한국학교수학회논문집 제 13 권, 제 2호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 13, Number 2, 185-203, June 2010

평가를 통한 수학 학습지도에 관한 연구

서종진[1] · 윤연수[2]

학생들의 수학 학습 정도는 학교수학의 각 영역이나 내용에 따라 다양하게 나타날 수 있다. 이러한 수학 학습상황을 평가하고 활용하기 위한 통합적인 평가 틀의 구성은 유용하다. 본 논문에서는 일차방정식의 내용으로 한정하여 유형별 평가와 문항별 평가에 대한 평가표를 구성하였으며, 두 가지 평가를 기초로 종합평가를 통한 수학 학습지도에 대하여 알아보았다. 구성한 평가표는 학생 개개인의 학습 상황에 대한 정보를 제공함으로 개별적인 수학 학습 지도에 유용하다.

주요용어 : 평가표, 수학 학습지도

Ⅰ. 도입

평가의 목적은 교사와 학생 모두에게 유용한 정보를 제공함으로써 교수·학습 개선에 기여하는 데에 있다. 평가를 통해 나타난 학생의 성취 정도는 학생이 이미 학습한 수학 내용을 어느 정도 이해하고 있는가를 확인하는 데에 도움을 준다. 평가를 통해 학생이 이미 학습한 수학 내용 중에서 강점을 갖는 부분이 어디이며 취약한 부분이 어디인가를 확인할 수 있다. 학생은 평가 결과를 토대로 자신에게 취약한 부분으로 나타난 수학 내용의 학습에 더욱 집중할 필요성을 느끼게 된다. 또한 학생 자신이 강점을 갖는 수학 내용을 기초로 하여 더욱 고차원적인 수학 내용의 학습으로 진행해 갈 수 도 있다(교육과학기술부, 2008). 그러므로 '어떠한 평가 방법을 사용할 것인가?', '어떻게 평가를 할 것인가?' 그리고 '어떻게 처리할 것인가?'는 수학 교수·학습에서 매우 중요한 과제이다. 이러한 문제는 한 편으로는 쉽고, 또 한 편으로는 어려움이 따르는 일이다. 학생들의 수학 성취 정도를 판단하는 일은 차후 학습과 관련성이 매우 깊고, 지속적인 평가를 통하여 수집된 다양한 정보를 '어떻게 활용을 것인가?'로 귀착되기 때문이다.

교사는 다양한 평가 방법으로 수집된 정보를 최대한 활용하여 학생들의 수학 학습에 도움을 주어야한다. 평가를 통하여 '어떻게 도움을 줄 것인가?'는 '어떤 평가가 적절하고 활용 가치가 있는가?'에 대한 문제로 교사와 학습자의 공동의 과제이다. 일방적인 도움은 학생들에게 불필요한 조언자의 역할을 하기 때문이다. 이러한 공동의 과제를 수행하는데 있어서 무엇보다 중요한 것은 최대의 효과를 올리는 것이다. 여러 평가 방법에서 효과적인 면을 고려

1) 한남대학교 (jjseo@hnu.kr)
2) 한남대학교 (yoon@hnu.kr)

할 때, 어떠한 평가가 효과적인가는 학습자의 현재의 수학 학습 상황을 고려한 평가방법을 사용하여 타당하게 평가하는 것이다. 그리고 수학 학습 평가의 내용이 학습자에게 의미 있게 전달되어 학습자가 수학 학습에 능동적으로 참여하고, 학습한 내용에 대한 이해와 평가 결과 간의 평형을 찾으려는 자기 조정활동을 통하여 내부적으로 학습 내용을 스스로 구성해 가는 것이다.

평가는 학생 개개인의 수학 개념에 대한 이해, 문제 해결력, 창의력 등 여러 학습 상황을 파악하고, 분석된 결과를 토대로 수학 교수·학습 계획을 세우고 실행하기 위함이다. 현재의 학습 상황에 대한 평가는 각 내용별, 영역별, 학기별, 학년별, 내용의 연계적인 면을 고려한 전반적인 수학 학습 상황 등을 세부적으로 또는 광범위의 수학 학습 평가를 고려할 수 있다. 어떠한 범위에서의 평가이든 수학에서는 연계성을 고려한 평가가 중요하다. 예를 들어, 수학 내용 중 어느 부분 내용이나 영역 대하여 올바르지 못한 개념형성이 차후 학습에 어떠한 영향을 미친다는 것이다. 기존의 연구(Kieran, 1981; Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996; Mevarech & Yitschak , 1983 :Kieran, 1992)에 따르면 등호(=)의 잘못된 사용은 중등학교에서 대학교 수준에까지 계속되며 잘못된 등호 사용으로 방정식을 학습을 하는데 있어서 교수학적 단절이 발생할 수 있다는 것이다. 이러한 점을 고려한 학생들의 학습 상황에 대한 분석과 평가결과에 대한 활용은 필요하다는 것이다.

학교수학에서 학생들의 학습 상황을 분석하여 학습에 도움을 주기위한 연구가 이루어져 왔다(고상숙·김 숙, 2003; 김민경, 2006; 김민주·강윤수, 2007; 노선숙·김민경·,조성민·백해진,2008: 등등). 본 연구에서는 이러한 기존의 연구를 참고하여 학생들 개개인의 학습 상황을 세밀하게 분석하고 분석된 결과를 기초로 학습한 내용의 이해 부족을 해소하기 위한 방안으로의 평가 방법을 고려하였다. 본 논문에서는 중학교 1학년 일차방정식 부분에서 학생들의 현재의 학습 상황을 평가하여 평가표를 구성하고, 이 평가표를 활용한 수학 학습 지도에 관하여 논의 하였다.

Ⅱ. 연구방법

수학 문제를 해결하고, 풀이과정을 정확하게 표현하는 일은 수학 교수·학습에서 중요한 일이다. 그러므로 본 연구에서는 일차방정식의 세 가지 유형의 문제에 대하여 학생들의 학습 상황을 분석하고 수학 학습지도 방안을 찾고자 다음과 같은 연구 문제를 구성하였다.

1. 연구문제

1) 기본적인 일차방정식 문제(유형A, 유형B, 유형C)를 어느 정도 해결하고, 올바르게 표현할 수 있는가?

2) 유형A, 유형B, 유형C의 문제풀이 결과에 기초한 평가표의 구성과 평가표를 활용한 수학 학습지도를 어떻게 할 것인가?

2. 용어의 정의

1) 오류 문제

유형B의 문제는 풀이과정에 오류가 있도록 구성하였다. 즉, 제시된 풀이과정에서 '등호(=)

‘를 올바르게 표현하지 못한 부분을 찾아 그 이유(근거)를 제시하도록 문항을 구성하였다. 이러한 문제를 오류 문제라 한다.

2) 학생 개개인의 학습 상황 평가표

유형A, 유형B, 유형C의 문제에 대한 평가 결과를 각각 분석하고, 세 유형의 결과를 종합적으로 분석하기 위하여 기호를 사용하여 만든 표를 말한다. 이 표는 학생 개개인의 수학 학습상황에 대한 정보를 제공함으로 학생 개개인의 학습 상황 평가표라 한다. 이러한 것은 학생들의 학습 상황을 알아보고 학습에 도움을 주기 위한 것이다.

