

조합공진 영역에서 감쇠의 영향을 고려한 비선형 진동 응답 특성

Nonlinear Oscillation Characteristics in Combination Resonance Region Considering Damping Effects

정 태 건*

Tae-Gun Jeong

(2010년 8월 4일 접수 ; 2010년 8월 31일 심사완료)

Key Words : Combination Resonance(조합공진), Parametric Excitation(매개가진), Mathieu Equation(마띠유방정식), Method of Multiple Scale(다중척도법), Nonlinear Oscillations(비선형진동)

ABSTRACT

Damping may change the response characteristics of nonlinear oscillations due to the parametric excitation of a thin cantilever beam. When the natural frequencies of the first bending and torsional modes are of the same order of magnitude, we can observe the one-to-one combination resonance in the perturbation analysis depending on the characteristic parameters. The nonlinear behavior about the combination resonance reveals a chaotic motion depending on the natural frequencies and damping ratio. We can analyze the chaotic dynamics by using the eigenvalue analysis of the perturbed components. In this paper, we derived the equations for autonomous system and solved them to obtain the characteristic equation. The stability analysis was carried out by examining the eigenvalues. Numerical integration gave the physical behavior of each mode for given parameters.

1. 서 론

수직가진되는 얇은 평판의 비선형 진동 안정성은 회전하는 보 또는 각종 마이크로 디바이스의 작동에 많은 영향을 주게 된다. 이는 보의 자체 질량에 의한 가진효과가 나타나는 매개가진 시스템으로 전형적인 비선형 진동 시스템이다.

수직가진 보의 조합공진(combination resonance) 현상은 Yamamoto⁽¹⁾가 처음 이론적으로 연구한 바 있고 Dugundji 등⁽²⁾은 이것을 이론과 실험으로 규명했다. Hsu⁽³⁾는 비선형 감쇠를 매개가진 시스템에 도입했고 Mukhopadhyay⁽⁴⁾는 비선형 감쇠를 포함하여 조합공진을 재분석했다. Zhang 등⁽⁵⁾은 외팔보의

비선형 비평면 진동의 전체 분기현상과 혼돈역학(chaotic dynamics)을 분석하고 공진현상으로 2:1 내부공진, 1/2 분수조화공진(subharmonic resonance), 주공진(primary resonance)을 가정했고 다중척도법(method of multiple scale)을 사용하여 비선형 해석을 하였다. Cartmell 등⁽⁶⁾은 방정식에 섭동법을 적용시켜 비선형 거동에 관한 동특성 해석을 하고 보의 끝에 또 하나의 보를 부착시키고 비선형 해석을 하였다.

Bang 등⁽⁷⁾은 매개가진 시스템에서 일어나는 비평면 비선형 운동의 일대일 조합공진, 즉 1차 굽힘 고유진동수와 1차 비틀림 고유진동수의 합 주파수에서 일어나는 공진을 다중척도법을 사용하여 해석했고 실험을 통해 검증한 바 있다. 이 연구에서는 시스템의 지배방정식을 굽힘과 비틀림에 관한 연속계 방정식으로 모델링하고 갤러킨 방법을 사용하여 2자유도 방정식으로 변환시켜 마띠유 방정식

* 교신저자; 정회원, 건국대학교 기계공학부
E-mail : tgjeong@konkuk.ac.kr
Tel : (02)450-3471, Fax : (02)447-5886

(Mathieu equation)을 유도했다. 두 개의 연립 마띠유 방정식에 다중척도법을 적용하여 일대 일 조합공진이 발생하는 상황을 검토하였고 고유값을 계산해서 시스템의 안정성을 판정할 수 있는 기준을 구했다. 특히 고유값의 물리적 의미를 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭비로 나타낼 수 있다는 것을 확인했다. 실험에서는 일대 일 조합공진을 규명하기 위해 1차 굽힘 고유진동수 6.2 Hz와 1차 비틀림 고유진동수 61.7 Hz의 합인 68 Hz에서 시스템을 가진하여 비선형 모드로 진동하는 것을 확인했다.

