 0.41배라는 것만 GSP를 통해 밝힌 학생도 있었다. 교사가 해결방법을 안내하거나 설명했다면 미해결문제에 대한 학생들이 과제집착모습은 볼 수 없었을

것이며 아직 해결하지 못한 마름모의 넓이나 삼각육면체에 대한 부피를 구하는 방법만 일회적으로 알고 끝났을 것이다. 따라서 해결방법이 다른 활동으로 전이되는 내용이 아니라면 미해결문제로 남겨 두는 것이 학생들의 사고를 촉진하게 하는 것으로 판단된다.

앞으로 학생들이 종이접기를 하면서 문제를 설정하는 사고과정을 분석하는 연구가 요구되며 학생들이 만든 문제와 교사가 미리 준비한 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 보이는 반응이나 태도, 수학적 능력에 차이가 있는지에 대한 실험연구가 요구되고 종이접기활동 이외의 학생들이 만드는 수학영재프로그램에 대한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

강완 (1994). 수학적 능력의 구조에 따른 수학 영재아의 지도 방안. **수학교육학 연구,** 4(2), 139-147.

교육인적자원부 (1999). **제7차 수학과 교육과정 초등학교 교육과정 해설.** 대한교과서주식회사.

김지원 (2002). **창의성 신장을 위한 초등학교 수학 영재학급용 프로그램 개발에 관한 연구.** 석사학위논문. 인천교육대학교.

김판수 (2004). **초등 수학영재의 문제설정 과정 분석.** 석사학위논문. 부산대학교.

나귀수 (1998). 수학 영재교육 프로그램 개발을 위한 연구. **학교수학,** 2(1), 785-797.

나철영 (2001). **수학문제만들기 활동이 문제해결력 및 학습 태도에 미치는 효과.** 석사학위논문. 서울교육대학교.

남승인 (1998). 초등학교 수학영재 지도 방안에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지,** 2.

서정현 (2002). **초등학생의 문제 만들기에 대한 분석적 연구.** 석사학위논문. 인천교육대학교.

송상헌 (1998). **수학영재성 측정과 판별에 관한 연구.** 박사학위논문. 서울대학교.

윤선아 (2009). **초등수학에서 문제만들기 활동 지도의 개선 방안.** 석사학위논문. 서울교육대학교.

임근광, 강순자 (2008). 수학영재학생들의 독립연구 능력과 수학영재담당교사들의 인식실태. **영재교육연구,** 18(1). 79-106.

임근광, 김진홍, 임동연, 장현주 (2007). **초등학교 6학년 수학영재교재.** 광주광역시교육청 장학자료 2007-4호.

임문규 (2001). 제7차 교육과정에 따른 초등학교 1, 2학년 수학 교재의 문제만들기 내용분석 및 학생들의 실태조사. **대한수학교육학회 수학교육논문지,** 10, 249-288.

정인철 (2007). **영재아의 창의적 사고. 2007학년도 전라남도교육청 영재교육직무연수교재.** 전남대학교 사범대학 부설 중등교육연수원.

정현정 (2000). **종이접기를 이용한 삼각형의 내심과 외심지도에 대한 사례연구.** 석사학위논문. 고려대학교.

조송연 (2002). **문제 만들기를 통한 수학적 사고력 신장에 대한 연구.** 석사학위논문. 공주대학교.

조정언 (2002). **수학문제만들기 학습이 문제발견 능력에 미치는 영향.** 석사학위논문. 이화여자대학교

조제호 (1999). **4학년 아동들의 수학적 문제 설정 활동의 효과.** 석사학위논문. 한국교원대학교.

최성웅 (2009). **수학문제 만들기를 통한 초등학생의 사고 과정 분석.** 석사학위논문. 부산교육대학교.

황정원 (1999). **종이접기를 이용한 도형지도.** 석사학위논문. 성균관대학교.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing*. Philadepia, PA: Franklin Institute Press.

Bergez, J. (1999). *Unfolding mathematics with unit origami*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, E. P. (1993). Beyond problem solving: Problem posing. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s: 1990 YearBook* (pp. 82-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

Sheffield, L. S. (2006). Developing mathematical promise and creative. *Journal of the Korea Society Mathematical Education Series D, Research in Mathematical Education, 10*(1), 1-11.

Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 9-28.

= Abstract =

Analysis of Problem Posing Strategy of Mathematics Gifted Students in an Origami Program

Geun Gwang Yim

GwangJu NongSung Elementary School

By learning math, constructing math problems helps us to improve analytical thinking ability and have a positive attitude and competency towards math leaning. Especially, gifted students should create math problems under certain circumstances beyond the level of solving given math problems. In this study, I examined the math problems made by the gifted students after the process of raising questions and discussing them for themselves by doing origami. I intended to get suggestions by analyzing of problem posing strategy and method facilitating the thinking of mathematics gifted students in an origami program.

Key Words: Mathematics gifted students, Problem posing, Origami

1차 원고접수: 2010년 6월 17일
수정원고접수: 2010년 8월 6일
최종게재결정: 2010년 8월 18일