3) 등호(‘=’)의 대칭 관계

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 학생들의 반응에서, 등호의 올바른 표현과 올바르지 못한 표현을 의미한다. 예를 들어, 다음과 같은 유형B 문항에서(<표Ⅱ-1>), <예시 문항1>은 등호(=)의 좌변과 우변이 대칭을 이루지 못하고 있다. <예시 문항2>는 좌변과 우변이 대칭을 이루고 있다. 이러한 관점에서 동치관계 중 대칭만을 고려하였다.

<표Ⅱ-1> 등호관계의 올바른 표현과 올바르지 못한 표현에 대한 예

문제	예시 문항1	예시 문항2
유형B	1) 방정식 $x+4=9$을 풀어라. 풀이) $x+4=9$ $=9-4$ $=5$ $x=5$	1) 방정식 $x+4=9$을 풀어라. 풀이) $x+4=9$ $x=9-4$ $x=5$

3. 연구의 제한점 및 기대효과

지역이나 학교 그리고 학생들 간의 수준의 차이가 있으므로 일차방정식 기본 문제에 대한 학생들의 반응은 달리 나올 수 있다. 그러나 평가의 결과는 각 학생들의 수학 학습에 대한 정보를 제공하므로 그 차이는 문제가 되지는 않는다.

본 연구에서 사용한 방법은 중등 수학의 다른 영역에도 사용할 수 있으므로 그 활용 가치가 있을 것으로 보인다.

4. 연구대상 및 연구도구

1) 연구대상

시 단위 지역의 중학교 1학년 142명을 대상으로 하였다. 연구대상 학교는 사회 문화적인 배경에서 중위권 정도라 할 수 있다. 조사 대상 학생은 151명 이었지만 유형A, 유형B, 유형C 문제지 중 하나 또는 두 가지 문제를 보지 않았던 학생 9명은 제외하였다.

2) 연구도구

일차방정식에 관한 세 가지 유형(유형A, 유형B, 유형C)의 문제는 기존의 연구에서 사용한 문제(서종진, 2009; Seo & Kim, 2010)를 사용하였다. 유형A는 좌변에 변수가 있는 4문항

($x+4=9$, $3x+2=17$, $4(x+2)=20$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$)과 우변에 변수가 있는 4문항($12=3+x$, $14=4x+3$, $15=3(x+2)$ $\frac{1}{3}=x+\frac{1}{4}$)으로 구성되어 있다. 이들 문항을 각각 유형A-1, 유형A-2로 구분하였다. 유형B는 4개의 문항($x+4=9$, $3x+2=17$, $4(x+2)=20$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$)으로 구성되어 있다. 각 문항은 풀이 과정에 오류가 있도록 구성되어 있다. 만약 풀이 과정에 오류가 없으면 "없다"에 표시하고, 만약 오류가 있으면 "있다"에 표시하도록 되어있다. 그리고 그 이유(근거)를 학생들이 직접 제시하도록 문제가 구성되어 있다. 유형C는 4문항($x+3=8$, $3x+4=17$, $5(x+2)=20$, $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$)으로 구성되어 있다. 이 문항은 '등식 의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구하라'는 풀이방법의 조건이 제시된 문항으로 구성되어 있다. 조사결과 사후 신뢰계수는, 유형A가 $\alpha=.828$, 유형C가 $\alpha=.859$이었다.

5. 평가에 대한 분류기호

<표Ⅱ-3>에 제시된 평가에 따른 분류기호는 기존 연구((서종진, 2009; Seo & Kim, 2010)의 기호를 수정하여 사용하였다.

1) 평가A

유형A 문제의 평가에서는, 유형A-1과 유형A-2로 구분하여 평가하였다. 유형A(유형A-1과 유형A-2)의 문제는 풀이 결과를 중심으로 정확한 답을 구하였으면 Y로, 그렇지 않은 경우는 N으로 표시하였다. 두 유형(유형A-1과 유형A-2)에 대한 평가 결과는 평가A에서 YY, YN, NY, NN으로 구분하였다. 이 기호는 다음과 같은 의미를 가진다.

① YY: 유형A-1 문항과 유형A-2 문항의 두 문항에 대하여 모두 정답을 제시,
② YN: 유형A-1 문항은 정답을, 유형A-2 문항은 오답을 제시,
③ NY: 유형A-1 문항은 오답을 제시하고, 유형A-2 문항은 정답을 제시,
④ NN: 유형A-1 문항과 유형A-2 문항 모두 오답을 제시,

2) 평가B

유형B 문제는 일차방정식의 풀이과정을 제시하고 오류가 있는 부분을 찾아 올바르게 표현하는 문제이다. 그리고 이 문제에 제시된 풀이과정은 모두 오류를 포함하고 있다. 문제풀이 결과에 대한 기호는 Y, N, S, AS, W, NR로 표시하였다. 이 기호는 다음과 같은 의미를 가진다.

① Y: 유형B의 문제에서 오류가 있다고 체크한 경우,
② N: 유형B의 문제에서 오류가 없다고 체크한 경우,
③ S: 유형B의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하고, 제시한 이유(근거)에서 '등호(=) '의 대칭관계를 올바르게 표현한 경우
④ AS: 유형B의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하고, 제시한 이유(근거)에서 '등

호(=) '의 대칭관계를 올바르게 표현하지 못한 경우
⑤ W: 유형B의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시를 하였으나 틀린 경우,
⑥ NR: 유형B의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하지 않은 경우(반응이 없는 경우)

이러한 기호들을 사용하여 평가B에서는 평가A와 관련지어 그 기호를 YY-Y-( ), YY-N-( ), YN-Y-( ), YN-N-( ), NY-Y-( ), NY-N-( ), NN-Y-( ), NN-N-( )로 표시하였다. 괄호 '( )'안에는 S, AS, W, NR의 기호 중 하나를 사용하여 표시한다. 예를 들어 보면 다음과 같다.

① YY-Y-(S)에서 앞의 YY는 유형A-1, 유형A-2의 두 문제를 모두 해결하여 정답을 제시한 것을 의미한다. 그리고 Y-(S)에서 Y는 유형B의 문항에서 오류가 있다고 체크한 것을 의미하고, (S)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바른 경우, 즉, '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하여 이유(근거)를 올바르게 제시한 경우를 의미한다.
② YY-Y-(AS)에서 앞의 YY는 유형A-1과 유형A-2의 두 문제를 모두 해결하여 정답을 제시한 것을 의미한다. 그리고 Y-(AS)에서 Y는 유형B의 문항에서 오류가 있다고 체크한 것을 의미하고, (AS)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바르지 않은 경우, 즉, 이유(근거)를 제시할 때 '등호(=)' 의 대칭관계를 올바르게 표현하지 못한 경우이다.
③ YY-Y-(W)에서 앞의 YY는 유형A-1과 유형A-2의 두 문제를 모두 해결하여 정답을 제시한 것을 의미한다. 그리고 Y-(W)에서 Y는 유형B의 문항에서 오류가 있다고 체크한 것을 의미하고, (W)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바르지 않은 경우, 즉, 이유(근거)를 제시할 때 '등호(=)' 의 대칭과 비대칭을 구분할 수 없게 제시하였으며 제시된 이유(근거)가 올바르지 못한 경우이다.
④ YY-Y-(W)에서 앞의 YY는 유형A-1과 유형A-2의 문제를 모두 해결하여 정답을 제시한 것을 의미한다. 그리고 Y-(NR)에서 Y는 유형B의 문항에서 오류가 있다고 체크한 것을 의미하고, (NR)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하지 않은 경우, 즉, 반응이 없는 경우를 말한다.
⑤ YN-N-(S)에서 앞의 Y는 유형A-1의 문제를 해결하여 정답을 제시한 것을 의미하고, 다음 N은 유형A-2의 문제를 해결하지 못한 경우, 즉, 오답을 제시한 경우를 말한다. 그리고 N-(S)에서 N은 유형B의 문항에서 오류가 없다고 체크한 것을 의미하고, (S)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바른 경우, 즉, '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하여 이유(근거)를 올바르게 제시한 경우를 의미한다. 유형B의 문항에서 오류가 없다고 체크하고 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 경우는 드물게 나타난다.
⑥ YN-N-(AS)에서 앞의 Y는 유형A-1의 문제를 해결하여 정답을 제시한 것을 의미하고, 다음 N은 유형A-2의 문제를 해결하지 못한 경우, 즉, 오답을 제시한 경우를 말한다. 그리고 N-(AS)에서 N은 유형B의 문항에서 오류가 없다고 체크한 것을 의미하고, (AS)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바르지 않은 경우, 즉, 이유(근거)를 제시할 때 '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하지 못한 경우이다.