앞 연구에서는 이론해석에서 감쇠를 고려하지 않아 감쇠의 영향을 받는 복잡한 비선형 응답특성을 구할 수 없었고 단지 개략적인 안정성 영역만을 구하는 데 그쳤다. 실제로 여러 영역에서의 시스템 거동을 계산하는 것은 조합공진의 특성을 분석하는데 필수적이다. 이 연구에서는 감쇠를 포함시켜 다중척도법 해석을 수행하고 그 결과를 수치해석을 통해 분석한다. 특히 조합공진 시 응답특성을 직접 수치계산함으로써 감쇠를 비롯한 여러 조건에 따라 시스템 응답이 어떻게 변화하는지를 검토했다.

2. 지배방정식

Bang⁽⁸⁾은 Bolotin⁽⁹⁾의 매개가진 구조진동 방정식과 유사하게 수직가진되는 얇은 보에 대한 운동방정식을 유도했다. 가진함수를 $u(t) = u \cos \Omega t$ 라 하고 유도된 굽힘, 비틀림 방정식은 다음과 같다. 이는 자체질량 효과와 함께 중력의 영향도 고려한 것이다.

$$EI_y \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{m}{2}(g - \ddot{u})[(l - z)^2 \theta]'' + m\ddot{v} = 0 \quad (1)$$

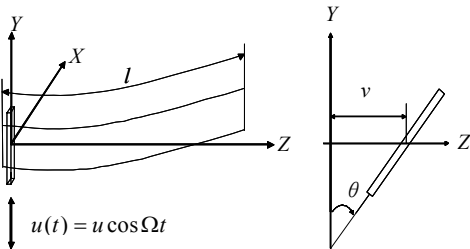


Fig. 1 Thin cantilever beam under harmonic excitation

$$-GJ\theta'' + \frac{m}{2}(g - \ddot{u})[(l - z)^2 v']' + I\ddot{\theta} = 0 \quad (2)$$

여기서 EI_y 와 GJ 는 각각 보의 굽힘 강성과 비틀림 강성이고 I_y 는 Y 축에 대한 2차 면적모멘트, J 는 단면 극관성모멘트이다. m 과 I 는 보의 단위길이당 질량과 관성모멘트이다. 보의 형상 및 좌표계는 Fig. 1에 나타낸 것과 같다.

보의 운동 $v(z, t)$ 와 $\theta(z, t)$ 를 변위와 시간에 관한 함수의 곱으로 변수분리하면 $v(z, t) \approx l \sum_{i=1}^N V_i(z) \eta_i(t)$, $\theta(z, t) \approx \sum_{i=1}^N \Theta_i(z) \varphi_i(t)$ 를 얻고, 보의 1차 굽힘 모드와 1차 비틀림 모드를 나타내는 시험함수 $V_i(z)$, $\Theta_i(z)$ 를 써서 갤러킨 방법을 적용하면 다음과 같이 운동방정식을 얻게 된다⁽⁸⁾. 이 단계에서 굽힘과 비틀림 모드에 대한 모드감쇠비 ζ_B 와 ζ_T 를 도입한다.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}(t) + 2\zeta_B \omega_B \dot{\eta}(t) + \omega_B^2 \eta(t) \\ + (\delta_B + \mu_B \cos \Omega t) \varphi(t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = 3.52 \sqrt{\frac{EI_y}{ml^4}}$$

$$\text{여기서, } \delta_B = \frac{\alpha_B}{m_B} = -0.1543 \frac{g}{l}$$

$$\mu_B = \frac{\psi_B}{m_B} = -0.1543 \frac{u}{l} \Omega^2$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_T \omega_T \dot{\varphi}(t) + \omega_T^2 \varphi(t) \\ + (\delta_T + \mu_T \cos \Omega t) \eta(t) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\omega_T = \sqrt{\frac{k_T}{m_T}} = 1.57 \sqrt{\frac{GJ}{Il^2}}$$

$$\text{여기서, } \delta_T = \frac{\alpha_T}{m_T} = -0.7370 \frac{mlg}{I}$$

$$\mu_T = \frac{\psi_T}{m_T} = -0.7370 \frac{ml}{I} u \Omega^2$$

그리고 $\alpha_B, \psi_B, \alpha_T, \psi_T$ 는 갤러킨 방법에서 구한 적분항을 가리킨다⁽⁸⁾.

