

## 수온성층흐름에서 바람에 의해 발생하는 순환흐름을 해석하기 위한 수치모형개발

### A Numerical Model for Wind-Induced Circulation in a Thermally Stratified Flow

이진우\* / 김형준\*\* / 조용식\*\*\*

Lee, Jin Woo / Kim, Hyung-Jun / Cho, Yong-Sik

#### Abstract

The closed water bodies, such as reservoirs and lakes, could be contaminated by an inflow of pollutants in the upstream as well as a stratification caused by seasonal natural phenomena. The vertical circulation particularly plays an important role in reduction of environmental pollutants. The factors of the vertical circulation are the temperature, wind, thermal diffusivity and sunlight. The wind is probably the most significant factor among them. Thus, it is necessary to describe the validation and application of a three-dimensional numerical model of wind-induced circulation in a thermally stratified flow. In this paper, a three-dimensional numerical model for the thermally stratified flows is presented. The model is conducted in three steps to calculate the velocity components from the momentum equations in  $x$ - and  $y$ -axis directions, the elevations from the free surface equation and the temperature from the scalar transport equation. Numerical predictions are compared with available analytical solutions for the sloshing free surface movement in a rectangular basin. The numerical results generally show a reasonable agreement with analytical solutions. And the model is applied to the circulation for the wind induced flow in a thermally stratification. Consequently, the developed model is validated by two verifications and phenomena of the internal flow.

**Keywords** : TVD scheme, free surface correction, hydrostatic pressure, thermally stratified flow

#### 요 지

저수지와 같은 갇혀진 수체는 상류에서 유입되는 오염물질 뿐만 아니라 성층현상에 의해서도 오염될 수 있다. 갇혀진 수체에서의 연직순환은 이러한 오염을 줄이는데 중요한 역할을 하는데, 연직순환을 일으키는 인자로는 빛의 입사, 바람, 물의 온도 및 열의 확산 등이 있으며, 그중에서도 가장 중요한 것은 바람의 영향이다. 그러므로 성층화된 흐름에서 바람에 의해 발생하는 연직순환에 대한 수치모형을 개발하고 적용하는 것이 필요하다. 본 연구는 수온성층흐름을 해석할 수 있는 3차원 수치모형을 제시하였다. 유속성분은  $x$ -축과  $y$ -축 방향에서의 운동량방정식으로부터 3단계에 걸쳐 계산되고, 자유수면 변위와 온도변화 등의 스칼라량은 각각 자유수면방정식과 이송-확산 방정식으로부터 계산된다. 본 연구에서 제시한 모형의 정확도를 검증하기 위하여 정사각형수조에서 진동하는 자유수면의 해석해와 비교하였고, 성층화된 흐름에서 발생하는 연직순환에 대하여 수치모의를 실시하였다. 그 결과, 본 연구에서 개발된 수치모형이 흐름 내부의 현상을 잘 묘사함을 알 수 있었다.

**핵심용어** : 동수압 모형, 자유수면 교정, 동수압 교정, 수온성층흐름

\* 한양대학교 건설환경공학과 박사과정 (e-mail: moonguy@hanyang.ac.kr)

Ph.D. Student, Dept. of Civil and Environ. Engrg., Hanyang University, Seoul 133-791, Korea.

\*\* 한양대학교 건설환경공학과 (한국건설기술연구원 하천·해안항만연구실 박사 후 연구원)

Post-Doc., Dept. of Civil and Environ. Engrg., Hanyang University, Seoul 133-791, Korea.

\*\*\* 교신저자, 한양대학교 건설환경공학과 교수(e-mail: ysc59@hanyang.ac.kr)

Corresponding Author, Prof. Dept. of Civil and Environ. Engrg., Hanyang University, Seoul 133-791, Korea.

## 1. 서 론

호수나 저수지와 같이 갇혀 있는 수체는 음용수, 전력 용수, 관개용수의 공급원이 된다. 그러나 상류로부터의 오염물의 유입이나 계절적인 자연현상에 의해 생기는 성층 현상으로 인하여 오염되기 쉽다. 안정된 성층은 혐기성 조건을 제공하여 바다에서의 용존산소 부족과 수표면에서의 과도한 조류성장을 유발하고 연직순환흐름을 방해한다. 갇혀진 수체에서의 연직순환은 환경적인 문제를 감소시킬 수 있도록 중요한 역할을 한다. 연직순환은 빛의 입사, 바람, 온도, 열의 확산 등에 의해 일어나고 그중에서 바람은 갇혀진 수체에서의 연직순환을 일으키는 가장 중요한 인자이다. 최근 2차원 및 3차원 수치모형을 이용하여 자유수면 흐름을 해석하려는 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 정수압가정을 이용하여 Navier-Stokes 방정식을 수심방향으로 적분한 뒤 천수지역에서의 흐름을 계산 하였다(윤태훈과 이종욱, 1999; 이종욱과 조용식, 2001). 천수방정식의 해석이 Navier-Stokes 방정식의 해석보다 용이하지만, 연직방향의 흐름특성에 대한 해석이 수심적분 방정식에서는 쉽지 않다. 이러한 연직방향의 흐름특성을 해석하는 것이 환경문제를 감소시키는데 중요하기 때문에 정수압 가정을 바탕으로 한 3차원 수치모형들이 개발되어졌다(Blumberg and Mellor, 1987; Casulli and Cheng, 1992). Huang and Spaulding (1995)는 정수압 모형을 이용하여 해안에서의 순환과 오염물 이송에 대한 문제에 적용하였고, Casulli (1999)와 Jankowski (1999)는 isopycnal 좌표계를 이용하여 밀도류에 대한 해석 기술을 제시하였다.

본 연구에서는 연직격자층의 개수에 따른 비선형과의 전과문제 및 하구와 저수지에서의 3차원 오염물 추적, 부력류 해석, 내부과 전과, 해안지역에서의 처오름해석 등을 수치적으로 도모하기 위한 기초단계로서 성층화된 흐름에서 바람에 의해 발생하는 연직순환에 대한 수치모형을 개발하고 검증을 실시하였다.