⑦ YN-N-(W)에서 앞의 Y는 유형A-1의 문제를 해결하여 정답을 제시한 것을 의미하고, 다음 N은 유형A-2의 문제를 해결하지 못한 경우, 즉, 오답을 제시한 경우를 말한다. 그리고 N-(W)에서 N은 유형B의 문항에서 오류가 없다고 체크한 것을 의미하고, (W)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바르지 않은 경우, 즉, 이유(근거)를 제시할 때 '등호(=)'의 대칭과 비대칭을 구분 할 수 없게 제시하였으며 제시된 이유(근거)가 올바르지 못한 경우이다

⑧ YN-N-(NS)에서 앞의 Y는 유형A-1의 문제를 해결하여 정답을 제시한 것을 의미하고, 다음 N은 유형A-2의 문제를 해결하지 못한 경우, 즉, 오답을 제시한 경우를 말한다. 그리고 N-(NR)에서 N은 유형B의 문항에서 오류가 없다고 체크한 것을 의미하고, (NR)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하지 않은 경우, 즉, 반응이 없는 경우를 말한다.

이외의 기호는 위와 같은 방법으로 의미가 해석 된다.

3) 평가C

평가C에서는 평가A와 평가B의 결과와 유형C 문항의 평가 결과를 종합적으로 평가하는 단계이다. 여기에서는 유형A와 유형B의 문항에 대한 학생들의 평가 결과와 유형C의 문항에 대한 평가 결과와 결합하여 전체적인 평가를 내리는 것을 말한다.

유형C의 문제는 등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하는 문항으로, 문제풀이 결과에 대한 기호는 R-P-S, R-T-S, R-P-AS, R-T-AS, W-P-S, W-T-S, W-P-AS, W-T-AS, R-MS, W-MS, N-O-O분류되어 있다(<표Ⅱ-2>; Seo & Kim, 2010). 이런 기호가 의미하는 것은 다음과 같다.

<표Ⅱ-2> 일차방정식 풀이과정에 나타난 반응에 대한 분류

방정식의 해	문제해결 방법	기호	기호 표시
일차방정식의 해를 구한 경우: 정답(R)	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	대칭 (S)	R-P-S
	'이항'의 절차를 사용(T)		R-T-S
	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	비대칭 (AS)	R-P-AS
	'이항'의 절차를 사용(T)		R-T-AS
일차방정식의 해를 구하지 못한 경우: 오답(W)	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	대칭 (S)	W-P-S
	'이항'의 절차를 사용(T)		W-T-S
	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	비대칭 (AS)	W-P-AS
	'이항'의 절차를 사용(T)		W-T-AS
정답(R)	대입하여 해를 구한 경우(MS)		R-MS
오답(W)	대입하여 해를 구하지 못한 경우(MS)		W-MS
무반응(N)	풀이 과정이 전혀 없는 경우(반응이 없는 경우)(OO)		N-O-O

일차방정식의 정답을 올바르게 구하였으면 'R', 그렇지 못한 경우는 'W'의 기호로 표시된다. 그리고 일차방정식 풀이 과정에서 '등식의 성질'의 절차를 사용한 경우는 'P', '이항'의 절차를 사용한 경우는 'T'의 기호가 사용되었다. 그 다음으로, 일차방정식 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현하였으면 'S'로, 그렇지 않으면 'AS'의 기호가 사용되었다. 대입하

여 방정식의 해를 구한 경우는 'R-MS'로, 대입하였지만 방정식의 해를 구하지 못하였을 때에는'W-MS'의 기호가 사용되었다. 그리고 문제에 대하여 전혀 반응이 없는 경우는 'N-O-O'의 기호가 사용되었다. 문항별 평가(<표Ⅱ-3>)에서 기호 YY-Y-( )-( ), YY-N-( )-( ), YN-Y-( )-( ), YN-N-( )-( ), NY-Y-( )-( ), NY-N-( )-( ), NN-Y-( )-( ), NN-N-( )-( )에 대하여 예를 들어 설명한다.

① YY-Y-(S)-(R-P-S)에서 앞의 YY는 유형A-1, 유형A-2의 두 문제를 모두 해결하여 정답을 제시한 것을 의미한다. 그리고 Y-(S)에서 Y는 유형B의 문항에서 오류가 있다고 체크한 것을 의미하고, (S)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바른 경우, 즉, '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하여 이유(근거)를 올바르게 제시한 경우를 의미한다. '(R-P-S)'에서, R은 일차방정식의 정답을 올바르게 구한 것을 의미하고, P는 '등식의 성질'의 절차를 사용하여 해결하였음을 의미, S는 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현한 것을 말한다. 즉, 문제를 해결하는 과정에서 '등식의 성질'의 절차를 사용하고 대칭 관계를 올바르게 잘 표현하였으며, 방정식의 해를 올바르게 구한 것을 의미한다.

② YY-N-(AS)-(W-T-AS)에서 첫 번째 Y와 두 번째 Y는 각각 유형A-1, 유형 A-2의 문제를 해결하여 정답을 제시한 것을 의미하고, 다음 N은 유형B의 문제를 해결하지 못한 경우, 즉, 오답을 제시한 경우를 말한다. 그리고 N-(AS)에서 (AS)는 유형B의 문항에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시한 것이 올바르지 않은 경우, 즉, 이유(근거)를 제시할 때 '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하지 못한 것을 의미한다. (W-T-AS)에서, W는 일차방정식의 정답을 구하지 못한 것을 의미하고, T는 '이항'의 절차를 사용하여 해결하였음을 의미, AS는 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현하지 못하였음을 뜻한다. 즉, '이항'의 절차를 사용하여 문제를 해결하여 정답을 구하였으나 '등호(=)'의 대칭 관계를 올바르게 표현하지 못한 것을 나타낸다.

이외 기호는 위와 같은 방법으로 해석하고 그 의미를 가진다.