3. 섭동법에 의한 비선형 해석

3.1 다중척도법

식 (3), (4)에 섭동법을 적용하기 위해 척도변환을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\ddot{\eta}(t) + 2\varepsilon\zeta_B\omega_B\dot{\eta}(t) + \omega_B^2\eta(t) + \varepsilon(\delta_B + \mu_B \cos\Omega t)\varphi(t) = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\varepsilon\zeta_T\omega_T\dot{\varphi}(t) + \omega_T^2\varphi(t) + \varepsilon(\delta_T + \mu_T \cos\Omega t)\eta(t) = 0 \quad (6)$$

다중척도법을 적용하기 위한 일반시간 t , 섭동시간 εt , 미분연산자 D , 그리고 종속변수 η 와 φ 를 아래와 같이 정의한다.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (9)$$

$$\eta(t, \varepsilon) = \eta_0(T_0, T_1) + \varepsilon \eta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (10)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(T_0, T_1) + \varepsilon \varphi_1(T_0, T_1) + \dots \quad (11)$$

식 (7)~(11)을 식 (5), (6)에 대입하고 계수를 비교하여 섭동항을 차수에 따라 정리하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

차수 ε^0 :

$$D_0^2 \eta_0 + \omega_B^2 \eta_0 = 0 \quad (12)$$

$$D_0^2 \varphi_0 + \omega_T^2 \varphi_0 = 0 \quad (13)$$

차수 ε^1 :

$$D_0^2 \eta_1(t) + \omega_B^2 \eta_1(t) = -2D_0 D_1 \eta_0(t) - 2\zeta_B \omega_B D_0 \eta_0(t) - \delta_B \varphi_0(t) - \mu_B \varphi_0(t) \cos\Omega t \quad (14)$$

$$D_0^2 \varphi_1(t) + \omega_T^2 \varphi_1(t) = -2D_0 D_1 \varphi_0(t) - 2\zeta_T \omega_T D_0 \varphi_0(t) - \delta_T \eta_0(t) - \mu_T \eta_0(t) \cos\Omega t \quad (15)$$

ε^0 차수로부터 추출한 식 (12), (13)은 2계 상미분방정식이고 그 해를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\eta_0(T_0, T_1) = A_1(T_1)e^{i\omega_B T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_B T_0} \quad (16)$$

$$\varphi_0(T_0, T_1) = A_2(T_1)e^{i\omega_T T_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega_T T_0} \quad (17)$$

여기서 A_1, A_2 는 시스템의 진폭을 나타내는 값으로 T_1 의 함수이다. \bar{A}_1, \bar{A}_2 는 켈레복소수를 나타낸다.

식 (16), (17)을 식 (14), (15)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$D_0^2 \eta_1 + \omega_B^2 \eta_1 = [-2i\omega_B \frac{dA_1}{dT_1} - 2i\zeta_B \omega_B^2 A_1 - \frac{\mu_B}{2} \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1}] e^{i\omega_B T_0} + cc + NST \quad (18)$$

$$D_0^2 \varphi_1 + \omega_T^2 \varphi_1 = [-2i\omega_T \frac{dA_2}{dT_1} - 2i\zeta_T \omega_T^2 A_2 - \frac{\mu_T}{2} \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1}] e^{i\omega_T T_0} + cc + NST \quad (19)$$

여기서 cc 는 켈레복소수, NST (not produce secular term)는 세클러 항을 포함하지 않는 잔여항을 말한다. σ 는 조합공진의 가진주파수를 조절하는 조절매개변수(detuning parameter)이고, 일대 일 조합공진에 대해 $\Omega \approx \omega_B + \omega_T + \varepsilon\sigma$ 로 정의된다.