## 2. 지배방정식

압력을 정수압과 동수압으로 분류하고 Boussinesq approximation을 적용하면 3차원 Navier-Stokes 방정식에 대입하여 정리하면 자유수면을 갖는 비압축성 유체에 대한 지배방정식(Reynolds averaged Navier-Stokes equation)과 이송-확산 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = \\ -(g + [\Delta g]_{z=h}) \frac{\partial h}{\partial x} - \int_z^h \frac{\partial \Delta g}{\partial x} d\gamma - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_T \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_T \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = \\ -(g + [\Delta g]_{z=h}) \frac{\partial h}{\partial y} - \int_z^h \frac{\partial \Delta g}{\partial y} d\gamma - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_T \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_T \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_T \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_T \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} + \frac{\partial w T}{\partial z} = \\ T_s + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $u$ ,  $v$ 와  $w$ 는 각각  $x$ -축,  $y$ -축과  $z$ -축 방향의 유속 (m/sec),  $h$ 는 자유수면의 높이 (m),  $\nu_T$ 는 동점성 계수 (kinematic viscosity,  $m^2/sec$ )이고  $\nu_T = \nu + \nu_t$ 이다.  $T$ 는 수동 스칼라 (Reynolds averaged passive scalar)이다. 이송-확산 방정식에서 온도와 염도에 따른 밀도의 변화는 다음과 같은 방정식을 이용하여 해석할 수 있다 (UNESCO, 1981).

$$\begin{aligned} \rho(T_w, S) = +999.842597 \\ + 6.793952 \times 10^{-2} \times T_w - 9.095290 \times 10^{-3} \times T_w^2 \\ + 1.001685 \times 10^{-2} \times T_w^3 - 1.120083 \times 10^{-3} \times T_w^4 \\ + 6.536332 \times 10^{-2} \times T_w^5 + 8.24493 \times 10^{-3} \times S \\ - 4.0899 \times 10^{-2} \times T_w \times S - 7.6438 \times 10^{-3} \times T_w^4 \times S \\ - 8.2467 \times 10^{-2} \times T_w^3 \times S - 5.3875 \times 10^{-3} \times T_w^4 \times S \\ + 5.72466 \times 10^{-2} \times S^{3/2} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  $T_w$ 는 물의 온도 ( $^{\circ}C$ )이고  $S$ 는 염도 (practical salinity scale, 0~42)이다.

바닥과 수면에서의 동역학적경계조건은 Eqs. (7) and (8)로 나타낼 수 있다.

$$[w]_{z=z_b} = \left[ u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} \right]_{z=z_b} \quad (7)$$

$$[w]_{z=h} = \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=h} \quad (8)$$

자유수면의 해석에는 연속방정식을 수심 적분하여 얻어지는 자유수면 방정식을 사용한다. 연속방정식을 수심 적분하고 Leibnitz' rule을 적용하여 동역학적 경계조건을 대입하면 다음과 같은 자유수면 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

### 3. 수치해법

본 연구에서는 수온성층흐름에서의 순환흐름을 해석하기 위하여 유속성분을 계산하고 자유수면 변위와 온도, 염도등과 같은 스칼라량의 해석을 위해 다음과 같은 3단계의 방법을 이용하였다.

첫 번째 단계 (정수압 계산단계)에서는 운동량 방정식의 경사항을 음해적으로 해석하고, 두 번째 단계 (자유수면 보정단계)에서는 자유수면의 변화를 계산하고 수평방향 유속성분을 계산한다 (Chen, 2003a, b). 예측-수정자 방법(predictor-corrector step method)을 이용하여 자유수면 변위와 유속을 구하였다. 마지막으로 세 번째 단계 (이송-확산단계)에서는 이송-확산방정식을 이용하여 스칼라량을 계산하였다.

#### 3.1 정수압 계산단계 (Hydrostatic Pressure Step)

지배방정식의 수치해를 구하기 위하여 Fig. 1과 같은 엇갈림 격자를 이용하였다. 여기서  $x, y, z$  방향에서 격자 점은  $1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2, 1 \leq k \leq N_3$  범위 내에서 각각의 격자간격인  $\Delta x, \Delta y, \Delta \zeta$ 만큼 변화한다. 일반적

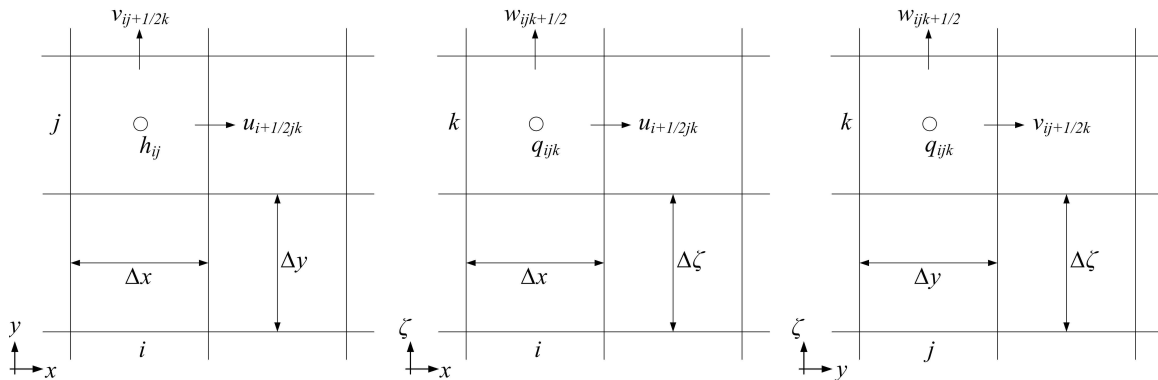


Fig. 1. The Staggered Grid Allocation

으로 3차원 또는 연직 2차원 천수 흐름해석은 수평방향에 대한 연직방향의 상대적인 길이비가 작으므로 작은 연직 방향의 격자증분에 따라 수치해가 불안정해질 수 있다. 따라서 운동량방정식의 다른 항은 양해적으로 해석하였고, 이송항은 풍상차분법 (upwind scheme)을 이용하여 해석하였다.