<표Ⅱ-3> 평가 분류기호

<table>
<tr><th>문제</th><th>유형
A-1</th><th>유형A-2</th><th>평가
A</th><th colspan="2">유형B
(오류
문제)</th><th>평가B</th><th>유형A-1↔유형A-2
↓
유형B
↓
유형C(평가C)</th><th>문항별 평가</th><th>학습
지도</th></tr>
<tr><td rowspan="12">분
류
유
형</td><td rowspan="8">Y</td><td rowspan="8">Y</td><td rowspan="8">YY</td><td rowspan="4">Y</td><td>S</td><td rowspan="4">YY-Y-( )</td><td rowspan="8">R-P-S
R-T-S
R-P-AS
R-T-AS
W-P-S
W-T-S
W-P-AS
W-T-AS
R-MS</td><td>YY-Y-( )-( )</td><td rowspan="12">종
합
평
가</td></tr>
<tr><td>AS</td></tr>
<tr><td>W</td></tr>
<tr><td>NG</td></tr>
<tr><td rowspan="4">N</td><td>S</td><td rowspan="4">YY-N-( )</td><td>YY-N-( )-( )</td></tr>
<tr><td>AS</td></tr>
<tr><td>W</td></tr>
<tr><td>NG</td></tr>
<tr><td rowspan="4">N</td><td rowspan="4">YN</td><td rowspan="3">Y</td><td>S</td><td rowspan="3">YN-Y-( )</td><td rowspan="3">YN-Y-( )-( )</td></tr>
<tr><td>AS</td></tr>
<tr><td>W</td></tr>
</table>

					NG				
				N	S	YN-N-( )	W-MS N-O-O	YN-N-( )-( )	
					AS				
					W				
					NG				
	N	Y	NY	Y	S	NY-Y-( )		NY-Y-( )-( )	
					AS				
					W				
					NG				
				N	S	NY-N-( )		NY-N-( )-( )	
					AS				
					W				
					NG				
		N	NN	Y	S	NN-Y-( )		NN-Y-( )-( )	
					AS				
					W				
					NG				
				N	S	NN-N-( )		NN-N-( )-( )	
					AS				
					W				
					NG				

Ⅲ. 자료 분석 결과

유형A(유형A-1, 유형A-2)는 풀이 결과를 중심으로 정확한 답을 구하였는지, 그렇지 않았는지를 측정하였다. 유형B는 풀이과정에 오류가 있도록 구성된 문제이다. 이들 문제의 평가는 '오류를 찾을 수 있는지', '그렇지 않은지'로 구분하여 오류가 있는 부분을 올바르게 표현하였는지 측정하였다. 유형C의 문제는 등식의 성질을 이용하여 해결하도록 한 문제이다. 이들 문제에 대한 평가는 등호의 대칭성에 대하여 '잘 표현하였는지', '그렇지 못하였는지'에 대하여 측정하였다.

분석은 유형A-1 → 유형A-2 → 유형B → 유형C의 단계를 거쳐 분석 하였다. 분석에서는 SPSS17.0을 사용하여 빈도분석과 McNemar검정을 하였으며, 유형별에 따른 평가분류 기호를 사용하였다.

1. 기초적인 자료 분석

연구 대상은 1학년 142명으로, 남학생이 72명 여학생이 70명 이었다.

<표Ⅲ-1> 조사 대상 학생 수

조사대상	성별	인원수	퍼센트	합계(인원수)
1학년	남	72	50.7	142
	여	70	49.3	

2. 유형A 문항에 대한 분석

유형A-1 문항은 좌변에 x가 놓여 있는 일차방정식이고 유형A-2 문항은 우변에 x가 놓여 있는 일차방정식이다. 이들 문항에 대한 분석은 정답과 오답의 두 가지 기준으로 평가하였다.

유형A 문항(유형A-1, 유형A-2)에 대한 평가에서 두 가지 판단(정답, 오답)에 의한 평가를 한 것은, 풀이과정을 제시하지 않고 일차방정식의 해만 제시하였을 경우에 풀이과정을 어느 정도 알고 해결하였는지 평가하기 어렵기 때문이다. 그리고 몇 문항의 풀이과정에 대한 평가로 문제해결이나 개념의 이해를 측정한다는 것은 어려움이 따른다.

1) 유형A-1, 유형A-2 문항에 대한 반응

유형A-1의 세 문항($x+4=9$, $3x+2=17$, $4(x+2)=20$)에 대한 학생들의 반응에서 약 90.8%에서 약 83.8% 정도의 학생들이 방정식의 해를 구한 것으로 나타났다. 이들 세 문항에 대한 결과와는 다르게 유형A-1의 문항 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$에 대한 해를 구한 학생들은 55.7%로 나타나 분수가 포함된 일차방정식을 어려워함을 보이고 있다(<표Ⅲ-2-1>). 그리고 유형A-2에서도 유형A-1과 유사하게 분수가 포함된 일차방정식에 대한 정답률이 저조하게 나타났다(<표Ⅲ-2-2>).

이들 문항에 대한 분석은 8문항 자체 평가에 대한 의미보다는 유형B와 유형C의 측정 결과와 종합하여 평가하고, 종합 평가결과에 대한 판단의 근거가 되는 최소 문항에 대한 평가의 결과로 사용된다.

<표Ⅲ-2-1> 유형A-1 문항에 대한 반응

일차방정식	반응		합계(%)
	정답(%)	오답(%)	
$x+4=9$	129(90.8)	13(9.2)	142(100)
$3x+2=17$	119(83.8)	23(16.2)	142(100)
$4(x+2)=20$	119(83.8)	23(16.2)	142(100)
$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	82(57.7)	60(42.3)	142(100)

<표Ⅲ-2-2> 유형A-2 문항에 대한 반응

일차방정식	반응		합계(%)
	정답(%)	오답(%)	
$12=3+x$	104(73.2)	38(26.8)	142(100)
$14=4x+3$	78(54.9)	64(45.1)	142(100)
$15=3(x+2)$	86(60.6)	56(39.4)	142(100)
$\frac{1}{3}=x+\frac{1}{4}$	58(40.8)	84(59.2)	142(100)

<표Ⅲ-2-1>과 <표Ⅲ-2-2>를 보면 학생들의 반응에 차이가 있음을 알 수 있다. McNemar 검정을 실시하여 문제 유형간의 정답 비율을 조사한 결과, 일차방정식 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 과 $14=4x+3$, 일차방정식 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 과 $15=3(x+2)$의 정답 비율에 대한 차이가 없는 것으로 나타났다. 그러나 그 외 문항에서는, 우변에 변수가 있는 문항보다 좌변에 변수가 있는 문항에 대한 정답률이 높음을 알 수 있다(<표Ⅲ-3>).

<표Ⅲ-3> 유형A-1과 유형A-2의 문항의 정답 비율에 대한 검정

문제 유형	$12=3+x$	$14=4x+3$	$15=3(x+2)$	$\frac{1}{3}=x+\frac{1}{4}$
$x+4=9$	.000[a]	.000[a]	.000[a]	.000[a]
$3x+2=17$	.011[a]	.000[a]	.000[a]	.000[a]
$4(x+2)=20$	.011[a]	.000[a]	.000[a]	.000[a]
$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	.001[a]	.636[a]	.672[a]	.001[a]
McNemar 검정	정확한 유의확률 (양측검정)			
유효 케이스 수	142			

3. 유형B 문항에 대한 분석

유형B는 풀이과정을 제시하고, 제시된 풀이과정은 오류가 있도록 구성하였다. 즉, 풀이과정에서의 오류가 '있는지', '없는지' 먼저 선택한 다음, 이유(근거)를 제시하는 문항으로 구성하였다.

학생들의 반응에서는 '오류가 없다'를 선택하고 이유(근거)를 제시한 경우가 있었다. 그러므로 평가B에서는 이러한 점을 고려하여 '오류가 없다(N)'을 선택하고 이유(근거)를 올바르게 제시한 경우는 올바른 표현을 한 것으로 평가하였다.