식 (18), (19)에서 세클러 항을 제거하면 시스템 특성을 나타내는 다음 두 방정식을 얻는다.

$$2i\omega_B \frac{dA_1}{dT_1} + 2i\zeta_B \omega_B^2 A_1 + \frac{\mu_B}{2} \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1} \quad (20)$$

$$2i\omega_T \frac{dA_2}{dT_1} + 2i\zeta_T \omega_T^2 A_2 + \frac{\mu_T}{2} \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1} \quad (21)$$

여기서 A_1, A_2 는 조합공진 상태에서의 1차 급함과 1차 비틀림의 진폭을 나타내고 T_1 의 함수이다. 시간에 따른 A_1 과 A_2 의 응답으로 조합공진 주파수에서 시스템 안정성 해석을 할 수 있다.

3.2 시스템 안정성 해석

식 (20), (21)에서 A_1, A_2 를 다음과 같이 정의한다.

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1 e^{i\beta_1 T_1} \quad (22)$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2 e^{i\beta_2} \quad (23)$$

여기서 a_1, a_2 는 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭을 의미하고 β_1, β_2 는 각 응답에 대한 위상변화를 의미한다. 이 네 변수는 모두 T_1 의 함수이다.

식 (22), (23)을 식 (20), (21)에 대입하고 실수부와 허수부로 정리하면 다음과 같이 네 방정식을 얻을 수 있다.

$$\omega_B a_1' + \zeta_B \omega_B^2 a_1 + \frac{\mu_B}{4} a_2 \sin \gamma = 0 \quad (24)$$

$$\omega_B a_1 \beta_1' - \frac{\mu_B}{4} a_2 \cos \gamma = 0 \quad (25)$$

$$\omega_T a_2' + \zeta_T \omega_T^2 a_2 + \frac{\mu_T}{4} a_1 \sin \gamma = 0 \quad (26)$$

$$\omega_T a_2 \beta_2' - \frac{\mu_T}{4} a_1 \cos \gamma = 0 \quad (27)$$

여기서

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta_1 - \beta_2 \quad (28)$$

수치해석을 통해 위의 네 연립 미분방정식을 풀면 여러 조건에 대한 응답특성을 구할 수 있다.

한편 조절매개변수로 안정영역을 나타내기 위해 식 (24)~(28)을 자율계(autonomous system)로 나타내면 다음과 같다.

$$a_1' = -\frac{\mu_B}{4\omega_B} a_2 \sin \gamma - \zeta_B \omega_B a_1 \quad (29)$$

$$a_2' = -\frac{\mu_T}{4\omega_T} a_1 \sin \gamma - \zeta_T \omega_T a_2 \quad (30)$$

$$\gamma' = \sigma - \left(\frac{\mu_B a_2}{4a_1 \omega_B} + \frac{\mu_T a_1}{4a_2 \omega_T} \right) \cos \gamma \quad (31)$$

정상상태를 고려하면 $a_1' = 0$ 과 $a_2' = 0$ 으로부터 다음 식을 얻게 되고,

$$\sin^2 \gamma = \frac{16\zeta_B \zeta_T \omega_B^2 \omega_T^2}{\mu_B \mu_T} \quad (32)$$

이 식과 $\gamma' = 0$ 으로부터 다음 결과를 얻게 된다.

$$\sigma = \pm \left(\frac{\mu_B a_2}{4a_1 \omega_B} + \frac{\mu_T a_1}{4a_2 \omega_T} \right) \sqrt{1 - \frac{16\zeta_B \zeta_T \omega_B^2 \omega_T^2}{\mu_B \mu_T}} \quad (33)$$

여기서 감쇠효과를 조절매개변수 σ 에 포함시키면

$$\sigma_d = \frac{\pm \sigma}{\sqrt{1 - \frac{16\zeta_B \zeta_T \omega_B^2 \omega_T^2}{\mu_B \mu_T}}} \quad (34)$$

와 같이 나타낼 수 있고 이 조절매개변수로 고유값을 표시하면

$$\lambda = \frac{a_1 \mu_T}{4a_2 \omega_T} = -\frac{1}{2} \left[\sigma_d \pm \sqrt{\sigma_d^2 - \frac{\mu_B \mu_T}{4\omega_B \omega_T}} \right] \quad (35)$$

와 같이 되어 Bang 등⁽⁷⁾에서 구한 비감쇠 진동의 경우와 같은 형태로 표시되고 이는 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭비와 관계되는 물리적 특성을 지니게 된다.