$x$ -방향의 운동량 방정식을 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta t} \\ & + u_{i+1/2,j,k}^n \frac{[(u)_{i+1,j,k} - (u)_{i,j,k}]^n}{\Delta x} \\ & + u_{i+1/2,j,k}^n \frac{[(u)_{i+1/2,j+1/2,k} - (u)_{i+1/2,j-1/2,k}]^n}{\Delta y} \\ & + w_{i+1/2,j,k}^n \frac{[(u)_{i+1/2,j,k+1/2} - (u)_{i+1/2,j,k-1/2}]^n}{\Delta z} \\ & = -g \left[ \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} \right] - \left[ \frac{g'_{i+1,j,k} - g'_{i,j,k}}{\Delta x} \right] \\ & + [D(u,x)_{i,j,k}^n + D(u,y)_{i,j,k}^n + D(u,z)_{i,j,k}^n] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $u^{n+1/2}$ 는 다음시간단계에서 계산되어지는 유속값 이고,  $g' = \int^h \Delta g d\gamma$ ,  $\Delta g = g\Delta\rho/\rho_0$ 이며  $\Delta\rho$ 는 밀도의 변화량이다.  $D(a,b)$ 는 확산연산자 (diffusion operator)로써 아래의 식과 같다.

$$\begin{aligned} D(u,x)_{i+1/2,j,k} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} [(\nu_h)_{i+1,j,k} (u_{i+3/2,j,k} - u_{i+1/2,j,k}) \\ & \quad - (\nu_h)_{i,j,k} (u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k})] \end{aligned} \quad (11)$$

$y$ -방향과  $z$ -방향의 확산항도 Eq. (11)과 비슷하게

나타낼 수 있다. 각 방향의 확산항을 Eq. (10)에 대입하면  $x$ -방향 운동량방정식은 3-대각행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & (AA^u)_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\ & + (BB^u)_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\ & + (CC^u)_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} \\ & = (DD^u)_{i+1/2,j,k}^n \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 각 항의 계수는 다음과 같다.

$$AA_{i+1/2,j,k}^u = -\frac{\Delta t}{\Delta z^2} (c_v^u)_{i+1/2,j,k-1/2}^n$$

$$\begin{aligned} BB_{i+1/2,j,k}^u &= \\ 1 - \frac{\Delta t}{\Delta z^2} & \left[ (c_v^u)_{i+1/2,j,k-1/2}^n + (c_v^u)_{i+1/2,j,k+1/2}^n \right] \end{aligned}$$

$$CC_{i+1/2,j,k}^u = -\frac{\Delta t}{\Delta z^2} (c_v^u)_{i+1/2,j,k+1/2}^n$$

$$\begin{aligned} DD_{i+1/2,j,k}^u &= \\ u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n & \frac{\Delta t [(u)_{i+1,j,k} - (u)_{i,j,k}]^n}{\Delta x} \\ - v_{i+1/2,j,k}^n & \frac{\Delta t [(u)_{i+1/2,j+1/2,k} - (u)_{i+1/2,j-1/2,k}]^n}{\Delta y} \\ - w_{i+1/2,j,k}^n & \frac{\Delta t [(u)_{i+1/2,j,k+1/2} - (u)_{i+1/2,j,k-1/2}]^n}{\Delta z} \\ = -g\Delta t & \left[ \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} \right] - \Delta t \left[ \frac{g'_{i+1,j,k} - g'_{i,j,k}}{\Delta x} \right] \\ + \Delta t & [D(u,x)_{i,j,k}^n + D(u,y)_{i,j,k}^n] \end{aligned}$$

$c_v^u$ 는 비대각원소 (off-diagonal elements)로써 복잡한 연직 방향의 확산항을 간략화하기 위하여 사용하였다 (Yuan, 2004).

$$\begin{aligned} (c_v^u)_{i+1/2,j,k\pm 1/2} &= \\ (\nu)_{i+1/2,j,k\pm 1/2} & [(z)_{i+1/2,j,k} \times (z)_{i+1/2,j,k\pm 1/2}] \end{aligned}$$

### 3.2 자유수면 보정단계 (Free Surface Correction Step)

자유수면 보정단계에서는 자유수면의 변화량을 고려하여 이전단계 (정수압계산단계)에서 구한 최종유속장을 계산한다. 투영법 (projection method)를 이용하면, 유속성분은 다음의 식으로부터 계산되어진다 (Chen, 2003a, b).

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = u_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - g\theta\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta h_{i+1/2,j}^{n+1}) \right] \quad (13)$$

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = v_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - g\theta\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\delta h_{i,j+1/2}^{n+1}) \right] \quad (14)$$

여기서,  $\delta h^{n+1} = h^{n+1} - h^n$ 이고,  $h^{n+1}$ 는 다음단계에서 수정되는 자유수면 변위이다.

자유수면 변위와 수평방향의 유속을 계산하기 위하여 Eqs. (13) and (14)를 풀어야 한다. Eqs. (13) and (14)를 해석하여 구한 중간단계의 수평 유속장을 자유수면 방정식에 대입하여 업데이트한다. Casulli and Cattani (1994)의 것과 유사한 반음해법을 이용하면 자유수면방정식은 다음과 같이 차분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta h_{i,j}^{n+1} + \theta\Delta t & \left[ \frac{1}{\Delta x} \{ U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i-1/2,j}^{n+1} \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta y} \{ V_{i,j+1/2}^{n+1} - V_{i,j-1/2}^{n+1} \} \right] \\ = -(1-\theta)\Delta t & \left[ \frac{1}{\Delta x} \{ U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta y} \{ V_{i,j+1/2}^n - V_{i,j-1/2}^n \} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Eq. (15)는  $0.5 \leq \theta$ 일 경우에 중력과의 전파에 대해 무조건적으로 안정하다 (Casulli and Cattani, 1994). 또한, Eq. (15)는 수심적분된 유속을 사용하므로 Eqs. (13) and (14)를 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j}^{n+1} &= \\ U_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_{i+1/2,j}^n & \frac{\theta\Delta t}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta h^{n+1}) \right]_{i+1/2,j} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_{i,j+1/2}^{n+1} &= \\ V_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_{i,j+1/2}^n & \frac{\theta\Delta t}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\delta h^{n+1}) \right]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $H = h - z_b$ 는 수심이다. Eqs. (16) and (17)을 Eq. (15)에 대입하면 다음의 자유수면 보정식 (free surface correction equation)을 얻을 수 있다 (Chen, 2003a, b).