1) 유형B의 문항 $x+4=9$에 대한 학생들의 반응에서, 오류가 있으며 그 이유(근거)를 올바르게 제시(Y-S)한 학생들은 매우 낮게(9.2%) 나타났다. 반면 오류가 없다(N-NG)는 반응은 86.6%(123명)로 나타나 대부분의 학생들이 일차방정식의 풀이과정에서 '등호(=) '의 대칭을 거의 고려하지 않은 채 방정식을 해결하는 것으로 해석이 된다(<표Ⅲ-4>).

2) 유형B의 $3x+2=17$에 대한 학생들의 반응에서는, 풀이과정에 오류가 있으며 오류를 올바르게 제시(Y-S)한 학생들이 52.1%(74명)로 나타나 유형B의 $x+4=9$(9.2%, 13명)과는 많은 차이를 보이고 있다(<표Ⅲ-4>). 이러한 결과는, 문제에서 제시된 일차방정식의 풀이과정과 관련성을 지어볼 수 있다. 유형B의 문항$x+4=9$에서는 일차방식의 해가 올바르게 제시되어 있으면서 풀이과정에 오류가 있는 경우이고, 유형B의 문항 $3x+2=17$은 일차방정식의 해와 풀이과정에 모두 오류가 있는 문항으로 되어 있었기 때문이라 볼 수 있다. 즉, 일차방정식의 기본문제에서 문제 자체의 난이도의 차이에 관계없이 제시된 풀이과정의 유형에 따라 학생들의 반응이 달라질 수 있다는 것이다.

3) 유형B의 문항 $4(x+2)=20$에서 오류가 없으며 근거를 제시하지 않은(N-NG) 학생들은 87.3%(124명)로 나타났다(<표Ⅲ-4>). 이러한 반응은 방정식의 풀이과정에 한 부분만 오

류가 있도록 구성하였기 때문에 학생들이 풀이과정을 유심히 보지 않으면 마치 오류가 없는 것처럼 볼일 수 있는 문제로 구성이 되었기 때문이다. 만약 $4(x+2)=20$의 풀이과정에 유형B의 문항 $x+4=9$과 유형B의 문항 $3x+2=17$의 풀이과정을 조합하여 구성한다면 그 반응이 달라질 수 있다는 것이다. 그러므로 어떤 개념을 학생이 이해하고 있는가를 알기 위해서는 여러 가지로 고려할 수 있으며, 다양한 문제 유형과 다양한 평가 방법이 필요하다는 것이다.

4) 유형B의 문항 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$에 대한 학생들의 반응에서 '오류가 있다'는 반응이 88.1%(125명)로 나타났다. 그러나 '오류가 있다'는 반응을 보이면서 '등호(=)의 대칭'과 관련하여 올바르게 제시한 학생들이 26.8%(38명)에 불과하였다는 것이다(<표Ⅲ-4>).

유형B의 문항 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$에 대한 결과가 일차방정식 문제 $x+4=9$와 $3x+2=17$보다 Y-S 빈도가 높게 나타나고 있다. 이러한 결과는, 학생들이 문제풀이 과정보다는 결과에 집중하고 있음을 보여주는 것이다.

<표Ⅲ-4> 유형B에 대한 반응

문항	반응 유형								합계
	Y-S	Y-AS	Y-W	Y-NG	N-S	N-AS	N-W	N-NG	
$x+4=9$	13(9.2)	1(0.7)	0(0)	1(0.7)	2(1.4)	0(0)	2(1.4)	123(86.6)	142(100)
$3x+2=17$	74(52.1)	25(17.6)	14(9.9)	4(2.8)	0(0)	9(6.3)	0(0)	16(11.3)	142(100)
$4(x+2)=20$	6(4.2)	0(0)	3(2.1)	0(0)	8(5.7)	0(0)	1(0.7)	124(87.3)	142(100)
$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	38(26.8)	44(31)	38(26.8)	5(3.5)	0(0)	0(0)	2(1.3)	15(10.6)	142(100)

4. 유형C 문항에 대한 분석

유형C에 대한 평가는, 등식의 성질의 절차를 사용하여 일차방정식의 풀이과정을 올바르게 표현하면서 방정식의 해를 구하였는지를 판단하고 유형A와 유형B의 문제풀이 결과와 종합적인 평가를 하기 위한 평가 절차로 사용되었다.

1) 유형C의 문항 $x+3=8$에 대한 반응

등식의 성질의 절차를 이용하여 일차방정식을 해결하고 풀이과정에서 대칭과 관련하여 올바르게 표현하고 방정식의 해를 올바르게 구한(R-P-S) 학생들은 15.5%(22명), 이항의 절차를 사용하여 일차방정식을 해결하고 풀이과정에서 대칭과 관련하여 올바르게 표현하고 방정식의 해를 올바르게 구한 학생들은 40.8%(58)로 나타났다(<표Ⅲ-5>). 두 반응의 결과로 볼 때, 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결할 수 있는 학생들이 아주 적다는 것을 나타낸다.

2) 유형C의 문항 $3x+4=17$에 대한 반응

문항 $3x+4=17$을 해결할 때 이항과 등식의 성질의 절차를 모두 사용하였거나 등식의 성질의 절차만을 사용한 경우는 R-P-S로 분류하였다. 이 문항에 대한 반응은 유형C의 문항 $x+3=8$의 결과와 유사하게 나타났다(<표Ⅲ-5>).

3) 유형C의 문항 $5(x+2)=20$에 대한 반응

문항 $5(x+2)=20$의 풀이 과정에 대한 평가는 문항 $x+3=8$(유형C)에서의 평가방법을 사용하였다. 이 문항을 해결할 때에, 5를 이항하여 20을 5로 나눗셈 한 다음 $x+2=4$을 해결할 때에 등식의 성질의 절차를 사용한 경우, 양변을 5로 나눗셈한 다음 $x+2=4$을 해결할 때에 이항의 절차를 사용한 경우, 문제풀이 과정에서 등식의 성질의 절차만을 사용한 경우가 있었다. 이러한 방법으로 해결한 학생들은 R-P-S로 평가하였다. 결과에 대한 빈도는 앞의 결과(유형C의 문항 $x+3=8$와 $3x+4=17$)와 비슷하게 나타났다(<표Ⅲ-5>).

4) 유형C의 문항 $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$에 대한 반응

유형C의 문항 $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$에 대한 문제풀이 과정에서, $\frac{1}{2}$을 양변에 뺄셈을 하여 해결한 경우, $\frac{1}{10}$로 통분하여 등식의 성질을 사용한 경우, 양변에 $\frac{1}{10}$을 곱한 다음 이항의 절차를 사용한 경우는 R-P-S로 평가 하였다. 이 문항에서도 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결한 학생들의 반응은 앞의 결과(유형C의 문항 $x+3=8$와 $3x+4=17$ 그리고 $5(x+2)=20$)와 유사하게 나타났다(<표Ⅲ-5>). 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생들이 앞의 결과(유형C의 문항 $x+3=8$와 $3x+4=17$ 그리고 $5(x+2)=20$에 대한 결과) 보다 낮게 나타난 것은 앞의 결과(<표Ⅲ-2-1>)에서 볼 수 있듯이 분수를 계산하는 과정이 포함되어 있기 때문이라 분석된다.