4. 수치계산 결과

4.1 감쇠를 고려한 안정성 해석

Bang 등⁽⁷⁾의 결과와 비교하기 위해 동일한 조건에 대하여 고유값을 계산했다. 알루미늄 시편 (200×40×0.3 mm)에 대해 ω_B 와 ω_T 를 계산하고 충분한 안정영역이 존재하도록 하는 작은 크기의 특정 가진진폭 $u=0.1$ mm에 대하여 μ_B 와 μ_T 를 계산했다. 이 값들을 이용하여 고유값 λ 를 구하면 다음과 같다. 여기서 감쇠를 고려하려면 σ 대신 식 (34)로 정의되는 σ_d 를 대입하면 된다.

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 2.05^2} \right] \quad (36)$$

Fig. 2는 식 (36)으로 표시된 고유값의 그래프를 플롯한 것이다. 점선은 비감쇠를 나타내고 실선은 모드감쇠비를 0.005로 한 경우를 나타낸다. 비감쇠 조건에서 원래 $-2.05 < \sigma < 2.05$ 로 정의되었던 불안정 영역이 감쇠효과로 인하여 $-1.67 < \sigma < 1.67$ 로 축소되었다. 감쇠비의 증가에 따라 불안정 영역이 계속 축소되어 결국 불안정 영역이 소멸됨을 계산할 수 있었다.

여기서 중요한 점은 일대 일 조합공진이 불안정한 거동을 보이는 구간을 섭동법을 이용한 비선형 진동해석으로 구할 수 있고 특히 섭동 1차항으로 정의되는 특성방정식에 대한 고유값 해석을 통해

시스템의 안정성을 정량적으로 정의할 수 있다는 점이다. Bang 등⁽⁷⁾에서 고유값을 무차원화시킴으로써 고유값이 1차 굽힘 모드와 1차 비틀림 모드의 진폭비를 나타낸다는 것을 확인한 바 있었다. 따라서 Fig. 2에서 비감쇠와 감쇠의 경우를 비교해보면 감쇠효과는 이 진폭비를 크게 하므로 주로 비틀림 모드에 더 크게 작용함을 알 수 있다. 여기서 고유값의 허수부 그래프를 보면 불안정 영역이 더 명확해진다.

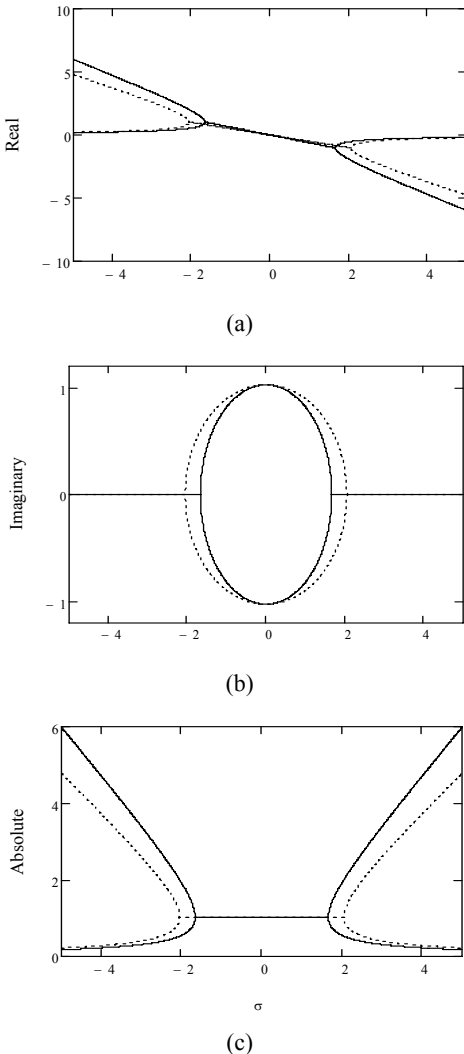


Fig. 2 Eigenvalue vs. detuning parameter (a) Real part, (b) Imaginary part, (c) Absolute value. Solid lines denote damped case and dotted lines denote undamped case