$$\begin{aligned}
& \delta h_{i,j}^{n+1} + g(\theta \Delta t)^2 \left[ \frac{H_{i+1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta h^{n+1})_{i+1/2,j} - \frac{H_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta h^{n+1})_{i-1/2,j} \right. \\
& \quad \left. + \frac{H_{i,j+1/2}^n}{\Delta y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta h^{n+1})_{i,j-1/2} - \frac{H_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \frac{\partial}{\partial x} (\delta h^{n+1})_{i,j-1/2} \right] \\
& = -\theta \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta x} \{ U_{i+1/2,j}^{n+1/3} - U_{i-1/2,j}^{n+1/3} \} + \frac{1}{\Delta y} \{ V_{i,j+1/2}^{n+1/3} - V_{i,j-1/2}^{n+1/3} \} \right] \\
& \quad - (1-\theta) \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta x} \{ U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n \} + \frac{1}{\Delta y} \{ V_{i,j+1/2}^n - V_{i,j-1/2}^n \} \right]
\end{aligned} \tag{18}$$

만약에 경계에서의 수면 변위가 명확하게 주어진다면, 직접 Eq. (18)에 대입하여 해석할 수 있고,  $i=1/2$ 이 고체면이라고 가정하면 고체면에서의 수평방향 유속은 0이며, 이것을 Eq. (16)에 대입하면 경계외부의 자유수면을 제거할 수 있다.

자유수면 보정식은 수심이 일정한 경우에 대칭성을 갖는다. 하지만, 자유수면흐름과 같이 변화하는 경우에는 비대칭성을 가지므로, BI-CGSTAB (bi-conjugate stabilized)법을 이용하여 해석하였다. 자유수면 변위가 Eq. (18)에 의해서 계산되면, Eq. (13)으로부터 새로운 수평방향 유속을 구할 수 있다.

### 3.3 이송-확산 단계 (Scalar Transport Equation Step)

이송-확산 방정식을 차분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n) \\
& + \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k}^{n+1} T_{i+1/2,j,k}^{TVDB3} - u_{i,j,k}^{n+1} T_{i-1/2,j,k}^{TVDB3}) \\
& + \frac{1}{\Delta y} (v_{i,j,k}^{n+1} T_{i,j+1/2,k}^{TVDB3} - v_{i,j,k}^{n+1} T_{i,j-1/2,k}^{TVDB3}) \\
& + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k}^{n+1} T_{i,j,k+1/2}^{TVDB3} - w_{i,j,k}^{n+1} T_{i,j,k-1/2}^{TVDB3}) \\
& = [D(T,x)^n + D(T,y)^n + D(T,z)^n]
\end{aligned} \tag{19}$$

Eq. (19)에서 이송항은 양해적인 방법과 3차 정확도 풍상 차분기법을 기초로 한 TVD (Total Variation Diminishing) 기법을 이용하여 차분하였다. TVD기법은 불연속적인 구간에서 비 물리적인 진동을 억제하기 위하여 사용되었다. 수치흐름률 (numerical flux,  $f_{i+1/2}^{TVDB} = u_{i+1/2}^{n+1} T_{i+1/2}^{TVDB}$ )은 3차 TVD기법을 이용하면 Eq. (20)과 같이 나타낼 수 있고, Cell 표면에서의 확산흐름률은 Eq. (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
f_{i+1/2}^{TVDB} & = \frac{u_{i+1/2}^{n+1}}{2} (T_i^n + T_{i+1}^n) - \frac{|u_{i+1/2}^{n+1}|}{2} \Delta_{i+1/2} T^n \\
& + |u_{i+1/2}^{n+1}| [A_0 \Delta_{i+1/2} T^n + A_1 \Delta_{i-s+1/2} T^n] \psi_{i+1/2}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
D(T,x)_{i+1/2,j,k} & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_h \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} \\
& = \frac{1}{\Delta x^2} [(\nu_h)_{i+1,j,k} (T_{i+3/2,j,k} - T_{i+1/2,j,k}) \\
& \quad - (\nu_h)_{i,j,k} (T_{i+1/2,j,k} - T_{i-1/2,j,k})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(T,y)_{i+1/2,j,k} & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_h \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i+1/2,j,k} \\
& = \frac{1}{\Delta y^2} [(\nu_h)_{i+1/2,j+1/2,k} (T_{i+1/2,j+1,k} - T_{i+1/2,j,k}) \\
& \quad - (\nu_h)_{i+1/2,j-1/2,k} (T_{i+1/2,j,k} - T_{i+1/2,j-1,k})]
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
D(T,z)_{i+1/2,j,k} & = \frac{\partial}{\Delta z_{i+1/2,j,k}} \left( \nu_v \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i+1/2,j,k} \\
& = \frac{1}{\Delta z_{i+1/2,j,k}} \left[ (\nu_v)_{i+1/2,j,k+1/2} \frac{(T_{i+1/2,j,k+1} - T_{i+1/2,j,k})}{\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}} \right. \\
& \quad \left. - (\nu_v)_{i+1/2,j,k-1/2} \frac{(T_{i+1/2,j,k} - T_{i+1/2,j,k-1})}{\Delta z_{i+1/2,j,k-1/2}} \right]
\end{aligned}$$