<표Ⅲ-5> 유형C에 대한 반응

문제 \ 반응	R-P-S	R-P-AS	R-T-S	R-T-AS	W-P-S	W-P-AS	W-T-AS	W-T-S	W-MS	R-MS	N-O-O	합계
$x+3=8$	22 (15.5)	4 (2.8)	58 (40.8)	3 (2.1)	1 (0.7)	2 (1.4)	2 (1.4)	2 (1.4)	5 (3.5)	16 (11.3)	27 (19)	142 (100)
$3x+4=17$	23 (16.2)	2 (1.4)	49 (34.5)	4 (2.8)	2 (1.4)	1 (0.7)	16 (11.3)	4 (2.8)	12 (8.5)	1 (0.7)	28 ()19.7	142 (100)
$5(x+2)=20$	18 (12.7)	2 (1.4)	61 (43)	4 (2.8)	0 (0)	1 (0.7)	9 (6.3)	1 (0.7)	10 (7)	6 (4.2)	30 (21.1)	142 (100)
$x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$	22 (15.5)	3 (2.1)	36 (25.5)	3 (2.1)	9 (6.3)	5 (3.5)	9 (6.3)	3 (2.1)	7 (4.9)	1 (0.7)	44 (31)	142 (100)

유형C의 문항에 대한 평가에서 R-P-S의 빈도가 낮게 나타난 것은, 일차방정식의 기본 문제해결에 대한 학생들의 학습 상황을 나타내는 것으로, 관심 있게 보아야 할 부분이다. 즉, 이 유형에서 등식의 성질 보다는 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생이 많이 나타난 것(R-T-S)과 R-P-S를 함께 고려하여 수학 학습 지도가 이루어져야 한다는 것이다.

5. 유형A와 유형B 그리고 유형C 문항을 고려한 평가와 수학 학습 지도

여기에서는 평가A, 평가B, 평가C의 세 가지 평가 결과에 대한 표를 구성하였다. 각 문항별 평가와 문제 유형별 평가 그리고 각 문항별 평가와 유형별 평가를 고려한 종합적인 평가

표이다. 이러한 평가표는 학생 개개인의 현재의 학습 상황을 어느 정도 세밀하게 파악할 수 있고. 이러한 평가표를 통하여 학생들 개개인의 학습지도와 전체학생의 학습지도를 계획할 수 있고, 학생들의 학습에 도움을 줄 수 있다. 다음은 실제 조사한 학생A와 학생B의 개인 평가표의 예이다(<표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-8>). 이 평가표에 대한 설명과 평가를 통한 수학 학습 지도에 관한 설명은 다음과 같다.

1) 학생A의 평가표에 대한 설명과 수학 학습 지도

○ 유형별 평가

학생A는 좌변에 변수 x가 있는 문항과 우변에 변수 x가 있는 문항을 모두 해결하여 유형별 평가A(유형A-1, 유형A-2)에서 각각 Y:4, Y:4의 기호로 분류 하였다. 그리고 일차방정식의 풀이과정을 제시하고 오류를 찾는 문항에서는 세 문항($12=3+x$, $3x+2=17$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$)을 해결하였으므로 유형별 평가B에서 Y-(S): 3으로 분류되고, 1개 문항($4(x+2)=20$)에서는 오류를 찾지 못하고 이유(근거)를 제시하지 않았으므로 N-(NG): 1로 분류되었다. 등식의 성질을 이용하여 해결하는 문항에서는, 4개 문항을 모두 이항을 사용하여 해를 구하고 풀이과정에서 등호 관계를 올바르게 표현하여 (R-T-S)로 분류되었다.

<표Ⅲ-6> 학생A의 개인 평가표

항 목		평가A		평가B	평가C	문항별 평가
		변수: 좌변	변수: 우변			
각 문항별 평가	VR	$x+4=9$	$12=3+x$	$x+4=9$	$x+3=8$	YY-Y-(S)
		Y	Y	Y-(S)	(R-T-S)	-(R-T-S)
	VL	$14=4x+3$	$3x+2=17$	$3x+2=17$	$3x+4=17$	YY-Y-(S)
		Y	Y	YY-(S)	(R-T-S)	-(R-T-S)
	D	$4(x+2)=20$	$15=3(x+2)$	$4(x+2)=20$	$5(x+2)=20$	YY-N-(NG)
		Y	Y	N-(NG)	(R-T-S)	-(R-T-S)
	F	$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}=x+\frac{1}{4}$	$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	$x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$	YY-Y-(S)
		Y	Y	Y-(S)	(R-T-S)	-(R-T-S)
유형별 평가		Y: 4	Y: 4	Y-(S): 3 N-(NG): 1	(R-T-S): 4	
종합 평가		우변과 좌변에 변수가 있는 일차방정식 모두 해결, 등식의 성질의 절차를 사용하여 일차방정식을 해결 하지 못함, 대칭성 이해 부족(등호 관계 교정 필요)				

○ 문항별 평가

학생A는 VR, VL, F문항에 대한 평가에서 YY-Y-(S)-(R-T-S), D문항에서 YY-N-(NG)-(R-T-S)의 기호로 분류되었다. 이 학생은 문제풀이 방법에 대한 제시가 없는 문항을 모두 해결하였고 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결하라는 문항에서 모두 이항의 절차를 사용하여 해결하였다. 이러한 문항에 대한 풀이과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현하였

으므로 일차방정식의 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 표현할 수 '있는지', '없는지'를 판단하기에 어려움이 따른다. 그러므로 평가표(<표Ⅲ-6>)에서 평가B를 보면 이를 판단할 수 있다. 평가표(<표Ⅲ-6>)에서 평가 기호가 (S)나 (NG)로 나타나 일차방정식의 풀이 과정에서 등호 관계를 올바르게 표현 할 수 있다고 판단할 수 없다. 즉, 이 학생은 등호 관계에 대한 이해가 부족한 것으로 판정한다.

○ 종합 평가

유형별 평가와 문항별평가를 종합하여 볼 때, 학생A는 우변이나 좌변에 변수가 있는 일차방정식의 올바른 해를 이항의 절차를 사용하여 해결할 수 있으나 풀이과정에서 등호의 대칭성에 대한 이해가 부족하다.

○ 평가를 통한 학습 지도

학생A는 좌변이나 우변에 변수x가 있는 일차방정식의 해를 구하였지만 풀이과정에서의 오류를 범하고 있다. 이러한 오류는 일차방정식에 대한 이해의 부족에서 일어나는 것으로 등식, 항등식, 일차방정식, 이항, 등식의 성질 등의 개념을 이해할 수 있는 수학 학습 지도가 이루어져야 할 것이다. 학습 지도에서는 예제 문제를 통하여 풀이과정에서의 정교한 표현을 할 수 있고, 일차방정식의 풀이 과정에서 대칭 관계를 스스로 이해할 수 있도록 피드백 학습을 실시하여 지도한다. 중학교 2학년 과정의 수와 연산, 문자와 식, 함수 영역을 지도하는 과정에서 평가를 계속적으로 실시하고 단시일 내에 교정이 이루어지기를 기대하는 것보다 장기적인 안목에서 개념적 이해를 통한 학습이 이루어지도록 수학 학습 지도가 이루어져야 할 것이다. 이러한 지도는 1학년 과정과 2학년 과정의 연계적인 측면을 고려한 평가와 개인 평가표의 작성과 분석을 통하여 계획적으로 이루어져야 한다.