4.2 조합공진 영역에서의 시스템 거동

식 (24)~(27)을 풀면 조합공진 영역에서의 시스템거동을 여러 조건에 대해 분석할 수 있다. 안정 영역과 불안정 영역에 대한 시스템 거동을 수치계산을 통해 구했고 각각의 경우에 대해 감쇠와 비감쇠 응답의 차이를 비교해 보았다.

수치계산 결과를 다음과 같이 직교좌표 성분으로 나타내어 굽힘과 비틀림의 진폭을 표시한다.

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2}[x_1(T_1) + ix_2(T_2)] \tag{37}$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2}[x_3(T_1) + ix_4(T_2)] \tag{38}$$

먼저 비감쇠인 경우에 불안정 영역에서의 응답특성을 계산한 결과를 Fig. 3에 나타냈다. 시스템의 불안정성이 너무 강력하게 나타나지 않도록 $\sigma = 2$ 인 경우에 대해 응답을 계산했다. 굽힘 진동에 해당하는 A_1 의 실수부 x_1 과 비틀림 진동에 대한 x_3 을 비교해보면 거의 같은 모양으로 진폭이 증가함을 알 수 있다. 또 실수부와 허수부를 플롯한 Fig. 3(b)와 (d)를 보면 굽힘과 비틀림 모두 나선형으로 진폭이 증가하는 것을 알 수 있다. 비록 상당한 시간이 지난 후에 진폭이 증가하는 것처럼 보이지만 사실은 초기부터 계속 진폭이 증가하고 있으므로 시간 구간을

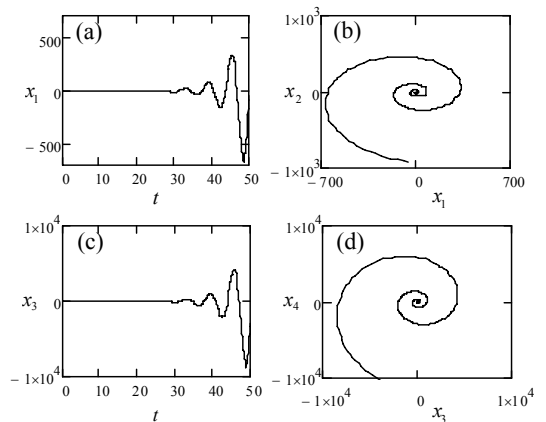


Fig. 3 The undamped response in the nonlinear oscillations under parametric excitation for $\sigma = 2$ (a) the waveform on plane (t, x_1) , (b) the phase portrait on plane (x_1, x_2) , (c) the waveform on plane (t, x_3) , (d) the phase portrait on plane (x_3, x_4)

어떻게 잡아도 거의 비슷한 패턴을 보여주게 된다. 즉 고려된 구간의 60% 지점부터 급격한 진폭증가를 목격할 수 있었다.

Fig. 4는 Fig. 3과 같은 조건에 대하여 감쇠가 있는 경우의 응답이다. 비감쇠 응답과 비교해서 뚜렷한 차이점은 비틀림 응답에서 고유진동수의 영향이 분명하게 나타나는 점이다. 원래 고유값 해석에 따르면 안정 영역이지만 실제 수치계산 결과는 감쇠의 영향으로 진폭이 세 자리 정도 작아졌어도 아직 불안정한 특성을 보여주고 있다. 그리고 시스템 자체의 불안정 특성보다 시스템 고유진동 특성이 더 뚜렷하게 나타나고 있다. 이는 안정성 해석에서 확인한 바와 같이 감쇠의 영향으로 시스템 불안정 영역이 축소된 데 따른 결과이다.