앞에서 소개한 TVD기법으로 차분한 이송-확산 방정식은 3대각행렬로 나타낼 수 있고 Thomas 알고리즘을 이용하여 해석할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (AA^u)_{i+1/2,j,k}^n \delta u_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/3} \\
& + (BB^u)_{i+1/2,j,k}^n \delta u_{i+1/2,j,k}^{n+1/3} \\
& + (CC^u)_{i+1/2,j,k}^n \delta u_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/3} = (DD^u)_{i+1/2,j,k}^n
\end{aligned} \tag{22}$$

유속성분 ( $u^{n+1/2}, v^{n+1/2}, w^{n+1/2}$ )은 Eq. (12)의 3대각행렬을 해석하여 계산할 수 있다. 최종 자유수면 변위는 BI-CGSTAB법을 이용하여 자유수면 보정식을 해석하여

구할 수 있고 (van der Vorst, 1992), 업데이트되는 유속성분은 Eqs. (13) and (14)로부터 구할 수 있다. 이송-확산 방정식은 TVD기법을 이용하여 해석되고, 밀도는 Eq. (6)에 의해서 업데이트 된다.

### 3.4 경계조건

바닥과 수면에서의 수평방향 유속은 Eq. (12)에 의해 계산되고, 연직방향 유속은 바닥과 수면에서의 동역학적 경계조건을 이용하여 구할 수 있다 (Eqs. (7) and (8)). 수면에서의 바람에 의한 응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \left( \nu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+1/2, j, N_s} &= \frac{\tau_{sx}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left( \rho_a c_f u_w \sqrt{u_w^2 + v_w^2} \right) \\ \left( \nu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i, j+1/2, N_s} &= \frac{\tau_{sy}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left( \rho_a c_f v_w \sqrt{u_w^2 + v_w^2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,  $\rho_a$ 는 공기의 밀도 ( $\approx 1.2 \text{ kg/m}^3$ ),  $c_f$ 는 항력계수 ( $\approx 1.5 \times 10^{-3}$ )이고  $u_w$ 와  $v_w$ 는 각각  $x$ -와  $y$ -방향의 바람 속도이다. 조도계수는 Manning-Chezy 공식을 사용하였다. 또한, 확산계수를 계산하기 위하여 난류 Prandtl 수 ( $\sigma_t$ )를 사용하였다.

$$\Gamma^h = \frac{\nu_T^h}{\sigma_t} \quad \text{and} \quad \Gamma^v = \frac{\nu_T^v}{\sigma_t} \quad (24)$$

## 4. 적용 및 결과

본 연구에서 개발된 수치모형의 검증 및 적용성을 위하

여 Jankowski (1999)가 적용한 정사각형 수조에서 진동하는 자유수면 흐름문제에 대해 수치모의를 실시하였고, 검증된 수치모형을 이용하여 수온성층흐름에서의 발생하는 순환에 대해 수치모의를 실시하였다.

### 4.1 정사각형 수조에서 자유수면의 진동

본 연구에서는 길이 10 m, 폭 10 m인 정사각형 수조가 사용되었으며, 초기수심은 10 m로 정의하였다. 해석해야 존재하는 정사각형 수조에서의 자유수면 진동에 관하여 수치모의를 실시하였다. 모형의 적용을 위해 사용한 초기 조건으로 자유수면은 다음 식을 이용하였다.

$$h = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + h_0 \quad \text{with } 0 \leq x \leq l = 10 \text{ m} \quad (25)$$

여기서,  $a$ 는 진폭 ( $=0.1 \text{ m}$ ),  $\lambda = 20 \text{ m}$ ,  $l$ 은 수조의 길이이며  $h_0 = 10 \text{ m}$ 이다.  $\Delta t = 0.5 \text{ sec}$ 이고, 총 모의시간은  $200 \text{ sec}$ 로 하였다.

Fig. 2는 자유수면 변위에 대해 해석해와 수치모의 결과를 비교한 그림이고, Fig. 3은 수평방향유속의 결과를 비교한 그림이다. 수치모의 결과는 해석해와 비교적 일치하는 것으로 나타났다. 하지만, 계산 시간이 증가할수록 약간의 차이가 발생함을 알 수 있는데, 본 연구에서는 선형파의 분산관계식 ( $\omega^2 = gk \tanh kh$ )을 사용하였고, 해석해의 경우에는 장파에 대한 분산관계식 ( $\omega^2 = gk^2 h$ )을 사용하였기 때문이다. 파의 속도와 주기를 살펴보면 본 연구의 수치모의 결과, 파의 속도와 주기는 각각  $9.74 \text{ m/sec}$ ,  $41.07 \text{ sec}$ 이고 해석해의 경우 각각  $9.90 \text{ m/sec}$ ,  $40.40 \text{ sec}$ 으로 나타났다.