2) 학생B의 평가표에 대한 설명과 수학 학습 지도

○ 유형별 평가

학생B는 좌변에 변수 x가 있는 문항과 우변에 변수 x가 있는 문항을 모두 해결하여 유형별 평가A(유형A-1, 유형A-2)에서 각각 Y:4, Y:4의 기호로 분류하였다. 그리고 일차방정식의 풀이과정을 제시하고 오류를 찾는 문항에서는, 두 문항($12=3+x$, $4(x+2)=20$)을 해결하였지만 풀이과정에서의 오류가 있다는 이유(근거)를 제시하는 과정에서 대칭 관계를 올바르게 표현하지 못하였으므로 유형별 평가B에서 Y-(AS):2로 분류하고, 두 개 문항($3x+2=17$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$)에서는 오류를 찾지 못하고 이유(근거)를 제시하지 않았으므로 N-(NG):2로 분류되었다. 등식의 성질을 이용하여 해결하는 문항에서는, 2개 문항은 등식의 성질의 절차를 사용하여 해를 구하고 풀이과정에서 등호 관계를 올바르게 표현하여 R-P-S;2의 기호로 분류하였다. 그리고 2개 문항은 등식의 성질의 절차를 사용하였지만 올바른 해를 구하지 못하고, 풀이과정에서 등호 관계를 올바르게 표현한 경우 W-P-AS:1과 등호 관계를 올바르게 표현하지 못한 경우 W-P-AS:1의 기호로 분류되었다(<표Ⅲ-8>). 이러한 평가표에 따르면, 학생A와는 달리 학생B는 등식의 성질을 어느 정도는 알고 있는 것으로 해석된다.

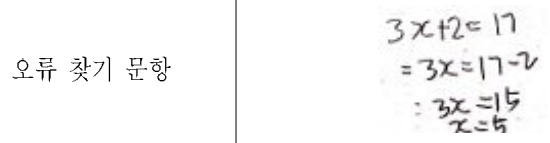
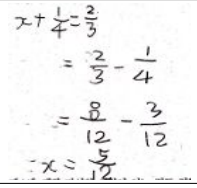
<표Ⅲ-7>은 오류 찾기 문항(유형B)에 대한 학생B의 반응이다. 이 학생은 $3x+2=17$의

풀이 과정에서 이항의 절차를 사용하여 해결하였지만 등호(=) 관계를 올바르지 못하게 표현하고 있다. 또한, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$의 풀이 과정에서도 오류를 범하고 있다. $3x+2=17$(<표Ⅲ-7>)에서 오류를 범하고 있는 것은 유형B의 문항 $4(x+2)=20$의 풀이과정에서(<표Ⅲ-2-1>, <표Ⅲ-7>, 아래 풀이 참조)의 오류를 찾지 못하여 평가B에서 N-NG의 기호로 분류된 것과 관련성이 있다고 분석된다.

다음은 <표Ⅲ-2-1>에서 문항$4(x+2)=20$의 풀이과정으로 제시된 것이다.

$$4(x+2)=20$$
$$4x+8=20$$
$$=4x=20-8$$
$$4x=12$$
$$x=3$$

<표Ⅲ-7> 오류 찾기 문항에 대한 학생B의 반응

문 항	$3x+2=17$	$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$
오류 찾기 문항		

○ 문항별 평가

학생B는 VR, VL, D, F의 문항별 평가에서 각각 다르게 평가되어 YY-N-(NG)-(R-P-S), YY-Y-(S)-(R -P-S), YY-N-(NG)-(W-P-AS), YY-Y-(S)-(W-P-S)의 기호로 분류되었다.

○ 종합 평가

학생B는 우변이나 좌변에 변수가 있는 일차방정식의 올바른 해를 이항의 절차를 사용하여 해결할 수 있는 것으로 분석된다. 이 학생은 등식의 성질을 알고 있으나 풀이과정에서 오류를 범하고 있다. 그리고 풀이과정에서 등호의 대칭성에 대한 이해가 부족하다.

○ 평가를 통한 학습 지도

학생B는 일차방정식의 해를 이항의 절차를 이용하여 구할 수 있고, 등식의 성질 절차를 사용하여 일차방정식을 어느 정도 해결 하였다. 그러나 풀이과정에서의 오류를 범하고 있다. 이 학생은 등식의 절차를 사용하여 해결하는 과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현할 수 있는 훈련이 필요하다. 그리고 용어에 대한 정확한 이해와 더불어 여러 가지 문제 유형을 해결하도록 하고 풀이과정에서 정교한 표현을 할 수 있도록 지도가 이루어져야 할 것이다. 개인 평가표를 기초로 피드백을 통한 개별 학습 방법을 사용하여 스스로 개념을 이해하고 해결할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 하여야 할 것이다.

<표Ⅲ-8> 학생B의 개인 평가표

항 목		평가A		평가B	평가C	문항별 평가
		변수: 좌변	변수: 우변			
각 문항별 평가	VR	$x+4=9$	$12=3+x$	$12=3+x$	$x+3=8$	YY-N-(NG) -(R-P-S)
		Y	Y	N-(NG)	(R-P-S)	
	VL	$14=4x+3$	$3x+2=17$	$3x+2=17$	$3x+4=17$	YY-Y-(S) -(R-P-S)
		Y	Y	Y-(AS)	(R-P-S)	
	D	$4(x+2)=20$	$15=3(x+2)$	$4(x+2)=20$	$5(x+2)=20$	YY-N-(NG) -(W-P-AS)
		Y	Y	N-(NG)	(W-P-AS)	
	F	$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}=x+\frac{1}{4}$	$x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	$x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$	YY-Y-(S) (W-P-S)
		Y	Y	Y-(AS)	(W-P-S)	
유형별 평가		Y: 4	Y: 4	Y-(AS): 2 N-(NG): 2	(R-P-S): 2 (W-P-S):1 (W-P-AS):1	
종합 평가		우변과 좌변의 변수가 있는 일차방정식 모두 해결, 등식의 성질의 절차를 사용하여 일차방정식을 해결 구할 수 있으나 계산과정에 오류를 범함, 대칭성 이해 부족(등호 관계 교정 필요)				

Ⅳ. 결론

본 논문에서는 문제 유형의 평가 결과에 초점을 둔 것이 아니라 '평가 결과를 어떻게 활용하는가?'에 있다. 학생들이 일차방정식을 해결하는 과정에서 오류를 범하지 않고 올바른 표현 방법으로 풀이과정을 전개할 수 있고 이를 통하여 이해가 부족했던 부분에 대하여 스스로 올바른 이해를 하도록 하기 위한 방법적인 면에서의 평가에 주안점을 두고 있다. 이러한 관점에서, 학생들의 문제 해결에 대한 전체 학생의 학습 상황을 파악하고, 학생 개개인의 학습 상황을 파악할 수 있는 평가표를 구성하여 개별적인 수학 학습 지도 방안을 찾고자 하였다. 연구의 결과를 종합하면 다음과 같다.