다음은 안정 영역에서의 시스템 거동을 보기 위해 $\sigma=3$ 인 경우에 대해 응답을 계산했다. Fig. 5는 비감쇠인 경우로 진폭이 계속 일정하게 유지되면서 고유진동 특성을 보여주고 있다. 안정한 영역에서는 시스템의 고유진동의 영향이 뚜렷하게 나타나고 있음을 볼 수 있다. Fig. 5(b)와 (d)는 조합공진에 따른 진폭에 비해 비틀림 진동의 고유진동 특성이 더 크게 나타나고 있다는 것을 보여준다. 이와 같이 실수부와 허수부를 플롯함으로써 안정적인 비감쇠 응답의 패턴은 일정한 직경의 원을 유지하면서 그 범위

내에서 변화하는 양상을 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 이 경우는 조합공진 주파수에서 상당히 떨어져 있는 경우로 조합공진의 효과보다 고유진동의 효과가 더 크게 나타난다. 즉 조합공진에 따른 불안정성이 거의 나타나지 않고 있다.

Fig. 6은 감쇠가 있는 경우의 응답을 플롯한 것이

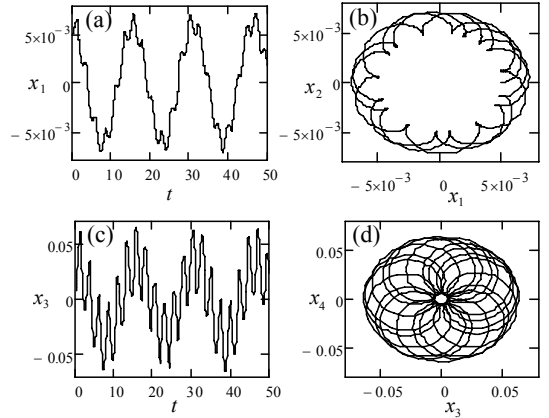


Fig. 5 The undamped response in the nonlinear oscillations under parametric excitation for $\sigma=3$ (a) the waveform on plane (t, x_1) , (b) the phase portrait on plane (x_1, x_2) , (c) the waveform on plane (t, x_3) , (d) the phase portrait on plane (x_3, x_4)

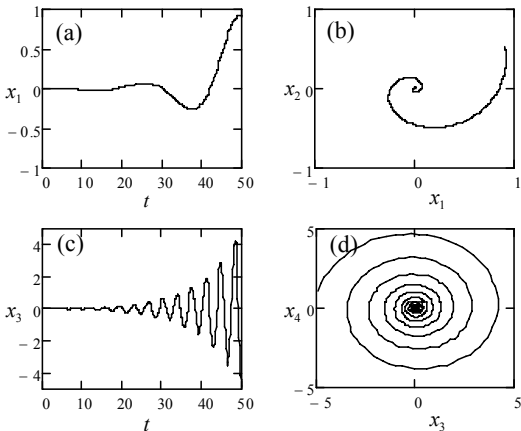


Fig. 4 The damped response in the nonlinear oscillations under parametric excitation for $\sigma=2$ (a) the waveform on plane (t, x_1) , (b) the phase portrait on plane (x_1, x_2) , (c) the waveform on plane (t, x_3) , (d) the phase portrait on plane (x_3, x_4)

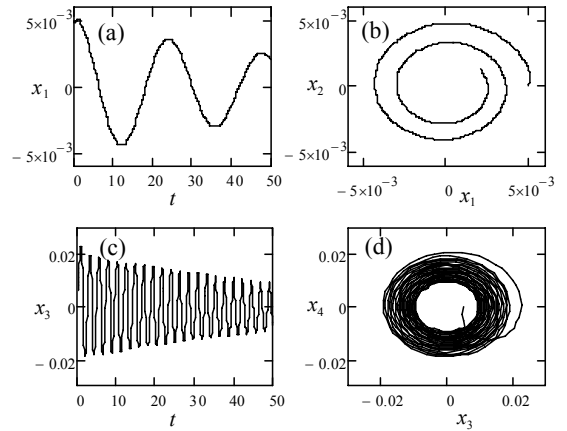


Fig. 6 The damped response in the nonlinear oscillations under parametric excitation for $\sigma=3$ (a) the waveform on plane (t, x_1) , (b) the phase portrait on plane (x_1, x_2) , (c) the waveform on plane (t, x_3) , (d) the phase portrait on plane (x_3, x_4)