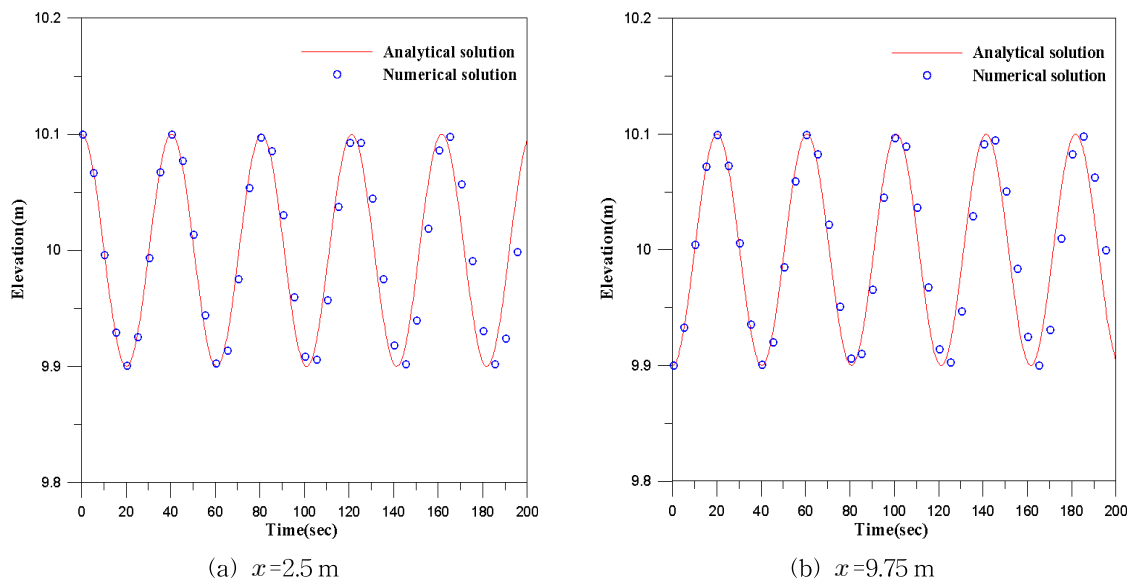
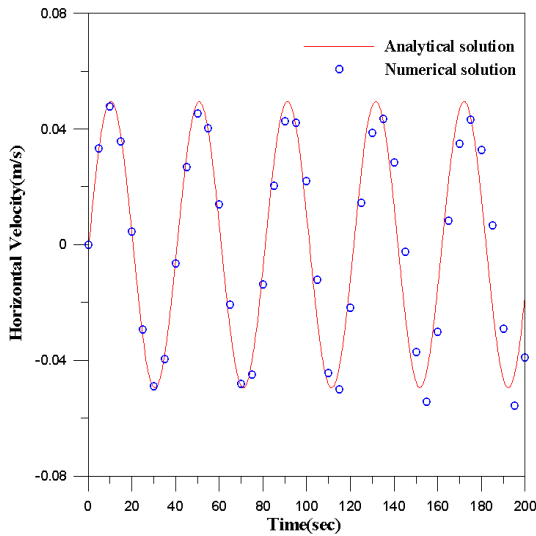
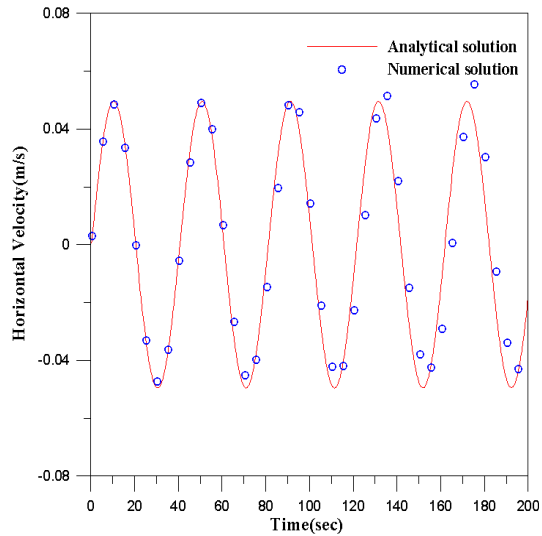


Fig. 2. Comparison of Analytical and Numerical Water Surface Elevations ( $m$ )

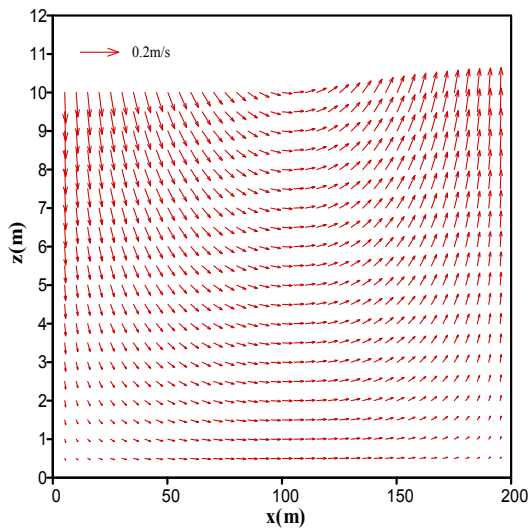


(a)  $x=2.5$  m

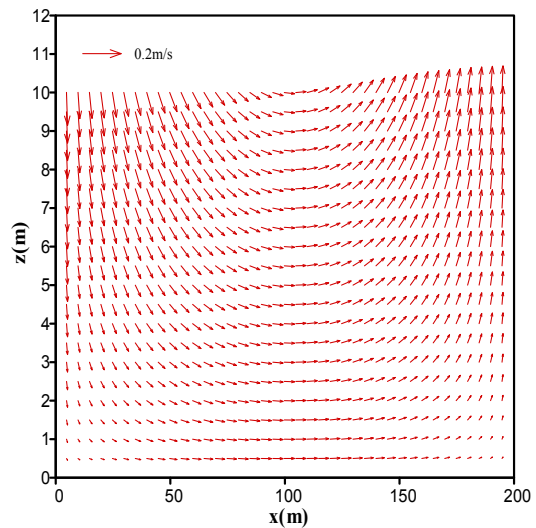


(b)  $x=9.75$  m

Fig. 3. Comparison of Analytical and Numerical Horizontal Velocity ( $m/s$ )



(a) 해석해 (analytical results)



(b) 수치모의 결과 (numerical results)

Fig. 4. Comparison of Analytical and Numerical Velocity Vectors ( $y=5$  m,  $t=T/4$  sec)

Figs. 4 and 5는 유속에 대해 해석해와 수치모의 결과를 비교한 그림이다. 위치에너지와 운동에너지의 관계로 인하여 유속벡터도는 전반적으로  $T/4$ 와  $3T/4$ 에서 최고 값을 갖는다. 자유수면 변위가 수평에 가까워지면 위치 에너지가 운동에너지로 바뀌기 때문이다. 따라서 경계 부근에서의 연직방향 유속은 크게 계산되어짐을 알 수 있다.