일차방정식에 대한 학생들의 풀이과정을 분석한 결과, 방정식에 대한 이해가 부족하고 풀이과정에서 표현력이 부족한 것으로 나타났다. 특히, 풀이과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현하지 못하는 학생들이 많이 나타났다. 이러한 등호에 대한 잘못된 이해는 대학에 이르기까지 계속되어지며, 교수학적 단절이 발생할 수 있다는 것이다(Kieran, 1981; Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996; Mevarech & Yitschak , 1983 :Kieran, 1992). 그러므로 학생 개개인의 평가를 통한 교정이 이루어져 차후 학습에 어려움을 겪지 않도록 도움을 주어야 할 것이다. 학습에 도움을 주기위한 하나의 방법으로, 논문에서는 일차방정식의 문제 유형과 문항별에 따른 학생들의 풀이과정을 분석하여 유형별 평가와 문항별 평가를 통한 평가표를 구성하였다. 유형별 평가는 비슷한 유형의 문제를 어느 정도 해결할 수 있는가를 측정할 수 있고, 문항별 평가는 유형이 다른 문제를 어느 정도 해결할 수 있는가를 측정할 수 있다. 이 두 가지 평가는 문제의 답을 '구하였는지', '그렇지 못하였는지'를 판단할 수 있으며, 풀이과정에서 어떠한 오류를 범하고 있는지를 알 수 있다. 그리고 이 두 평가를 기초로 종합평가

를 하여 학생들의 학습상황을 자세하게 평가할 수 있으며, 오류를 교정할 수 있는 정보를 제공받을 수 있다.

이 평가표를 토대로 종합평가를 통하여 오류를 범하고 있는 부분을 교정하기 위한 수학 학습 지도에 대한 예를 살펴보기로 하자.

학생A는 변수 x가 좌변에 있는 문항(유형A의 4문항)과 우변에 있는 문항(유형B의 4문항) 모두 해결하였다. 그리고 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결하는 문항(유형C)에서 모두 이항의 절차를 사용하여 일차방정식의 해를 구하였고 등호(=) 관계를 올바르게 표현 하였다. 유형A와 유형C에 대한 평가 결과에서 학생A는 등호 처리를 올바르게 한 것으로 평가되지만, 유형B의 문항에 대한 평가 결과에서 등호의 대칭 관계에 대한 오류를 찾지 못한 것으로 평가되었다. 하나의 유형에 대한 평가 결과에 따라 일차방정식의 문제를 해결할 수 있고 개념이해가 되었다고 판단하기 어렵다는 것이다. 즉, 유형별 평가와 문항별 평가를 기초로 종합평가를 통한 평가가 필요하고 이를 토대로 수학 학습 지도가 이루어져야 한다는 것이다.

학생B는 같은 유형의 문제에서 똑 같은 오류를 범하고 있다. 유형B의 문항 $4(x+2)=20$의 풀이과정에서 세 번째 줄에서 오류가 있지만(<표Ⅲ-2-1>), 그 오류를 찾지 못하였다. 그리고 유형B의 문항 $3x+2=17$을 해결하는 과정에서 같은 오류를 범하고 있다. 유형B의 문항 $4(x+2)=20$의 세 번째 풀이 과정에서 등호에 대한 오류가 있었으므로 학생B의 판단이 실수라고 볼 수 있지만, $3x+2=17$을 해결하는 과정에서 $4(x+2)=20$에서의 오류와 같은 오류를 범하고 있는 것으로 보아 등호에 대한 이해 부족에 대한 현상이라 평가 된다. 이러한 결과는, 학생들의 수학 학습 상황을 파악을 하기 위하여 최소한의 문제 풀이에 대한 평가 결과로 파악할 수 있음을 의미한다. 이것은 최소한의 시간과 최소한의 노력으로 최대의 학습 효과를 올리기 위한 방법은 여러 가지 있음을 시사한다.

일차방정식의 풀이과정에 대한 평가 결과 따르면, 방정식, 등식, 항등식, 일차방정식 등 용어의 정확한 이해와 더불어 일차방정식 문제를 등식의 절차를 사용하여 해결하는 과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현할 수 있도록 지도가 이루어져야 한다는 것이다. 그리고 여러 가지 일차방정식 유형에 대한 훈련을 통하여 방정식의 해를 여러 가지 방법으로 해결할 수 있는 능력을 기르고, 개인 평가표를 기초로 스스로 개념을 이해하고 문제를 해결할 수 있도록 피드백 학습을 통한 개별지도가 필요하다는 것이다.

현재의 학습 상황은 학생들 개개인마다 다양하게 나타나므로 서로 다른 수준의 학생들에게 맞는 정보를 제공하고 문제해결 활동에서 흥미를 가질 수 있는 교수·학습 환경을 다양화할 필요성이 있다. 그리고 학생 개개인의 사고를 자극하여 만족스러운 활동이 일어날 수 있는 학습 상황을 제공하고, 학생 스스로 자신의 수준을 파악할 수 있는 학습 경험을 제공해 주어야 한다. 이러한 것을 실행하기 위한 여러 방안이 있을 것이다. 본 논문에서 구성한 학생들 개개인의 평가표를 기초로 유형별 평가와 문항별 평가를 통한 종합 평가 결과의 활용은 하나의 방안이 될 것이다. 논문에서의 결과는 학생들의 반응에 대한 분석을 통하여 나온 결과로 차후 연구에서 실제 수업을 통한 교정의 결과와 학생 스스로 흥미 있게 활동할 수 있는 수업방안에 대한 연구가 진행되고 있다.

참고문헌

고상숙 · 김 숙 (2003).학교 현장에서 활용 가능한 수학과 수행평가 도구 개발. 한국수학교육학회지시리즈 E(수학교육논문집) 제15집, 201-206.

교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정해설(Ⅲ): 수학 · 과학 · 기술 · 가정.

김민경 (2006). 수학과 수행평가 문항 및 분석기준 개발 연구. 수학교육, 한국수학교육학회지시리즈 A, 제45권 제1호 통권 제112호,1-24.

김민주 · 강윤수 (2007). 중학생들의 수학과 평가 결과의 파지 유형 분석. 한국수학교육학회지시리즈 E(수학교육논문집), 제21집 제2호(통권30호), pp.331-345.

노선숙 · 김민경 · ,조성민 · 백해진 (2008). 중학교 1학년 수학과 서술형 평가문항 개발 연구. 한국수학교육학회,47권 4호.487-503.

서종진 (2009). 일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구: 중학교 1학년과 3학년을 중심으로. 한국학교수학회논문집, 12권 3호, 267-289.

최승현 · 황혜정 (2007). 수학 수업평가 기준 개발에 관한 기초 연구 학교수학. 대한수학교육학회지, 제9권 제3호 , pp.327-352.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra, Educational Studies in Mathematics, 27(1), pp.59-78

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations, Educational Studies in Mathematics, 30(1), pp.39-65.

J. J. Seo, & T. Kim,(2010). The Study on "Reaction Classification Tables" and Database to aid the Learning of Mathematics. 20(2), Advan. Stud. Contemp. Math. 20(2), pp.213-245.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol, Educational Studies in Mathematics, 12(3), pp.317-26.

Kieran. C. (1992). The learning and teaching of school Algebra(Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning): In B. Moses(ed), Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback), National Council of Teachers of Mathematics(1999), 341-361.

Mevarech, Z. R., & Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. In R Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education(pp. 313-318). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

A Study on Mathematics Teaching through Evaluations

Jong Jin Seo[3] Yeon Soo Yoon[4]

Abstract

The level of mathematics study of students may vary depending on the area or contents of school mathematics. The use of Integrated evaluation frame is beneficial for evaluating and utilizing the study situation of mathematics study. In this article, I formulated evaluation table for evaluation by type and by question based on the contents of 'equation of the first degree' and examined mathematics teaching through integrated evaluation based on the two evaluations. It was concluded from this study that the evaluation table I formulated was beneficial for individual mathematic teaching by providing information about the study situation of each student.

Key Words : Evaluation table, Mathematics teaching.

3) Hannam University (jjseo@hnu.kr)
4) Hannam University (yoon@hnu.kr)