다. 여기서는 조합공진의 영향은 전혀 나타나지 않고 굽힘과 비틀림의 고유진동 특성만 나타나고 있다. 시스템의 안정 영역에서는 아주 작은 감쇠만으로도 조합공진의 영향이 거의 사라진다는 것을 알 수 있다. Fig. 3과 4에서 나선형으로 진폭이 증가하는 것과는 반대로 여기서는 나선형으로 진폭이 감소되어 가는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 수직외팔보의 매개가진에 대한 비선형 응답특성을 섭동법을 사용하여 구했다. 일대일 조합공진의 특성을 다중척도법을 사용하여 해석하고 감쇠의 영향을 포함시켰다. 연구 결과 얻은 주요 결론은 다음과 같다.

(1) 시스템의 지배방정식에 감쇠를 포함시켜 2자유도 마띠유 방정식을 유도했다. 이 연립 마띠유 방정식은 매개가진 시스템 해석의 기본방정식이 된다.

(2) 다중척도법을 사용하여 연립 마띠유 방정식을 섭동해석하고, 일대일 조합공진이 발생함을 확인했다. ε^1 차수에 대해 유도된 식에서 세클라 항을 제거하여 특성 방정식을 구했다.

(3) 감쇠가 포함된 경우의 고유값 해석을 통해 조합공진의 안정 영역을 정의하고 감쇠가 이 안정 영역에 미치는 영향을 구했다. 감쇠비의 증가에 따라 불안정 영역은 계속 축소되어 결국 소멸되는 것을 확인했다.

(4) 조합공진 영역에서 시스템 특성을 나타내는 비선형 방정식을 직접 수치적분해서 굽힘과 비틀림 진동의 진폭의 변화를 구했다. 안정과 불안정 영역의 경계에 해당하는 $\sigma=2$ 인 경우에는 진폭이 계속 증가함을 볼 수 있었고, 안정 영역에 해당하는 $\sigma=3$ 인 경우에는 진폭이 일정하거나 감소하는 것을 볼 수 있었다.

후 기

이 논문은 2009학년도 건국대학교의 지원에 의하여 연구되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Yamamoto, T. and Saito, A., 1970, "On the Vibrations of 'Summed Differential Types' under Parametric Excitation," *Memories of the Faculty of Engineering, Nagoya University*, Vol. 22, No. 1, pp. 54~123.

(2) Dugundji, J. and Mukhopadhyay, V., 1973, "Lateral Bending-torsion Vibrations of a Thin Beam under Parametric Excitation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, No. 3, pp. 693~698.

(3) Hsu, C. S., 1975, "Limit Cycle Oscillations of Parametrically Excited Second-order Nonlinear Systems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 176~182.

(4) Mukhopadhyay, V., 1980, "Combination Resonance of Parametrically Excited Coupled Second Order Systems with Non-linear Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 2, pp. 297~307.

(5) Zhang, W., Wang, F. and Yao, M., 2005, "Global Bifurcations and Chaotic Dynamics in Non-linear Non-planar Oscillations of a Parametrically Excited Cantilever Beam," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 40, No. 3, pp. 251~279.

(6) Cartmell, M. P. and Roberts, J. W., 1988, "Simultaneous Combination Resonances in an Autoparametrically Resonant System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 123, No. 1, pp. 81~101.

(7) Bang, D. J., Lee, G. D., Jo, H. D. and Jeong, T. G., 2008, "Stability of Nonlinear Oscillations of a Thin Cantilever Beam Under Parametric Excitation," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 2, pp. 160~168.

(8) Bang, D. J., 2007, "Study on the Stability of Nonlinear Oscillations of a Thin Cantilever Beam Under Parametric Excitation," MS Thesis, Konkuk University, Seoul, Korea.

(9) Bolotin, V. V., 1964, "Dynamic Stability of Elastic Systems," Holden-Day, Inc., San Francisco.