#### 4.2 수온성층흐름에서 발생하는 순환

본 연구에서는 수온성층흐름에서의 순환현상을 해석하기 위하여  $250 \times 50 \times 6$  m인 수조를 사용하였고,  $x$ -방향

으로 바람이 불도록 설정하였다. 또한, 밀도는 온도의 함수이므로 온도가 변함에 따라 선형적으로 변화한다고 가정하였다. Eq. (6)을 이용하여 밀도는 계산되고, 초기온도는 다음과 같은 수심 ( $d$ )의 선형분포를 따른다.

$$T = \begin{cases} 27.5 & , d < 2.0 \text{ m} \\ 27.5 - \frac{4.0}{2.0}(d - 2.0) & , 2 \leq d \leq 4 \\ 22.5 & , d > 4 \end{cases} \quad (26)$$

수치모의를 위한 격자간격은  $\Delta x = \Delta y = 5$  m로 설정하였다. 수평방향과 연직방향의 확산계수는 각각  $0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$

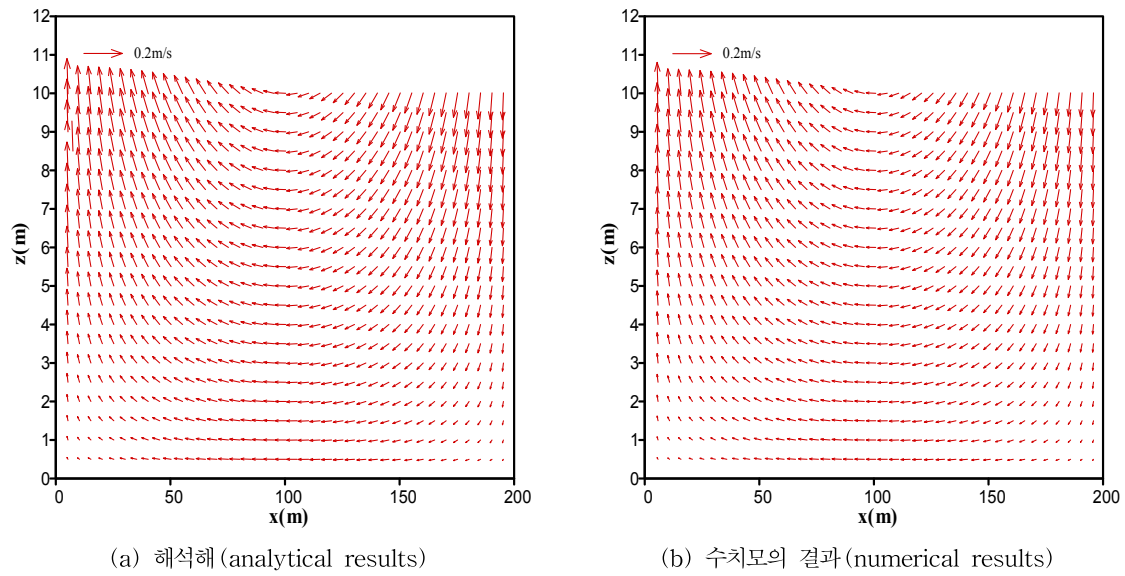


Fig. 5. Comparison of Analytical and Numerical Velocity Vectors ( $y=5\text{ m}$ ,  $t=3T/4\text{ sec}$ )

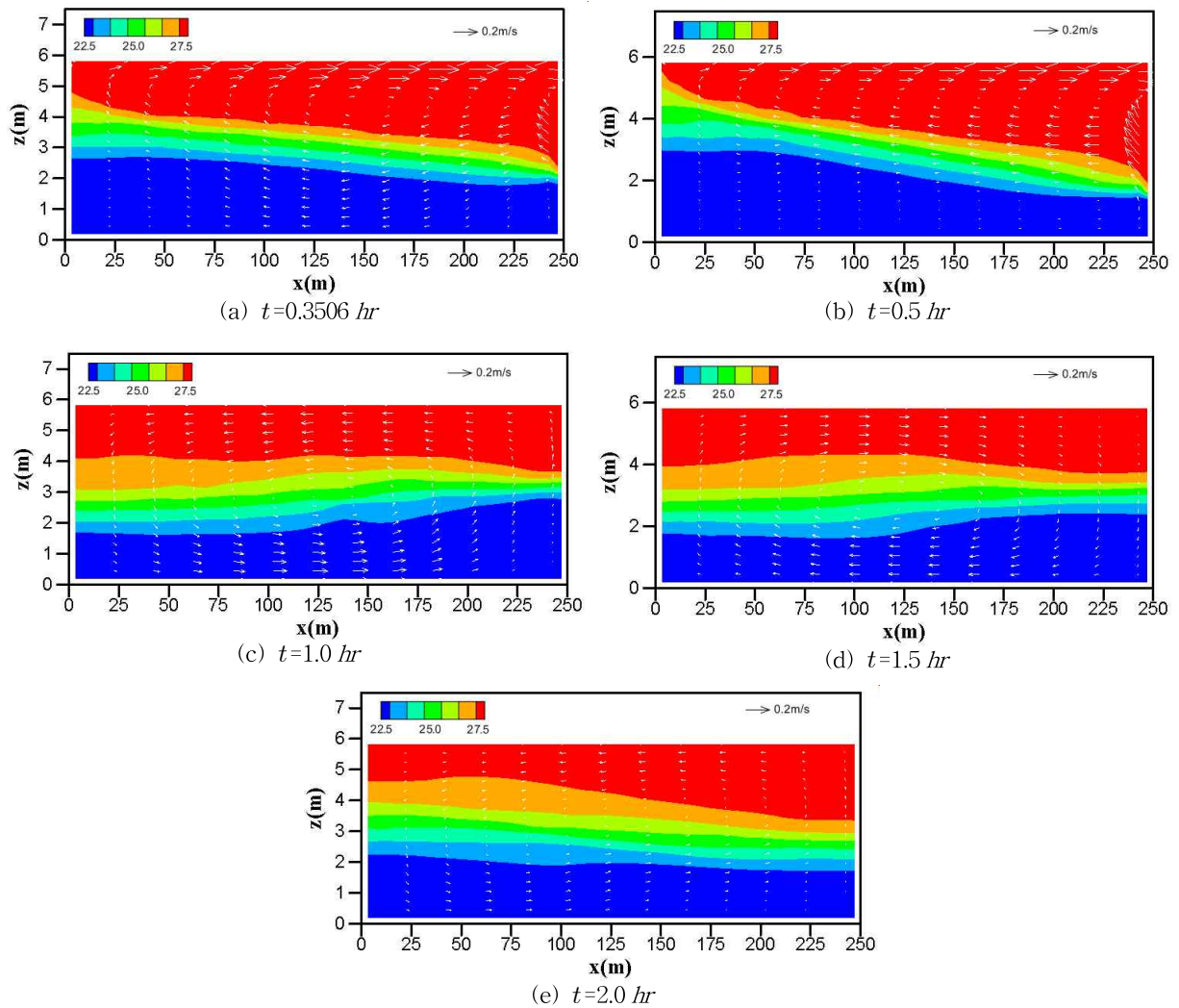


Fig. 6. Wind-driven Circulation for Thermal Stratified Flow in a Closed Basin ( $y=25\text{ m}$ )



와  $0.001 \text{ m}^2/\text{sec}$ 로 설정하였고, 자유수면에서는  $x$ -방향으로 초속 10m의 바람이 2000 sec 동안 분다고 가정하였다. 수면에서 바람의한 응력은 Eq. (23)을 이용하여 계산되고, 각각의 계수는  $\rho_a=1.2\text{kg}/\text{m}^3$ , and  $c_f=1.5 \times 10^{-3}$  (Fischer et al., 1979)로 가정하였다. 총 모의시간은 3 hr이고,  $\Delta t=2.5 \text{ sec}$ 를 이용하였다.

Fig. 6은 수온성층 흐름에서 바람에 의한 순환현상을 나타낸 그림이다. Figs. 6(a) and 6(b)에서 수온성층 흐름에서 수온약층 (thermocline)이 가파른 경사로 변하는 것을 알 수 있다. 바람을 포함한 외력으로부터의 용승작용과 혼합작용이 위에서 아래로 순환하며 발생하기 때문이다.

Figs. 6(c)~6(e)는 바람이 멈춘 후의 결과를 나타낸 그림이다. 바람이 멈추게 되면 자유수면에서는 진동현상이 일어나고, 수온약층의 경사는 완만하게 변화함을 알 수 있다. 시간이 흐를수록, 자유수면의 진동현상과 수온약층의 경사 및 간격은 평형상태의 모습으로 간다. 이러한 결과로 볼 때 자유수면에서의 작은 움직임은 내부의 흐름에 큰 영향을 미친다는 것을 말해준다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 성층화된 흐름에서 바람에 의해 발생하는 연직순환에 대한 수치모형을 개발하고 적용성을 검토하였다. 수치모형은 크게 3단계로 이루어져있다. 첫 번째는  $x$ -축과  $y$ -축 방향에서의 운동량방정식으로부터 유속성분을 계산하고, 두 번째는 자유수면 방정식으로부터 자유수면 변위를 계산한다. 마지막으로 스칼라 이송방정식으로부터 온도의 변화를 계산한다. 수치모형의 정확도를 검증하기 위하여 정사각형수조에서 진동하는 자유수면의 해석해와 비교하였다. 검증된 수치모형을 이용하여 성층화된 흐름에서 발생하는 연직순환에 대하여 수치모의를 실시하였다. 간헐진 수체에서 바람으로 인한 연직순환 흐름이 발생하게 되면 자유수면은 진동하고, 수온약층의 경사는 가팔라짐을 알 수 있었다. 바람이 갑자기 멈추었을 경우, 자유수면의 진동이나 수온약층의 경사는 확산에 의한 에너지 소산으로 인하여 평형상태의 모습으로 돌아옴을 알 수 있었다. 본 연구에서 개발된 수치모형이 수온성층의 내부 흐름현상을 잘 묘사함을 알 수 있었고, 본 연구의 결과는 추후 수치모형의 확장을 통하여 연직방향의 격자층을 이용한 비선형과의 전파문제, 하구와 저수지에서 3차원 오염물 추적 및 해안지역에서의 처오름 해석 등의 연구가 이루어질 때 중요한 참고자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

## 감사의 글

본 연구는 국토해양부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행한 건설기술혁신사업 (08기술혁신F01)에 의한 차세대홍수방어기술개발연구단의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

- 윤태훈, 이종욱 (1999). “불연속흐름의 2차원 수치해석.” **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제19권, 제II-4호, pp. 445-454.
- 이종욱, 조용식 (2001). “TVD 수치모형 개발: II. 천수방정식.” **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제34권, 제2호, pp. 187-195.
- Blumberg, A.F., and Mellor, G.L., (1987). “A description of a three dimensional coastal ocean circulation model.” In Heaps, N.S, editor, *Three Dimensional Coastal Ocean Circulation Models, Coastal and Estuarine Sciences*, Vol. 4, pp. 1-16. American Geophysical Union, Washington DC.
- Casulli, V. (1999). “Semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows.” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 30, pp. 425-440.
- Casulli, V., and Cattani, E. (1994). “Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow.” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 27, No. 4, pp. 99-112.
- Casulli, V., and Cheng, R.T., (1992). “Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow.” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 629-648.
- Chen, X. (2003a). “A free-surface correction method for simulating shallow water flows.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 189, No. 2, pp. 557-578.
- Chen, X. (2003b). “A fully hydrodynamic model for three-dimensional, free-surface flows.” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 42, No. 9, pp. 929-952.
- Fischer, H.B., List, E.H., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H., (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press.
- Huang, W., and Spaulding, M., (1995). “3D model of

- estuarine circulation and water quality induced by surface discharges." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, No. 4, pp. 300-311.
- Jankowski, J.A., (1999). A Non-Hydrostatic Model for Free Surface Flows. Ph.D. thesis, Hanover University, Germany.
- UNESCO (1981). Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards. In UNESCO Technical Papers in Marine Science, 36. UNESCO.
- van der Vorst, H.A. (1992). "BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems." *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, No. 2, pp. 631-644.
- Yuan, H., and Wu, C.H. (2004). "An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 46, pp. 709-733.

논문번호: 10-051	접수: 2010.06.24
수정일자: 2010.09.08/10.05	심사완료: 2010.10.05